Метод моментов для целочисленных неотрицательных случайных величин

Эквивалентность сходимости производящих функций и сходимости распределений целочисленных случайных величин позволяет сформулировать удобные для проверки условия на моменты случайных величин, достаточные для сходимости последовательностей распределений.

Теорема (метод моментов). *Пусть* $\nu_1, \nu_2, \ldots$ *– последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин,* $m_k^{(n)} = \mathbf{M}\nu_n^{[k]}$, $n, k = 1, 2, \ldots$ *Если существуют пределы*

$$m_k = \lim_{n\to\infty} m_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и

$$m_k = O(k!) \quad \text{\textit{при}} \quad k \to \infty, \tag{2}$$

то существует такая случайная величина ν*, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_n = j\} = \mathbf{P}\{\nu = j\}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

и $\mathbf{M}\nu^{[k]} = m_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Из условия $m_k = O(k!)$, $k \to \infty$, следует, что ряд $f(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!}(s-1)^k$ сходится при любом $s \in [0, 1)$; при этом $f^{(k)}(1) = m_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что

$$f_n(s) = \mathbf{M}s^{\nu_n} \to f(s),\ n \to \infty, \quad \text{при любом } s \in [0, 1].$$

Фиксируем произвольные $s \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $N = N(\varepsilon) < \infty$ так, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{k \geqslant N} \frac{m_k}{k!}(1-s)^k < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$f(s) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{m_k}{k!}(s-1)^k + \theta\frac{\varepsilon}{3},\ 0 < \theta \leqslant 1. \tag{3}$$

Выпишем формулу Тейлора для $f_n(s)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f_n(s) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{m_k^{(n)}}{k!}(s-1)^k + \theta_n \frac{m_N^{(n)}}{N!}(s-1)^N,\ 0 < \theta_n \leqslant 1, \tag{4}$$

так как производные $f_n(s)$ монотонно не убывают на отрезке $[0,\ 1]$ и $f_n^{(k)}(1) = m_k^{(n)}$. При всех достаточно больших n

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|m_k^{(n)} - m_k|}{k!}\,(s-1)^k < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \frac{m_N^{(n)}}{N!}\,(s-1)^N < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из этих оценок (3), (4) и произвольности выбора $s \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ следует, что $f_n(s) \to f(s)$, $n \to \infty$ при любом $s \in (0,\ 1]$. Сходимость при $s = 0$ — следствие непрерывности и монотонности $f_n(s)$ на $[0,\ 1]$.

Остается заметить, что непрерывным пределом последовательности производящих функций может быть только производящая функция. Последнее утверждение теоремы следует из построения производящей функции $f(s)$. Теорема доказана.

Метод моментов часто используется при доказательстве сходимости к распределению Пуассона, поскольку факториальные моменты случайной величины ν, имеющей распределение Пуассона с параметром λ, имеют особенно простой вид:

$$\mathbf{M}\nu^{[k]} = \frac{d^k}{ds^k}\mathbf{M}s^\nu\Big|_{s=1} = \frac{d^k}{ds^k}e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda^k e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda^k.$$

Следствие 3. *Если $\nu_n, n = 1, 2, \ldots,$ — такая последовательность целочисленных неотрицательных случайных величин, что $\mathbf{M}\nu_n^{[k]} \to \lambda^k$ при $n \to \infty$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, то распределения случайных величин ν_n сходятся к распределению Пуассона с параметром λ:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_n = j\} = \frac{\lambda^j}{j!}\,e^{-\lambda}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. При указанных в следствии условиях

$$\mathbf{M}s^\nu = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!}\,(s-1)^k = e^{-\lambda(s-1)},$$

т.е. предельная случайная величина ν имеет распределение Пуассона с параметром λ.

Факториальные моменты суммы индикаторов. Неравенства Бонферрони для объединения событий

Для применения метода моментов нужно вычислять факториальные моменты случайных величин или находить их предельные значения. Удобный способ вычисления факториальных моментов сумм зависимых индикаторов дает следующая лемма.

Лемма о факториальных моментах. *Если* $\xi = \mathbb{I}_1 + \ldots + \mathbb{I}_n$ – *сумма случайных индикаторов, то при любом натуральном* k

$$\mathbf{M}\xi^{[k]} = k! \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}\{\mathbb{I}_{i_1} = \ldots = \mathbb{I}_{i_k} = 1\}. \tag{5}$$

Доказательство. По определению

$$\mathbf{M}\xi^{[k]} = \mathbf{M}k!\,\frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{k!} = k!\mathbf{M}C_\xi^k. \tag{6}$$

Представим теперь сумму в правой части (5) в виде

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}\{\mathbb{I}_{i_1} = \ldots = \mathbb{I}_{i_k} = 1\} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{M}I\{\mathbb{I}_{i_1} = \ldots = \mathbb{I}_{i_k} = 1\} =$$

$$= \mathbf{M} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} I\{\mathbb{I}_{i_1} = \ldots = \mathbb{I}_{i_k} = 1\} = \mathbf{M}C_\xi^k, \tag{7}$$

последнее равенство следует из того, что при любом элементарном событии ω последовательность индикаторов $\mathbb{I}_1(\omega), \ldots, \mathbb{I}_n(\omega)$ состоит ровно из $\xi(\omega)$ единиц и $n - \xi(\omega)$ нулей, значит,

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} I\{\mathbb{I}_{i_1}(\omega) = \ldots = \mathbb{I}_{i_k}(\omega) = 1\} = C_{\xi(\omega)}^k.$$

Сравнение (7) и (6) завершает доказательство леммы.

В качестве примера применим эту лемму к следующей схеме: пусть по N ячейкам случайно размещаются T частиц, так что каждая частица независимо от остальных попадает в любую из N ячеек с вероятностью $\frac{1}{N}$. Обозначим через $\mu_0(T, N)$ случайную величину, равную числу пустых ячеек (т. е. таких, в которые не попало ни одной частицы).

Следствие 1. *При любом натуральном* k

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]}(T, N) = k!\,C_N^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^T. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_T$ — номера ячеек, в которые попали 1-я, 2-я,..., T-я частицы; эти случайные величины независимы и имеют равномерное распределение на множестве $\{1, \ldots, N\}$. Обозначим через $\eta_j = \sum_{t=1}^{T} I\{\xi_t = j\}$ — число частиц, попавших в j-ю ячейку. Тогда

$$\mu_0(T, N) = I\{\eta_1(T) = 0\} + \ldots + I\{\eta_N(T) = 0\},$$

и согласно лемме о факториальных моментах

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]}(T, N) = k! \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant N} \mathbf{P}\{\eta_{i_j}(T) = 1,\ j = 1, \ldots, k\}.$$

Остается заметить, что при любых попарно различных $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, N\}$

$$\mathbf{P}\{I\{\eta_{i_j}(T) = 1\},\ j = 1, \ldots, k\} = \mathbf{P}\{\eta_{i_j}(T) = 0, j = 1, \ldots, k\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_t \notin \{i_1, \ldots, i_k\},\ t = 1, \ldots, T\} = \left(1 - \frac{k}{N}\right)^T.$$

Полученные формулы можно использовать для доказательства предельной теоремы для числа $\mu_0(T, N)$ пустых ячеек в равновероятной схеме независимого размещения T частиц по N ячейкам.

Теорема 2. *Если $T, N \to \infty$ так, что $T = N \ln N + N \ln \lambda + o(N)$, то*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\mu_0(T, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Согласно (8)

$$\mathbf{M}\mu_0^{[m]}(T, N) = N^{[m]} \left(1 - \frac{m}{N}\right)^T = N^{[m]} \exp\left\{T \ln\left(1 - \frac{m}{N}\right)\right\}.$$

При указанных в теореме условиях для каждого фиксированного m

$$\ln N^{[m]} = \ln\left(N^m \prod_{j=0}^{m}\left(1 - \frac{j}{N}\right)\right) = m \ln N + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\ln \exp\left(T \ln\left(1 - \frac{m}{N}\right)\right) = -\left(\frac{m}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)(N \ln N + N \ln \lambda + o(N)) =$$
$$= -\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) m(\ln N + \ln \lambda + o(1)),$$

откуда следует, что

$$\ln \mathbf{M}\mu_0^{[m]}(T,N) = -m\ln\lambda + o(N^{-1}\ln N) = -m\ln\lambda + o(1),$$

т.е.

$$\lim_{N,T\to\infty} \mathbf{M}\mu_0^{[m]}(T,N) = \lambda^m,\ m = 1,2,\ldots$$

Отсюда и из следствия 3 вытекает утверждение теоремы 2.

Лемма о связи вероятностей и факториальных моментов. *Для любой целочисленной неотрицательной случайной величины ξ и любого целого $r \geqslant 1$ при некотором $\theta_r \in [0,1]$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^k}{k!}\mathbf{M}\xi^{[k]} + \frac{(-1)^r}{r!}\,\theta\,\mathbf{M}\xi^{[r]}, \quad \theta \in [0,\ 1]. \tag{9}$$

Доказательство. Разложим производящую функцию $f(s) = \mathbf{M}s^{\xi}$ по формуле Тейлора в точке $s = 1$:

$$f(s) = f(1) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(1)(s-1)^k + \frac{1}{r!}\,f^{(r)}(u_s)(s-1)^r, \tag{10}$$

где $u_s \in [s,1]$. Полагая в этом равенстве $s = 0$ и замечая, что

$$f(0) = \mathbf{M}s^{\xi}|_{s=0} = \mathbf{P}\{\xi = 0\}, \quad 0 \leqslant f^{(k)}(u) \leqslant f^{(k)}(1) = \mathbf{M}\xi^{[k]},\ u \in [0,1],$$

так как все производные производящей функции монотонно возрастают на отрезке [0, 1], получаем равенство (9), что и требовалось доказать.

Следствие 2 (Формула включения-исключения и неравенства Бонферрони). *Если $A_1,\ldots,A_N$ — события, определенные на одном и том же вероятностном пространстве, и $\xi = \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbb{I}\{A_k\}$ — число одновременно происходящих событий, а $S_k = \sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant N} \mathbf{P}\{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\} = \frac{1}{k!}\,\mathbf{M}\xi^{[k]}$, то*

$$\mathbf{P}\{A_1\cup\ldots\cup A_N\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi = 0\} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}S_k, \tag{11}$$

и при любом $r = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k+1} S_k \leqslant \mathbf{P}\{A_1 \cup \ldots \cup A_N\} = \mathbf{P}\{\xi > 0\} \leqslant \sum_{k=1}^{2r+1} (-1)^{k+1} S_k. \quad (12)$$

Доказательство. В нашем случае производящая функция $\mathbf{M}s^{\xi}$ является многочленом степени не выше N. Поэтому формула включения-исключения (11) следует из (9) при $r = N$ и того, что в силу леммы $\mathbf{M}\xi^{[k]} = k!\, S_k$, а неравенства Бонферрони (12) следуют из (9) и из того, что в силу неотрицательности всех производных производящей функции на отрезке [0,1] знаки остаточных членов зависят только от четности r.