Вопросы по курсу теории вероятностей
МГУ, мех-мат, 4-й семестр, 2016 г. Лектор – А.М.Зубков

1. Вероятностное пространство, события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Вероятностные меры и их свойства. Теорема Каратеодори (без доказательства).

2. Формула включения-исключения и вероятность объединения событий.

3. Теорема о непрерывности вероятностной меры.

4. Конечные вероятностные пространства. Выборки с возвращением и без возвращения. Геометрические вероятности.

5. Независимость событий, разбиений, алгебр и сигма-алгебр. Конечные сигма-алгебры и конечные разбиения. Условие независимости сигма-алгебр, порожденных не более чем счетными разбиениями.

6. Независимые испытания. Произведения вероятностных пространств. Вероятностные пространства для испытаний Бернулли и для полиномиальной схемы. Вероятностное пространство для бесконечной последовательности независимых испытаний.

7. Условные вероятности. Теорема умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

8. Случайные величины. Индикаторы и их свойства. Индикатор объединения событий.

9. Закон распределения случайной величины. Функция распределения и ее свойства. Биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, пуассоновское распределения. Совместные и маргинальные распределения.

10. Математическое ожидание случайной величины с дискретным множеством значений. Свойства математического ожидания.

11. Моменты случайных величин. Степенные моменты. Дисперсия и ее свойства.

12. Неравенства Маркова, Чебышёва, Коши–Буняковского, Иенсена, Ляпунова.

13. Независимость случайных величин. Независимость в совокупности и попарная независимость. Теорема о независимости функций от независимых случайных величин.

14. Мультипликативность математического ожидания произведения независимых случайных величин.

15. Ковариация и корреляция случайных величин. Дисперсия суммы случайных величин. Ковариационные матрицы случайных векторов и их свойства.

16. Закон больших чисел, теорема Бернулли.

17. Предельная теорема Пуассона. Формулировки локальной и интегральной теорем Муавра–Лапласа (без доказательств).

18. Производящие функции и их свойства.

19. Теорема непрерывности для производящих функций.

20. Доказательство теоремы Пуассона для сумм индикаторов с помощью производящих функций.

21. Метод моментов для последовательностей целочисленных неотрицательных случайных величин. Условия сходимости к распределению Пуассона.

22. Формула для факториальных моментов суммы индикаторов. Неравенства Бонферрони.

23. Функции распределения случайных векторов и их свойства.

24. Разложения распределений. Дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные распределения. Примеры.

25. Плотность распределения образа случайной величины и образа случайного вектора при гладких взаимно однозначных отображениях.

26. Формулы для распределения суммы независимых случайных величин.

27. Математическое ожидание случайной величины с произвольным распределением. Обоснование корректности определения. Математическое ожидание произведения случайных величин.

28. Теорема о монотонной сходимости.

29. Теорема о мажорируемой сходимости.

30. Формулы для вычисления математического ожидания случайной величины и функции от нее.

31. Характеристические функции и их свойства: мультипликативность, связь с моментами, асимптотика для малых значений аргумента. Теоремы единственности и непрерывности (без доказательств).

32. Характеристическая функция стандартного нормального распределения. Центральная предельная теорема для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

33. Теорема Ляпунова для сумм независимых случайных величин.

34. Характеристические функции случайных векторов и их свойства.

35. Центральная предельная теорема для сумм случайных векторов.

36. Слабая сходимость случайных величин, сходимость с вероятностью 1, сходимость по вероятности, сходимость в среднем. Связи между разными видами сходимости.

37. Закон больших чисел в форме Хинчина.

38. Неравенство Колмогорова для распределения максимума сумм.

39. Усиленный закон больших чисел.

40. Лемма Бореля–Кантелли.