Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической статистики и случайных процессов

Е.Вл.Булинская

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Учебно-методическое пособие

Москва, 2014

Содержание

1 Введение

Теория ветвящихся процессов – это раздел теории вероятностей, изучающий эволюцию популяций объектов, размножающихся и гибнущих в соответствии с определенными правилами, в которых главную роль играет случайность. В самых первых работах по теории ветвящихся процессов в качестве объектов выступали человеческие индивидуумы, и основной интерес для исследователей представлял вопрос об исчезновении известных фамилий. В современных приложениях объектами могут служить гетерозиготы, являющиеся носителями мутантного гена, или клиенты, ожидающие в системе очередей, или нейтроны в ядерном реакторе (см., например, [25], [28] и [48]). Термин "ветвящийся процесс" был впервые предложен А.Н. Колмогоровым и Н.А. Дмитриевым в их фундаментальной статье [23] 1947 года, посвященной анализу эволюции популяций вероятностными методами. Фактически ими был создан новый раздел теории стохастических процессов. Однако теория ветвящихся процессов уходит своими корнями в середину XIX века, когда была опубликована статья Ф. Гальтона и Г.В. Ватсона о вероятности вырождения фамилий. Позднее их модель эволюции популяции получила название ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, который может быть кратко описан следующим образом. Процесс начинается в момент $n = 0$ с одного индивидуума (или частицы). Индивидуумы (или частицы), существующие в момент $n = 0, 1, \ldots$, погибают в момент $n + 1$, производя перед гибелью независимо друг от друга случайное число потомков в соответствии с данной вероятностной производящей функцией. Вероятность невырождения популяции и асимптотическое поведение численности популяции при $n \to \infty$ стали основными объектами изучения в ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона. Как обобщение процесса Гальтона-Ватсона, в 1948 году в работе Р.Беллмана и Т.Харриса был предложен ветвящийся процесс, названный впоследствии ветвящимся процессом Беллмана-Харриса. В отличие от модели Гальтона и Ватсона, в процессе Беллмана-Харриса каждая частица, независимо от остальных, живет *случайное время*, распределенное по заданному закону. Еще более широкий класс ветвящихся процессов представлен общими ветвящимися процессами или процессами Крампа-Мода-Ягерса. Особенностью этих процессов является возможность для каждой частицы давать потомков в случайные моменты *несколько раз* за время жизни. Другое направление развития теории ветвящихся процессов состоит в рассмотрении частиц нескольких типов. Наряду с многотипными процессами Гальтона-Ватсона были введены ветвящиеся процессы Беллмана-Харриса с *несколькими типами частиц*. Для многотипных ветвящихся процессов ставились новые сложные задачи, относящиеся уже к изучению не популяции в целом, а ее отдельных частей, состоящих из частиц определенного типа. При решении таких задач возникают трудности, связанные с немонотонностью по t вероятности невырождения популяции частиц одного типа к моменту t. Сложность задачи не позволяет решить ее в общем виде. Однако в некоторых важных случаях удается получить красивые завершенные результаты. В первой части данного пособия также рассматривается решение задачи об асимптотическом поведении численности частиц первого типа в двутипном *неразложимом* ветвящемся процессе Беллмана-Харриса определенного вида. Кроме того, для этого процесса найдено совместное условное предельное распределение должным образом нормированных численностей частиц первого и второго типов. Для доказательства последнего технически сложного результата понадобилось установить 10 лемм. Упомянутые результаты для ветвящихся процессов Беллмана-Харриса в четвертом разделе пособия применяются к исследованию ветвящихся случайных блужданий по целочисленной плоскости. Интересно отметить несколько следствий из доказанных теорем. Во-первых, при условии невырождения популяции частиц первого типа, условное предельное по времени распределение должным образом нормированного числа частиц первого типа в рассматриваемом ветвящемся процессе Беллмана-Харриса является дискретным. Заметим, что при несколько иных предположениях в [52] была решена аналогичная задача, и соответствующее предельное распределение оказалось экспоненциальным. Во-вторых, при том же условии, численности частиц первого и второго типов асимптотически независимы, когда время стремится к бесконечности. Следует подчеркнуть, что доказательство последнего утверждения не требует каких-либо дополнительных ограничений, налагаемых на производящие функции процесса (ср. с [17]).

В третьем разделе пособия в рамках модели случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ вводится понятие *времени достижения с запретом*. Причина его возникновения такова. При исследовании ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ в четвертом разделе применяется метод введения вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц, благодаря чему удается использовать теоремы В.А. Ватутина, ранее установленные для этих процессов в работах [11], [12], [13] и [14]. Однако, чтобы перенести результаты, полученные для вспомогательного процесса Беллмана-Харриса, на изучаемое ветвящееся случайное блуждания, требуется ввести упомянутое новое понятие. Время достижения состояния $y \in \mathbb{Z}^d$ с запретом в состоянии $z \in \mathbb{Z}^d$ – это случайное время до первого достижения y (или первого возвращения в y, если точка старта x совпадает с y) частицей, совершающей случайное блуждание, если ее траектория не проходит через запрещенное состояние z. Иначе время достижения состояния y с запретом в z полагается равным бесконечности. Функция распределения времени достижения y с запретом в z и со стартовой точкой блуждания x обозначается $H_{x,y,z}(t)$, $t \geq 0$. Ранее для случайных блужданий изучались отдельно времена первого достижения некоторого состояния (или первого возвращения в состояние), а для марковских процессов исследовались вероятности с запрещениями или табу-вероятности. В пособии мы находим предельное значение $H_{x,y,z}(\infty) = \lim_{t\to\infty} H_{x,y,z}(t)$ и анализируем асимптотическое поведение $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ для неразложимого, симметричного, однородного по пространству и времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков. Наиболее интересным оказывается случай $d = 1$, поскольку тогда существует два совершенно различных вида асимптотического поведения функции $H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ в зависимости от того, является ли случайное блуждание простым или нет. Стоит также упомянуть, что для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, значение $H_{x,y,z}(\infty)$ лежит строго в интервале $(0, 1)$, а порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ определяется только размерностью d, независимо от значений x, y и z. При этом для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ именно взаимное расположение точек x, y и z задает как значение $H_{x,y,z}(\infty) \in [0, 1]$, так и порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$, когда $t \to \infty$. Основные подходы, использующиеся при доказательстве этих результатов, заключаются в представлении комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр, а также применении преобразования Лапласа и тауберовых теорем для правильно меняющихся обобщенных функций распределения и их плотностей. Упомянутые результаты получили дальнейшее развитие в недавних публикациях автора [8] и [43].

В четвертом разделе исследуется модель ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления. Ветвящиеся процессы с диффузией частиц были впервые рассмотрены в статье Б.А. Севастьянова [24]. С тех пор моделям ВСБ было посвящено множество публикаций. Модель *симметричного* ветвящегося случайного блуждания (СВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с одним источником ветвления была предложена в статье Е.Б. Яровой [31]. Этот ветвящийся процесс с диффузией частиц может быть схематично обрисован следующим образом. Процесс начинается с одной частицы, расположенной в произвольной фиксированной точке решетки $\mathbb{Z}^d$. Начальная частица совершает случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ до момента первого попадания в источник ветвления, который, например, находится в нуле. В нуле частица может с заданными интенсивностями либо произвести случайное число потомков, либо покинуть начало координат и случайно блуждать до следующего возвращения в источник ветвления. При этом генератор случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ симметричен, что и объясняет название такой модели. Потомки родительской частицы эволюционируют независимо друг от друга и от предыстории процесса в соответствии со схемой, данной выше. В статье В.А. Ватутина, В.А. Топчия и Е.Б. Яровой [53] определена новая модель критического *каталитического* ветвящегося случайного блуждания (КВСБ) по $\mathbb{Z}$, являющаяся несколько более общей по сравнению с критическим СМСБ по $\mathbb{Z}$. Обобщение состоит во введении дополнительного параметра, отвечающего за соотношение между "ветвлением" и "блужданием" в начале координат, из-за чего генератор случайного блуждания перестает быть симметричным. В последующих публикациях описание КВСБ было продолжено для случая целочисленной решетки произвольной конечной размерности. Оказалось, что, как и для многих разновидностей ветвящихся процессов, КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ может быть классифицировано как надкритическое, критическое или докритическое в зависимости от соотношения между параметрами, участвующими в описании модели. Более того, для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ при любом $d \in \mathbb{N}$ был выявлен *экспоненциальный* рост как общих численностей частиц, так и локальных численностей (речь идет о числе частиц в отдельных узлах решетки), и были доказаны соответствующие предельные теоремы. Что касается докритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, то установлено, что и для общего размера популяции, и для локальных численностей частиц характерно предельное *дискретное* распределение при условии невырождения этих популяций (см. [9]). В пособии подчеркивается, что в отличие от надкритического и докритического случаев, в модели критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ при разных $d \in \mathbb{N}$ возникают различные предельные распределения для нормированных локальных численностей частиц при условии их невырождения. Так, при $d = 1$, $d = 3$ и $d \geq 5$ рассматриваемое распределение оказывается экспоненциальным. В то же время при $d = 2$ это распределение дискретно, а при $d = 4$ соответвующий предельный закон является смесью экспоненциального и атома в нуле. Подходы к исследованию локальных численностей частиц в критическом КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ тоже различаются в зависимости от d. Например, для старших размерностей эффективным оказывается метод введения вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц. Для всех $d \in \mathbb{N}$ плодотворным является применение техники дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, позволившей доказать важное свойство монотонности по времени среднего числа частиц в некоторой точке на $\mathbb{Z}^d$, если эта точка совпадает со стартовой точкой процесса. Эти результаты содержатся в статьях [7] и [41]. Отметим, что тесная связь КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с суперпроцессами, а именно с каталитическим супер-броуновским движением с одной точкой катализа, была продемонстрирована в ряде работ [45], [47] и [54]. Подчеркнем также, что ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления служит отправным пунктом при изучении более сложных моделей ВСБ с несколькими источниками ветвления (см., например, [36] и [42]).

Автор признателен профессорам В.И. Афанасьеву, В.А. Ватутину, А.М. Зубкову, В.А. Топчию и Е.Б. Яровой за полезные обсуждения и внимание к работе.

2 Новые предельные теоремы для процессов Беллмана-Харриса

2.1 Основные результаты второго раздела

Данный раздел посвящен исследованию критических ветвящихся процессов Беллмана-Харриса с двумя типами частиц. Напомним (см., например, [16], с. 5) общее описание таких процессов. В начальный момент времени $t = 0$ существует одна частица типа i, где $i = 1, 2$. Эта частица живет случайное время, имеющее функцию распределения $G_i(t)$, и гибнет, порождая случайное число частиц-потомков типов 1 и 2 в соответствии с производящей функцией $f_i(s_1, s_2)$, $s_1, s_2 \in [0, 1]$. После момента рождения и до момента гибели каждая из частиц эволюционирует независимо от предыстории процесса и от остальных частиц, существующих в этом временном промежутке. При этом эволюция частицы типа $j = 1, 2$ описывается функцией распределения продолжительности жизни $G_j(t)$ и производящей функцией числа ее непосредственных потомков $f_j(s_1, s_2)$. Пусть определена матрица

$$M := \left(\frac{\partial f_i(s_1; s_2)}{\partial s_j} \bigg|_{s_1=s_2=1} \right)_{i,j=1,2}$$

математических ожиданий числа непосредственных потомков частиц такого процесса. Описанный процесс называется критическим и неразложимым, если перронов корень матрицы M (т.е. максимальное по абсолютной величине собственное число матрицы M) равен 1 и существует натуральное число n, для которого все элементы матрицы M^n положительны.

Пусть $Z_i(t)$ – численность частиц типа $i = 1, 2$ в этом процессе в момент $t \geq 0$. Введем обозначение $F_i(t; s_1, s_2) := \mathsf{E}\left(s_1^{Z_1(t)} s_2^{Z_2(t)} \Big| Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, 2 \right)$ для производящей функции численностей частиц обоих типов в момент t при условии, что процесс стартовал с частицы i-го типа (как обычно, δ_{ij} – символ Кронекера).

Мы сосредоточимся на изучении процесса Беллмана-Харриса такого, что $G_1(t) = 1 - e^{-t}$ при $t \geq 0$, $f_1(s_1, s_2) = \kappa f_0(s_1) + (1 - \kappa)s_2$ и $f_2(s_1, s_2) = s_1$, где $s_1, s_2 \in [0, 1]$. Здесь $0 < \kappa < 1$, а для вероятностной производящей функции $f_0(s)$, $s \in [0, 1]$, верны соотношения $f_0'(1) = 1$ и $0 < f_0''(1) < \infty$. Более того, мы будем предполагать, что

$$1 - G_2(t) \sim \frac{C}{\ln t}, \quad t \to \infty, \tag{1}$$

где C – некоторая положительная постоянная. Таким образом, в изучаемом процессе частицы первого типа, как правило, живут недолго по сравнению с частицами второго типа. При этом частицы второго типа могут рождаться только от частиц первого типа. Легко проверить, что введенный процесс является критическим и неразложимым (см., например, [53]). К тому же выполнены все условия теоремы 1 из [13], которая утверждает, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Z_1(t) + Z_2(t) > 0 | Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, 2) \quad &\sim \quad \mathsf{P}(Z_2(t) > 0 | Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, 2) \\ &\sim \quad \sqrt{\frac{2(1-\kappa)C}{\sigma_0^2 \ln t}}, \quad t \to \infty, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\left(s_1^{Z_1(t)} s_2^{Z_2(t)} \Big| Z_1(t) + Z_2(t) > 0, Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, 2 \right) = 1 - \sqrt{1 - s_2}$$

при $i = 1, 2$, $s_1, s_2 \in [0, 1]$ и $\sigma_0^2 := \kappa f_0''(1)$. Следовательно, если к моменту времени t популяция частиц не выродилась, то в пределе $(t \to \infty)$ она состоит почти наверное (п.н.) только из конечного числа частиц второго типа.

Неисследованным оставалось асимптотическое поведение числа частиц первого типа и совместное распределение числа частиц обоих типов при условии невырождения частиц первого типа. Основное содержание второго раздела представляет собой исчерпывающее решение этих задач для определенного класса указанных процессов.

Прежде чем сформулировать главные результаты, введем дополнительные обозначения. Положим $G_3(t) := \kappa G_1(t) + (1-\kappa) G_1 * G_2(t)$ и $V(t) := \sum_{k=0}^{\infty} G_3^{*k}(t)$, где $*k$ означает k-кратную свертку. Заметим, что функция распределения $G_3(t)$ абсолютно непрерывна, поэтому функция восстановления $V(t)$ обладает плотностью $v(t)$. Тауберовы теоремы (теоремы 2 и 4 в [26], гл.13, §5) и формула (1) влекут соотношения

$$1 - G_3(t) \sim \frac{(1-\kappa)C}{\ln t}, \quad V(t) \sim \frac{\ln t}{(1-\kappa)C}, \quad t \to \infty.$$

Отсюда, вообще говоря, не следует (производные эквивалентных функций не обязаны быть эквивалентными), что

$$v(t) \sim \frac{1}{(1-\kappa)\, C\, t}, \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Однако на протяжении всего второго раздела мы будем предполагать последнее условие выполненным. В четвертом разделе приводятся содержательные примеры процессов Беллмана-Харриса, для которых условие (2) имеет место.

Далее в этом разделе мы будем считать, что процесс начинается с одной частицы *первого* типа. Поэтому, в отличие от предыдущих формул, для упрощения записи мы не будем писать соответствующие условия ($Z_1(0) = 1$ и $Z_2(0) = 0$) под знаками математического ожидания и вероятности. При $t \geq 0$ и $s \in [0, 1]$ положим $q(t; s) := 1 - \mathsf{E} s^{Z_1(t)}$, $q(t) := q(t; 0) = \mathsf{P}(Z_1(t) > 0)$, $\Phi(s) := \kappa(f_0(1-s) - 1 + s)$ и $J(s) := \int_0^\infty \Phi(q(u; s))\, du$. Теперь мы можем сформулировать основные результаты раздела.

Теорема 1 *Справедливо следующее соотношение*

$$q(t) \sim \frac{(1 - J(0))}{(1-\kappa)Ct}, \quad t \to \infty, \tag{3}$$

где $J(0) < 1$.

Теорема 2 *Для каждого* $s \in [0, 1]$ *имеем*

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\left(s^{Z_1(t)} \middle| Z_1(t) > 0\right) = \frac{s - (J(0) - J(s))}{1 - J(0)}.$$

Теорема 3 *Для всех* $s \in [0, 1]$ *и* $\lambda \geq 0$ *верно равенство*

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\left(s^{Z_1(t)} \exp\left\{ -\frac{\lambda(1-\kappa)CZ_2(t)}{2\sigma_0^2 \ln t} \right\} \middle| Z_1(t) > 0 \right)$$
$$= \frac{s - (J(0) - J(s))}{1 - J(0)} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\lambda}(\sqrt{1+\lambda} + 1)^2}.$$

Отметим несколько неожиданных следствий сформулированных теорем. Во-первых, из теоремы 1 и условия (2) вытекает, что вероятность невырождения частиц первого типа с точностью до постоянного множителя эквивалентна при $t \to \infty$ плотности восстановления $v(t)$. Во-вторых, теорема 2 обнаруживает *дискретное* предельное по времени распределение числа частиц первого типа при условии их невырождения. Наконец, теорема 3 допускает следующую интерпретацию: если в момент t популяция частиц первого типа невырождена, то при $t \to \infty$ числа частиц первого и второго типов *асимптотически независимы*.

2.2 Вспомогательные интегральные уравнения

Напомним, что согласно [25], гл. 8, §1, производящие функции $F_i(t; s_1, s_2)$, $i = 1, 2$, рассматриваемого ветвящегося процесса Беллмана-Харриса удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned}
F_1(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) \\
&+ \int_0^t (\kappa f_0(F_1(t-u; s_1, s_2)) + (1-\kappa) F_2(t-u; s_1, s_2))\, dG_1(u), \\
F_2(t; s_1, s_2) &= s_2(1 - G_2(t)) + \int_0^t F_1(t-u; s_1, s_2)\, dG_2(u).
\end{aligned}$$

Подставляя второе из последних уравнений в первое и используя обозначение $Q(t; s_1, s_2) := 1 - F_1(t; s_1, s_2)$, находим (см. [17]), что

$$\begin{aligned}
Q(t; s_1, s_2) &= (1 - s_1)(1 - G_1(t)) + (1 - s_2)(1 - \kappa)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\
&+ \int_0^t Q(t-u; s_1, s_2)\, dG_3(u) - \int_0^t \Phi(Q(t-u; s_1, s_2))\, dG_1(u).
\end{aligned}$$

Решение этого уравнение восстановления есть функция

$$\begin{aligned}
Q(t; s_1, s_2) &= (1 - s_1) m(t) + (1 - \kappa)(1 - s_2)(1 - G_2(\cdot)) * G_1 * V(t) \\
&- \int_0^t \Phi(Q(t-u; s_1, s_2))\, d(G_1 * V(u)), \qquad (4)
\end{aligned}$$

где $m(t) := (1 - G_1(\cdot)) * V(t)$. Заметим, что

$$(1-\kappa)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) = (1-\kappa) G_1(t) - (1-\kappa) G_2 * G_1(t) = G_1(t) - G_3(t),$$

откуда

$$\begin{aligned}
(1-\kappa)(1 - G_2(\cdot)) * G_1 * V(t) &= G_1 * V(t) - G_3 * V(t) \\
&= 1 - (1 - G_1(\cdot)) * V(t) = 1 - m(t).
\end{aligned}$$

Поскольку $G_1(t) = 1 - e^{-t}$, имеем $(G_1 * V(t))' = (1 - G_1(\cdot)) * V(t) = m(t)$, $t \geq 0$. Учитывая последние соотношения, перепишем (4) в виде

$$Q(t; s_1, s_2) = (1 - s_1) m(t) + (1 - s_2)(1 - m(t)) - \int_0^t \Phi(Q(t-u; s_1, s_2)) m(u)\, du. \qquad (5)$$

Полагая $s_1 = s$ и $s_2 = 1$ в последнем равенстве, приходим к интегральному уравнению относительно функции $q(t;s) = Q(t;s,1)$:

$$q(t;s) = (1-s)m(t) - \int_0^t \Phi(q(t-u;s))m(u)\,du. \tag{6}$$

Наконец, подставляя в это равенство $s = 0$, получаем уравнение относительно вероятности невырождения популяции частиц первого типа:

$$q(t) = m(t) - \int_0^t \Phi(q(t-u))m(u)\,du. \tag{7}$$

В заключении раздела отметим вероятностный смысл функции $m(\cdot)$. Дифференцируя обе части равенства (6) в точке $s = 1$ и учитывая предположение $f_0'(1) = 1$, мы убеждаемся в том, что $\mathsf{E}Z_1(t) = -\partial_s q(t;s)|_{s=1} = m(t)$, $t \geq 0$. Таким образом, функция $m(t)$ – это среднее число частиц первого типа, существующих в момент $t \geq 0$, при условии, что процесс начался с одной частицы первого типа.

2.3 Асимптотическое поведение числа частиц первого типа

Этот раздел посвящен доказательству теорем 1 и 2.

Нетрудно показать (например, методами леммы 5.1.2 в [33]), что в силу определения $m(t)$ и соотношения (2) верно асимптотическое равенство

$$m(t) \sim \frac{1}{(1-\kappa)\,C\,t}, \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Из уравнения (6) и неотрицательности функций $\Phi(s)$, $s \in [0,1]$, и $m(t)$, $t \geq 0$, следует неравенство

$$q(t;s) \leq (1-s)m(t), \quad t \geq 0, \quad s \in [0,1]. \tag{9}$$

В силу формул (8), (9) и $\Phi(s) \sim \sigma_0^2 s^2/2$, $s \to 0+$, заключаем, что функция $J(s)$, определенная выше, конечна при всех $s \in [0,1]$.

Лемма 1 *При $t \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\int_0^t \Phi(q(t-u;s))m(u)\,du \sim m(t)J(s) \sim \frac{J(s)}{(1-\kappa)\,C\,t}.$$

Доказательство. Обозначим

$$W(t;s) := \int_0^t \Phi(q(t-u;s))m(u)\,du = W_{1,\alpha_0}(t;s) + W_{2,\alpha_0}(t;s), \tag{10}$$

где $0 < \alpha_0 < 1$ – некоторое фиксированное число и

$$W_{1,\alpha_0}(t;s) := \int_0^{\alpha_0 t} m(t-u)\Phi(q(u;s))\,du,$$

$$W_{2,\alpha_0}(t;s) := \int_0^{t(1-\alpha_0)} \Phi(q(t-u;s))m(u)\,du.$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_{1,\alpha_0}(t;s)$ при $t \to \infty$. В силу (8) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\alpha_0 > 0$, что для всех достаточно больших t и $(1-\alpha_0)t \le u \le t$ верно двойное неравенство

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1-\kappa)\,C\,t} \le m(u) \le \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\kappa)\,C\,t}.$$

Следовательно,

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1-\kappa)\,C\,t}\int_0^{\alpha_0 t}\Phi(q(u;s))\,du \le W_{1,\alpha_0}(t;s) \le \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\kappa)\,C\,t}\int_0^{\alpha_0 t}\Phi(q(u;s))\,du.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то при $t \to \infty$ имеем

$$W_{1,\alpha_0}(t;s) \sim \frac{1}{(1-\kappa)\,C\,t}\int_0^{\infty}\Phi(q(u;s))\,du = \frac{J(s)}{(1-\kappa)\,C\,t}. \tag{11}$$

Покажем, что

$$W_{2,\alpha_0}(t;s) = o(W_{1,\alpha_0}(t;s)), \quad t \to \infty. \tag{12}$$

Воспользовавшись неравенством $\Phi(s) \le \sigma_0^2 s^2$, верным при достаточно малых $s \ge 0$, а также учитывая соотношения (8) и (9), для достаточно больших t устанавливаем следующие оценки

$$W_{2,\alpha_0}(t;s) \le \sigma_0^2 \int\limits_0^{t(1-\alpha_0)} m(u)\,q^2(t-u;s)\,du \le \frac{C'}{\alpha_0^2 t^2}\int\limits_0^{t(1-\alpha_0)} m(u)\,du \le \frac{C''\ln t}{\alpha_0^2 t^2},$$

где C' и C'' – некоторые положительные постоянные. Отсюда при $t \to \infty$ вытекает (12). Соотношения (10), (11) и (12) влекут утверждение леммы.

Лемма 2 *Имеет место строгое неравенство $J(0) < 1$.*

Доказательство. Пусть $m_2(t) := \mathsf{E}\,[Z_1(t)(Z_1(t)-1)]$ есть второй факториальный момент числа частиц первого типа при условии, что процесс начался с одной частицы первого типа. Дважды дифференцируя (6) по s в точке $s=1$ и учитывая условие $f_0'(1) = 1$, получаем

$$m_2(t) = \sigma_0^2\int_0^t m^2(t-u)m(u)\,du.$$

Пользуясь соотношением (8) и леммой 5.1.2 из [33], заключаем, что

$$m_2(t) \sim m(t)\sigma_0^2\int_0^{\infty} m^2(u)\,du \sim \frac{\sigma_0^2\int_0^\infty m^2(u)\,du}{(1-\kappa)\,C\,t}, \quad t \to \infty. \tag{13}$$

Дадим оценку $q(t)$ снизу. В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{aligned} m^2(t) = (\mathsf{E}Z_1(t))^2 &= (\mathsf{E}Z_1(t)\,\mathbb{I}(Z_1(t)>0))^2 \\ &\le \mathsf{E}(Z_1(t))^2\,\mathsf{E}\mathbb{I}(Z_1(t)>0) = (m(t)+m_2(t))q(t), \end{aligned}$$

где $\mathbb{I}(B)$ обозначает индикатор множества B. Выражая из последнего соотношения $q(t)$, приходим к нижней оценке

$$q(t) \geq \frac{m^2(t)}{m(t) + m_2(t)}, \quad t \geq 0.$$

Тогда, учитывая соотношения (7) и (13), а также лемму 1, мы устанавливаем неравенство

$$1 - J(0) \geq \frac{1}{1 + \sigma_0^2 \int_0^\infty m^2(u)\, du} > 0,$$

откуда сразу вытекает искомый результат. Лемма 2 доказана.

Из уравнения (7), лемм 1 и 2 следует утверждение теоремы 1.

В силу интегрального уравнения (6), лемм 1 и 2, а также соотношения (8), выводим, что для каждого $s \in [0, 1]$

$$q(t; s) \sim \frac{1 - s - J(s)}{(1 - \kappa)\, C\, t}, \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2 завершают следующие равенства:

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left(s^{Z_1(t)} | Z_1(t) > 0\right) = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{q(t; s)}{q(t)} = \frac{s - (J(0) - J(s))}{1 - J(0)}, \quad s \in [0, 1].$$

2.4 Совместное распределение численностей частиц разных типов

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 3.

Лемма 3 ([17]) *Для всех* $t \geq 0$ *и* $s_1,\ s_2 \in [0, 1]$ *верны оценки*

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1) \leq 1 - s_2, \\ 0 &\leq (Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - q(t; 0)) \\ &= (q(t; 0) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - Q(t; s_1, s_2)). \end{aligned}$$

Положим при $t > 0,\ u \geq 0$ и $\lambda \geq 0$

$$s_2(t; \lambda) := \exp\left\{ -\frac{(1 - \kappa)\, C\, \lambda}{2\sigma_0^2 \max\{1, \ln t\}} \right\},$$

$$\Delta_1(u, t; \lambda) := Q(u; 0, s_2(t; \lambda)) - q(u; 0), \quad \Delta_1(t; \lambda) := \Delta_1(t, t; \lambda),$$

$$\Delta_2(u, t; s_1, \lambda) := Q(u; s_1, s_2(t; \lambda)) - q(u; s_1), \quad \Delta_2(t; s_1, \lambda) := \Delta_2(t, t; s_1, \lambda),$$

$$\Delta(u, t; s_1, \lambda) := \Delta_2(u, t; s_1, \lambda) - \Delta_1(u, t; \lambda), \quad \Delta(t; s_1, \lambda) := \Delta(t, t; s_1, \lambda),$$

$$\Psi(u, t; s_1, \lambda) := \frac{\Delta(u, t; s_1, \lambda)}{q(u)}, \quad \Psi(t; s_1, \lambda) := \Psi(t, t; s_1, \lambda).$$

Из леммы 3 следует неотрицательность введенных величин.

Несложно проверить, что при $t \geq 1$

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}\left[s_1^{Z_1(t)} \exp\left\{ -\frac{(1-\kappa)\, C\, \lambda Z_2(t)}{2\sigma_0^2 \ln t} \right\} \middle| \, Z_1(t) > 0 \right] \\
= \; & \frac{F_1(t; s_1, s_2(t;\lambda)) - F_1(t; 0, s_2(t;\lambda))}{\mathsf{P}(Z_1(t) > 0)} \\
= \; & \frac{Q(t; 0, s_2(t;\lambda)) - Q(t; s_1, s_2(t;\lambda))}{q(t;0)} = \frac{q(t;0) - q(t;s_1)}{q(t;0)} - \Psi(t; s_1, \lambda).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Так как предельное поведение первого слагаемого в последнем выражении установлено в теореме 2, то для доказательства теоремы 3 достаточно найти $\lim\limits_{t\to\infty} \Psi(t; s_1, \lambda)$.

Условимся о некоторых упрощениях в записи формул. В дальнейшем K будет обозначать произвольный отрезок вида $[0, b]$, где $0 < b < \infty$, а K_ε — любой отделенный от нуля отрезок $[\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b < \infty$. Кроме того, пусть $\mathcal{L}$ — множество функций $\varrho(t; s_1, \lambda)$, $\varrho_1(t; s_1, \lambda), \ldots$ (с нижним индексом или без него), ограниченных при всех $t > 0$, $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \in \mathsf{K}$. Определим также класс $\mathcal{U}$ всех ограниченных функций $\nu(t; s_1, \lambda)$, $\nu_1(t; s_1, \lambda), \ldots$, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ равномерно по $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \in \mathsf{K}$. Аналогично зададим класс $\mathcal{U}_\varepsilon$ всех ограниченных функций $\nu^\varepsilon(t; s_1, \lambda)$, $\nu_1^\varepsilon(t; s_1, \lambda), \ldots$, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ равномерно по $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \in \mathsf{K}_\varepsilon$. Функции с совпадающими индексами могут быть неодинаковыми в различных формулах. Положим $Q(t; s) := Q(t; s, s)$.

Лемма 4 *При $t > 0$, $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \geq 0$ и некоторой функции $\varrho \in \mathcal{L}$ имеем*

$$
\Delta_2(t; s_1, \lambda) = Q(t; s_2(t;\lambda)) + \frac{\varrho(t; s_1, \lambda)}{t}, \quad \Delta_1(t; \lambda) = Q(t; s_2(t;\lambda)) + \frac{\varrho(t; 0, \lambda)}{t}.
$$

Доказательство. Для всех $0 \leq s_{10} \leq s_{11} \leq 1$ верны соотношения

$$
Q(t; s_{10}, s_2) - Q(t; s_{11}, s_2) = \mathsf{E}\left[\left(s_{11}^{\zeta(t)} - s_{10}^{\zeta(t)} \right) s_2^{\mu(t)} \right] \leq \mathsf{E}\left[s_{11}^{\zeta(t)} - s_{10}^{\zeta(t)} \right] \leq q(t; 0). \tag{16}
$$

Из (16) и определения функции $\Delta_2(t; s_1, \lambda)$ следует, что

$$
|\Delta_2(t; s_1, \lambda) - Q(t; s_2(t;\lambda))| \leq |Q(t; s_1, s_2(t;\lambda)) - Q(t; s_2(t;\lambda))| + q(t; s_1) \leq 2q(t; 0).
$$

Последнее неравенство влечет первое утверждение леммы. Второе утверждение — следствие первого при $s_1 = 0$. Лемма 4 доказана.

Таким образом, чтобы найти асимптотическое поведение функций $\Delta_1(t; \lambda)$ и $\Delta_2(t; s_1, \lambda)$, изучим предельные свойства $Q(t; s_2(t;\lambda))$ при $t \to \infty$.

В силу (76) функция $Q(t; s)$ удовлетворяет уравнению

$$
Q(t; s) = 1 - s - \int_0^t \Phi(Q(t-u; s)) m(u)\, du. \tag{17}
$$

Дифференцируя обе части последнего уравнения по s в точке $s = 1$, а также учитывая соотношения $\mathsf{E}Z(t) = -\partial_s Q(t; s)|_{s=1}$ и $f_0'(1) = 1$, находим, что

$$
\mathsf{E}Z(t) = 1, \quad t \geq 0, \tag{18}
$$

где $Z(t) := Z_1(t)+Z_2(t)$ есть число частиц популяции в момент t. Тогда ввиду неравенства $1-e^{-x} \le x,\ x \ge 0$, имеем при $t>0$, $u \ge 0$ и $\lambda \ge 0$

$$Q(u;s_2(t;\lambda)) = \mathsf{E}\left(1-\exp\left\{-\frac{(1-\kappa)\,C\,Z(u)}{2\sigma_0^2\max\{1,\ln t\}}\right\}\right) \le \frac{(1-\kappa)C\lambda}{2\sigma_0^2\max\{1,\ln t\}}. \qquad (19)$$

Отсюда следует, что равномерно по u и λ из любых отрезков в $\mathbb{R}_+$

$$Q(u;s_2(t;\lambda)) \to 0, \quad t\to\infty. \qquad (20)$$

Изучим асимптотическое поведение интегралов $J_1(t;\lambda)$, $J_2(t;\lambda)$ и $J_3(t;\lambda)$, берущихся от функции $\Phi(Q(t-u;s_2(t;\lambda)))m(u)/(1-s_2(t;\lambda))$ по переменной u соответственно из множеств $[0,\varepsilon_1(t))$, $[\varepsilon_1(t),t-\varepsilon_2(t))$ и $[t-\varepsilon_2(t),t]$. Здесь для $t>0$ мы положили

$$\varepsilon_1(t) := \sqrt{\max\{0,\ln t\}}, \quad \varepsilon_2(t) := t(1-\exp\{-\varepsilon_1(t)\}).$$

Лемма 5 *Имеют место следующие соотношения:* $J_1(t;\lambda)=\nu_1(t;\lambda)$, $J_3(t;\lambda)=\nu_3(t;\lambda)$ *и*

$$J_2(t;\lambda) = \frac{\lambda}{4}\int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t-t^x,t;\lambda)\,dx + \nu_2(t;\lambda),$$

где $\varphi(u,t;\lambda) := Q(u;s_2(t;\lambda))/(1-s_2(t;\lambda))$ *и* $\nu_i \in \mathcal{U}$, $i=1,2,3$.

Доказательство. В силу (19), с учетом неравенств $m(t)\le 1$ и $\Phi(s)\le\sigma_0^2 s^2$, верных соответственно при $t\ge 0$ и всех достаточно малых $s\ge 0$, а также ввиду соотношения $1-e^x \sim x$, $x\to 0+$, видим, что при достаточно больших t

$$\begin{aligned} J_1(t;\lambda) &= \int\limits_0^{\varepsilon_1(t)} \frac{\Phi(Q(t-u;s_2(t;\lambda)))m(u)}{1-s_2(t;\lambda)}\,du \\ &\le \frac{(1-\kappa)^2 C^2\lambda^2\,\varepsilon_1(t)}{4(1-s_2(t;\lambda))\sigma_0^2\,\ln^2 t} = \frac{\varrho_1(t;\lambda)}{\sqrt{\ln t}} = \nu_1(t;\lambda). \end{aligned}$$

Далее, используя формулу (8), получаем

$$\begin{aligned} J_3(t;\lambda) &\le \frac{(1-\kappa)^2C^2\lambda^2}{4(1-s_2(t;\lambda))\sigma_0^2\,\ln^2 t}\int\limits_{t-\varepsilon_2(t)}^{t} m(u)\,du \\ &= \frac{\varrho_2(t;\lambda)}{\ln t}\int\limits_{t-\varepsilon_2(t)}^{t}\frac{du}{u} = \frac{\varrho_2(t;\lambda)}{\sqrt{\ln t}} = \nu_3(t;\lambda). \end{aligned}$$

Те же соотношения, а также (20) и формула $\Phi(s)\sim\sigma_0^2 s^2/2$, верная при $s\to 0+$, позволяют записать

$$\begin{aligned} J_2(t;\lambda) &= \frac{\sigma_0^2}{2(1-\kappa)\,C}\int_{\varepsilon_1(t)}^{t-\varepsilon_2(t)} \frac{Q^2(t-u;s_2(t;\lambda))}{(1-s_2(t;\lambda))^2}(1-s_2(t;\lambda))\frac{du}{u}(1+\nu_4(t;\lambda)) \\ &= \frac{\lambda}{4}\int_{\varepsilon_1(t)}^{t-\varepsilon_2(t)} \varphi^2(t-u,t;\lambda)\frac{d(\ln u)}{\ln t}(1+\nu_5(t;\lambda)). \end{aligned}$$

После замены переменных $u = t^x$ под знаком интеграла последнее соотношение перепишется следующим образом:

$$J_2(t;\lambda) = \frac{\lambda}{4}\int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t-t^x, t;\lambda)\,dx(1+\nu_5(t;\lambda)).$$

Поскольку в силу (17) верно неравенство $Q(t;s) \le 1-s$ для $t \ge 0$ и $s \in [0,1]$, то $0 \le \varphi(u,t;\lambda) \le 1$ при $u \ge 0$, $t > 0$ и $\lambda \ge 0$ (считаем, что $\varphi(u,t;0) = 1$, $u \ge 0$, $t > 0$). Таким образом, доказательство леммы 5 завершено.

Лемма 6 *Справедливо равенство*

$$\varphi(t-t^x, t;\lambda) = \varphi(t-t^x, t-t^x;\lambda) + r(t;x,\lambda),$$

где $r(t;x,\lambda) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in [\ln\ln t/(2\ln t), 1-1/\sqrt{\ln t}]$ *и* $\lambda \in \mathsf{K}$.

Доказательство. Из (19) и определения φ следует, что найдется положительная функция $\nu_1 \in \mathcal{U}$ такая, что при $x \in [\ln\ln t/(2\ln t), 1-1/\sqrt{\ln t}]$

$$\begin{aligned} 0 &\le \varphi(t-t^x,t;\lambda) - \frac{Q(t-t^x; s_2(t;\lambda))}{1-s_2(t-t^x;\lambda)} \\ &\le \frac{(1-\kappa)\,C\,\lambda}{2\sigma_0^2\,\ln t}\left(\frac{1}{1-s_2(t;\lambda)} - \frac{1}{1-s_2(\varepsilon_2(t);\lambda)}\right) = \nu_1(t;\lambda). \end{aligned} \tag{21}$$

В силу определения функций $s_2(t;\lambda)$, $Q(t;s)$ и $\varphi(u,t;\lambda)$, а также с учетом (18) и неравенства $1-e^{-x} \le x$ при $x \ge 0$, для $x \in [\ln\ln t/(2\ln t), 1-1/\sqrt{\ln t}]$ справедливы оценки

$$0 \le \varphi(t-t^x, t-t^x;\lambda) - \frac{Q(t-t^x; s_2(t;\lambda))}{1-s_2(t-t^x;\lambda)} = \frac{\mathsf{E}\left[s_2(t;\lambda)^{Z(t-t^x)} - s_2(t-t^x;\lambda)^{Z(t-t^x)}\right]}{1-s_2(t-t^x;\lambda)}$$

$$\le \frac{1}{1-s_2(t-\varepsilon_1(t);\lambda)}\mathsf{E}\left[1-\exp\left\{-\frac{(1-\kappa)C\lambda\,Z(t-t^x)}{2\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\ln\varepsilon_2(t)} - \frac{1}{\ln t}\right)\right\}\right].$$

Последнее выражение оценивается сверху некоторой функцией $\nu_2 \in \mathcal{U}$. Вместе с (21) это влечет утверждение леммы 6.

Теперь мы приступим к доказательству леммы об асимптотическом поведении функции $Q(t;s_2(t;\lambda))$.

Лемма 7 *Равномерно по* $\lambda \in \mathsf{K}$ *верно соотношение*

$$\frac{Q(t;s_2(t;\lambda))}{1-s_2(t;\lambda)} \to \frac{2}{1+\sqrt{1+\lambda}}, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. После подстановки $s_2(t;\lambda)$ вместо s в уравнение (17) разделим обе его части на $1-s_2(t;\lambda)$. Тогда, обозначив $\varphi(t;\lambda) := \varphi(t,t;\lambda)$, в силу лемм 5 и 6 получим

$$\varphi(t;\lambda) = 1 + \nu(t;\lambda) - \frac{\lambda}{4}\int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t-t^x;\lambda)\,dx, \quad \nu \in \mathcal{U}.$$

Рассмотрим квадратное уравнение, которое нам удобно записать в виде

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \varphi^2(\lambda)\, dx, \quad \lambda \geq 0.$$

Его положительным решением является функция

$$\varphi(\lambda) = \frac{2(\sqrt{1+\lambda} - 1)}{\lambda} = \frac{2}{1 + \sqrt{1+\lambda}}. \tag{22}$$

Далее с помощью метода, использованного в [52], нетрудно показать, что равномерно по $0 \leq \lambda \leq \Lambda$, где $\sigma_0^2 \Lambda < 1$, верно соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t;\lambda) = \varphi(\lambda). \tag{23}$$

Для доказательства справедливости (23) при всех $\lambda > 0$ достаточно обратиться к схеме серий ветвящихся процессов, рассмотренной в [15]. Это позволяет установить, что $\lim_{t\to\infty} \varphi(t;\lambda)$ в области $Re\,\lambda > 0$ является аналитической и ограниченной функцией. Поскольку то же самое верно для ветви функции $2/(1+\sqrt{1+\lambda})$, принимающей значение 1 при $\lambda = 0$, то (23) имеет место при всех $\lambda > 0$ в силу теоремы единственности для аналитических функций. Как следствие, получаем равномерную сходимость в (23) по $\lambda \in \mathsf{K}$, что завершает доказательство леммы.

Если

$$I(t; s_1, s_2) := \int_0^t [\Phi(Q(t-u; s_1, s_2)) - \Phi(q(t-u; s_1))] m(u)\, du,$$

то в силу (76)

$$\Delta(t; s_1, \lambda) = I(t; 0, s_2(t;\lambda)) - I(t; s_1, s_2(t;\lambda)). \tag{24}$$

Положим $y = Q(t-u; s_1, s_2)$ и $x = q(t-u; s_1) = Q(t-u; s_1, 1)$. По формуле Тейлора $\Phi(y) - \Phi(x) = \Phi'(x)(y-x) + \Phi''(\theta)\,(y-x)^2/2$, где $\theta = \theta(x,y) \in [x,y]$. В результате ее применения получаем представление $I(t; s_1, s_2) = I_1(t; s_1, s_2) + I_2(t; s_1, s_2)$, где

$$I_1(t; s_1, s_2) := \int_0^t \Phi'(q(t-u; s_1))[Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1)] m(u)\, du, \tag{25}$$

$$I_2(t; s_1, s_2) := \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(\theta(t-u; s_1, s_2))[Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1)]^2 m(u)\, du, \tag{26}$$

причем $\theta(v; s_1, s_2) \in [q(v; s_1), Q(v; s_1, s_2)]$.

Для краткости обозначим $C_q(s) := (1 - s - J(s))(1-\kappa)^{-1} C^{-1}$, $s \in [0,1]$.

Лемма 8 *При $t \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\frac{I_1(t; s_1, s_2(t;\lambda))}{q(t;0)} \to \frac{3C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{2C_q(0)} + \frac{2C_q(s_1)\ln\varphi(\lambda)}{C_q(0)}$$

равномерно по $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \in \mathsf{K}$.

Доказательство. Запишем интеграл $I_1(t; s_1, s_2(t;\lambda))$ в виде суммы интегралов $I_{11}(t; s_1, \lambda)$, $I_{12}(t; s_1, \lambda)$, $I_{13}(t; s_1, \lambda)$ и $I_{14}(t; s_1, \lambda)$, взятых соответственно по следующим промежуткам: $[0, \sqrt{\ln t})$, $[\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t})$, $[t - t/\sqrt{\ln t}, t - \sqrt{\ln t})$ и $[t - \sqrt{\ln t}, t]$.

В силу леммы 3 и формулы (8), а также соотношений (14) и $\Phi'(s) \le \sigma_0^2 s,\ s \ge 0$, при некоторых ν_1, $\nu_4 \in \mathcal{U}$ справедливы оценки

$$I_{11}(t; s_1, \lambda) \le \sigma_0^2 C_q(s_1)(1 - s_2(t;\lambda)) \int_0^{\sqrt{\ln t}} \frac{du}{t-u} = \frac{\nu_1(t; s_1, \lambda)}{t}, \tag{27}$$

$$I_{14}(t; s_1, \lambda) \le \frac{1 - s_2(t;\lambda)}{(1-\kappa)\, C} \int_{t-\sqrt{\ln t}}^{t} \frac{du}{u} = \frac{\nu_4(t;\lambda)}{t}. \tag{28}$$

Вспоминая определение функции $\Delta_2(u, t; s_1, \lambda)$ и соотношение $\Phi'(s) \sim \sigma_0^2 s$ при $s \to 0$, убеждаемся, что для некоторых $\nu_2, \nu_3 \in \mathcal{U}$

$$I_{12}(t; s_1, \lambda) = \frac{\sigma_0^2 C_q(s_1)}{(1-\kappa)\, C} \int_{\sqrt{\ln t}}^{t - t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda)}{(t-u)u}\, du\, (1 + \nu_2(t; s_1, \lambda)), \tag{29}$$

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \frac{\sigma_0^2 C_q(s_1)}{(1-\kappa)\, C} \int_{t - t/\sqrt{\ln t}}^{t - \sqrt{\ln t}} \frac{\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda)}{(t-u)u}\, du\, (1 + \nu_3(t; s_1, \lambda)). \tag{30}$$

Исследуем поведение функции $I_{12}(t; s_1, \lambda)$ при $t \to \infty$. Легко видеть, что

$$\ln(t-u)/\ln t \to 1 \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{равномерно по} \quad u \in [\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t}]. \tag{31}$$

Далее, используя определения $\Delta_2(u, t; s_1, \lambda)$, $Q(u; s_1, s_2)$ и $s_2(t;\lambda)$, а также (18) и неравенство $1 - e^{-x} \le x,\ x \ge 0$, получаем, что равномерно по $u \in [\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t}]$

$$\begin{aligned} & |\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda) - \Delta_2(t-u, t-u; s_1, \lambda)| \\ \le\ & \mathsf{E}\left[1 - \exp\left\{-\frac{(1-\kappa)\, C\, \lambda\, Z_2(t-u)}{2\,\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\ln(t-u)} - \frac{1}{\ln t}\right)\right\}\right] \\ \le\ & \frac{(1-\kappa)\, C\, \lambda}{2\,\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t}\right) \mathsf{E} Z_2(t-u) = \frac{\nu_5(t;\lambda)}{\ln t}. \end{aligned} \tag{32}$$

Леммы 4 и 7 с учетом соотношений (29), (31) и (32) влекут

$$\begin{aligned} I_{12}(t; s_1, \lambda) &= \frac{C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{2\ln t} \int_{\sqrt{\ln t}}^{t - t/\sqrt{\ln t}} \frac{du}{u(t-u)} (1 + \nu_6(t; s_1, \lambda)) \\ &= \frac{C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{2t} (1 + \nu_7(t; s_1, \lambda)). \end{aligned} \tag{33}$$

Обратимся к изучению асимптотического по времени поведения функции $I_{13}(t; s_1, \lambda)$. В интеграле (30) перейдем к переменной x, совершив замену $u = t - t^x$. Тогда

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \frac{\sigma_0^2 C_q(s_1) \ln t}{(1-\kappa)\, C} \int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{1 - \ln\ln t/(2\ln t)} \frac{\Delta_2(t^x, t^x; s_1, \lambda x)}{t - t^x}\, dx\, (1 + \nu_3(t; s_1, \lambda)).$$

Поскольку

$$\frac{1}{t-t^x} \sim \frac{1}{t} \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{равномерно по} \quad x \in \left[\frac{\ln\ln t}{2\ln t}, 1 - \frac{\ln\ln t}{2\ln t}\right], \tag{34}$$

то с помощью лемм 4 и 7 находим

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \frac{C_q(s_1)\lambda}{t} \int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{1-\ln\ln t/(2\ln t)} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}+1}\, dx\, (1 + \nu_8(t; s_1, \lambda)).$$

Принимая во внимание равенство

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y}+1} = 2(\sqrt{1+y} - \ln(1+\sqrt{1+y})) + C \tag{35}$$

и представление (22), имеем

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \left(\frac{C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{t} + \frac{2C_q(s_1)\ln\varphi(\lambda)}{t}\right)(1 + \nu_9(t; s_1, \lambda)). \tag{36}$$

Теперь утверждение леммы следует из (14), (27), (28), (33) и (36).

Займемся поиском предела функции $I_2(t; 0, s_2(t;\lambda)) - I_2(t; s_1, s_2(t;\lambda))$ при $t \to \infty$. Применяя формулу Тейлора к функциям $\Phi(Q(u;0,s_2)) - \Phi(q(u;0))$, $\Phi(Q(u;s_1,s_2)) - \Phi(q(u;s_1))$, $\Phi(Q(u;0,s_2)) - \Phi(Q(u;s_1,s_2))$ и $\Phi(q(u;0)) - \Phi(q(u;s_1))$, получаем два представления:

$$\begin{aligned}
& \Phi(Q(u;0,s_2)) - \Phi(q(u;0)) - \Phi(Q(u;s_1,s_2)) + \Phi(q(u;s_1)) \\
= \ & \Phi'(q(u;0))[Q(u;0,s_2) - q(u;0)] \\
+ \ & \Phi''(\theta(u;0,s_2))[Q(u;0,s_2) - q(u;0)]^2/2 \\
- \ & \Phi'(q(u;s_1))[Q(u;s_1,s_2) - q(u;s_1)] \\
- \ & \Phi''(\theta(u;s_1,s_2))[Q(u;s_1,s_2) - q(u;s_1)]^2/2 \\
= \ & \Phi'(Q(u;s_1,s_2))[Q(u;0,s_2) - Q(u;s_1,s_2)] \\
+ \ & \Phi''(\vartheta(u;s_1,s_2))[Q(u;0,s_2) - Q(u;s_1,s_2)]^2/2 \\
- \ & \Phi'(q(u;s_1))[q(u;0) - q(u;s_1)] \\
- \ & \Phi''(\vartheta(u;s_1))[q(u;0) - q(u;s_1)]^2/2.
\end{aligned} \tag{37}$$

Здесь $\theta(u;s_1,s_2) \in [q(u;s_1), Q(u;s_1,s_2)]$ и $\vartheta(u;s_1,s_2) \in [Q(u;s_1,s_2), Q(u;0,s_2)]$, а $\vartheta(u;s_1)$ принадлежит отрезку $[q(u;s_1), q(u;0)]$, $u \geq 0$, s_1, $s_2 \in [0,1]$.

Из (37) при $s_2 = s_2(t;\lambda)$ вытекает, что

$$\begin{aligned}
& W(u,t;s_1,\lambda) := \Phi''(\theta(u;0,s_2(t;\lambda)))\Delta_1^2(u,t;\lambda)/2 \\
- \ & \Phi''(\theta(u;s_1,s_2(t;\lambda)))\Delta_2^2(u,t;s_1,\lambda)/2 \\
= \ & \Phi'(Q(u;s_1,s_2(t;\lambda)))[Q(u;0,s_2(t;\lambda)) - Q(u;s_1,s_2(t;\lambda))] \\
+ \ & \Phi''(\vartheta(u;s_1,s_2(t;\lambda)))[Q(u;0,s_2(t;\lambda)) - Q(u;s_1,s_2(t;\lambda))]^2/2 \\
- \ & \Phi'(q(u;s_1))[q(u;0) - q(u;s_1)] - \Phi''(\vartheta(u;s_1))[q(u;0) - q(u;s_1)]^2/2 \\
+ \ & \Phi'(q(u;s_1))\Delta_2(u,t;s_1,\lambda) - \Phi'(q(u;0))\Delta_1(u,t;\lambda).
\end{aligned} \tag{38}$$

В силу определения (26) имеем

$$I_2(t;0,s_2(t;\lambda)) - I_2(t;s_1,s_2(t;\lambda)) = \int_0^t W(t-u,t;s_1,\lambda)m(u)\,du. \tag{39}$$

Лемма 9 *При некоторых* $\nu_1,\ \nu_2 \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\ln t}} W(t-u,t;s_1,\lambda)m(u)\,du &= \frac{\nu_1(t;s_1,\lambda)}{t},\\ \int_{t-\ln t}^{t} W(t-u,t;s_1,\lambda)m(u)\,du &= \frac{\nu_2(t;s_1,\lambda)}{t}.\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что из (38) в силу лемм 3 и 4, неравенства $\Phi''(s) \le \sigma_0^2$ для $0 \le s \le 1$, а также соотношений (14) и (16) вытекает неравенство

$$|W(u,t;s_1,\lambda)| \le \varrho(t;s_1,\lambda)\left(1/(u\ln t) + 1/u^2\right),$$

справедливое при больших t, всех достаточно больших $u \le t$ и некоторой функции $\varrho \in \mathcal{L}$. Отсюда приходим к первому утверждению леммы, а именно,

$$\left|\int\limits_0^{\sqrt{\ln t}} W(t-u,t;s_1,\lambda)m(u)\,du\right| \le \varrho(t;s_1,\lambda) \int\limits_{t-\sqrt{\ln t}}^{t} \left[\frac{1}{u\,\ln t} + \frac{1}{u^2}\right] du = \frac{\nu_3(t;s_1,\lambda)}{t}.$$

Второе утверждение леммы является следствием определения $W(u,t;s_1,\lambda)$, неравенства $\Phi''(s) \le \sigma_0^2,\ 0 \le s \le 1$, леммы 3 и формулы (8). Действительно,

$$\left|\int_{t-\ln t}^{t} W(t-u,t;s_1,\lambda)\,m(u)\,du\right| \le \frac{(1-\kappa)\,C\,\lambda^2}{4\,\sigma_0^2\ln^2 t}\int_{t-\ln t}^{t}\frac{du}{u} = \frac{\nu_4(t;\lambda)}{t}.$$

Лемма 9 полностью доказана.

Лемма 10 *Равномерно по* $u \in [t/\sqrt{\ln t}, t]$, $s_1 \in [0,1]$ *и* $\lambda \in \mathsf{K}_\varepsilon$ *имеем*

$$\Psi(u,t;s_1,\lambda) - \Psi(u,u;s_1,\lambda) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Согласно определению $\Psi(u,t;s_1,\lambda)$, $Q(t;s_1,s_2)$ и $s_2(t;\lambda)$ для всех u из $[t/\sqrt{\ln t}, t-\sqrt{\ln t}]$ справедливы соотношения

$$|\Psi(u,u;s_1,\lambda) - \Psi(u,t;s_1,\lambda)| = \frac{1}{q(u)}\mathsf{E}\left[s_1^{Z_1(u)} - 0^{Z_1(u)}\right]\left[s_2(t;\lambda)^{Z_2(u)} - s_2(u;\lambda)^{Z_2(u)}\right]$$

$$\le \frac{1}{q(u)}\mathsf{E}\mathbb{I}(Z_1(u)>0)s_2(t;\lambda)^{Z_2(u)}\left[1-\exp\left\{-\frac{(1-\kappa)C\lambda\,Z_2(u)}{2\,\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t}\right)\right\}\right]. \quad (40)$$

Разобьем пространство исходов Ω на события $\{\omega : Z_2(u) > r(t)\}$ и $\{\omega : Z_2(u) \le r(t)\}$, где

$$r(t;\delta) := \delta\left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t}\right)^{-1},$$

а δ – некоторое положительное число. Заметим, что $r(t;\delta)/\ln t \to \infty,\ t \to \infty$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \ge t_0$ выполнено неравенство: $s_2(t;\lambda)^{r(t;\delta)} \le \varepsilon_0$ равномерно по $\lambda \in \mathsf{K}_\varepsilon$. Тогда продолжая цепочку неравенств (40), получаем

$$\begin{aligned}
&|\Psi(u,u;s_1,\lambda) - \Psi(u,t;s_1,\lambda)| \\
\le\ & \frac{1}{q(u)} \mathsf{E}\,\mathbb{I}(Z_1(u)>0, Z_2(u)>r(t;\delta))\, s_2(t;\lambda)^{r(t;\delta)} + \mathsf{E}\,\mathbb{I}(Z_1(u)>0, Z_2(u)\le r(t;\delta)) \\
\times\ & \left[1 - \exp\left\{-\frac{(1-\kappa)C\lambda\, r(t;\delta)}{2\,\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t}\right)\right\}\right](q(u))^{-1} \\
\le\ & \frac{\varepsilon_0}{q(u)} \mathsf{E}\,\mathbb{I}(Z_1(u)>0) + \frac{1 - e^{-(1-\kappa)C\lambda\delta/(2\,\sigma_0^2)}}{q(u)} \mathsf{E}\,\mathbb{I}(Z_1(u)>0) \le \varepsilon_0 + \frac{(1-\kappa)C\lambda\delta}{2\,\sigma_0^2}.
\end{aligned}$$

Поскольку число δ может быть выбрано сколь угодно малым, то последнее неравенство влечет утверждение леммы 10.

Лемма 11 *Равномерно по* $s_1 \in [0,1]$ *и* $\lambda \in \mathsf{K}_\varepsilon$

$$\frac{I_2(t;0,s_2(t;\lambda)) - I_2(t;s_1,s_2(t;\lambda))}{q(t;0)} + \frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2}\int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t})/\ln t} \Psi(t-t^x;s_1,\lambda)\,dx$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_{\ln\ln t/\ln t}^{1-\ln\ln t/(2\ln t)} \Psi(t^x;s_1,\lambda x)\varphi(\lambda x)\,dx \to 0, \quad t\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что формулы (38), $\Phi'(s) \sim \sigma_0^2 s$ и $\Phi''(s) \to \sigma_0^2$, $s \to 0+$, с помощью элементарных преобразований позволяют записать

$$W(u,t;s_1,\lambda) = -\frac{\sigma_0^2}{2}[\Delta_2^2(u,t;s_1,\lambda) - \Delta_1^2(u,t;\lambda)](1 + r(u,t;s_1,\lambda)), \tag{41}$$

где $r(u,t;s_1,\lambda) \to 0$ при $t\to\infty$ равномерно по $u \in [\ln t, t-\sqrt{\ln t}]$, $s_1 \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathsf{K}$.

Пусть $I_{21}(t;s_1,\lambda)$ и $I_{22}(t;s_1,\lambda)$–интегралы от $W(t-u,t;s_1,\lambda)m(u)/q(t)$, взятые соответственно по $u \in [\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t})$ и $u \in [t - t/\sqrt{\ln t}, t - \ln t)$. Тогда из представления (39) и леммы 9 следует, что для некоторой функции $\nu_1 \in \mathcal{U}$

$$\frac{I_2(t;0,s_2(t;\lambda)) - I_2(t;s_1,s_2(t;\lambda))}{q(t)} = I_{21}(t;s_1,\lambda) + I_{22}(t;s_1,\lambda) + \nu_1(t;s_1,\lambda). \tag{42}$$

Перейдем к изучению асимптотического поведения $I_{21}(t;s_1,\lambda)$ при $t\to\infty$. В силу лемм 4, 7 и 10, а также соотношений (8), (14), (31), (32) и (41), имеем при $\nu_1^\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$

$$I_{21}(t;s_1,\lambda) = -\frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2\ln t}\int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \Psi(t-u;s_1,\lambda)\frac{t}{u(t-u)}\,du + \nu_1^\varepsilon(t;s_1,\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2\ln t}\left[\int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Psi(t-u;s_1,\lambda)}{u}\,du + \int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Psi(t-u;s_1,\lambda)}{t-u}\,du\right] + \nu_1^\varepsilon(t;s_1,\lambda).$$

В первом и втором интегралах последнего выражения введем новую переменную x соответственно по формулам $u = t^x$ и $u = t - t^x$. Результатом этих преобразований будет соотношение

$$\frac{2I_{21}(t;s_1,\lambda)}{\lambda\varphi(\lambda)} + \left[\int\limits_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t})/\ln t} \Psi(t-t^x;s_1,\lambda)\,dx + \int\limits_{1-\ln\ln t/(2\ln t)}^{\ln(t-\sqrt{\ln t})/\ln t} \Psi(t^x;s_1,\lambda)\,dx\right] \to 0,$$

справедливое равномерно по $s_1 \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathsf{K}_\varepsilon$. В силу (15) функция $\Psi(t;s_1,\lambda)$ ограничена при $t > 0$, $s_1 \in [0,1]$, $\lambda \in \mathsf{K}$, а так как $1 - \ln\ln t/(2\ln t) \to 1$ и $\ln(t-\sqrt{\ln t})/\ln t \to 1$ при $t \to \infty$, то для некоторой функции $\nu_2^\varepsilon(t;s_1,\lambda) \in \mathcal{U}_\varepsilon$

$$I_{21}(t;s_1,\lambda) = -\frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2}\int_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t})/\ln t} \Psi(t-t^x;s_1,\lambda)\,dx + \nu_2^\varepsilon(t;s_1,\lambda). \tag{43}$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $I_{22}(t;s_1,\lambda)$ при $t \to \infty$. Соотношения (8), (14) и (41) позволяют утверждать, что величина

$$I_{22}(t;s_1,\lambda) + \frac{\sigma_0^2 t}{2(1-\kappa)C}\int\limits_{t-t/\sqrt{\ln t}}^{t-\ln t} \frac{\Psi(t-u,t;s_1,\lambda)}{u(t-u)}[\Delta_1(t-u,t;\lambda)+\Delta_2(t-u,t;s_1,\lambda)]\,du$$

стремится к нулю равномерно по $s_1 \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathsf{K}$. После замены переменных $u = t - t^x$ под знаком интеграла в последнем выражении, получаем, что величина

$$I_{22}(t;s_1,\lambda) + \frac{\sigma_0^2}{2(1-\kappa)C}\int\limits_{\ln\ln t/\ln t}^{1-\ln\ln t/(2\ln t)} \Psi(t^x;s_1,\lambda x)\frac{t\,\ln t}{t-t^x}\,[\Delta_1(t^x;\lambda x)+\Delta_2(t^x;s_1,\lambda x)]\,dx$$

сходится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по $s_1 \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathsf{K}$. С помощью лемм 4 и 7, а также соотношения (34) находим

$$I_{22}(t;s_1,\lambda) = -\frac{\lambda}{2}\int_{\ln\ln t/\ln t}^{1-\ln\ln t/(2\ln t)} \Psi(t^x;s_1,\lambda x)\varphi(\lambda x)\,dx + \nu_2(t;s_1,\lambda). \tag{44}$$

Сочетание (42), (43) и (44) завершает доказательство леммы 11.

Из лемм 8 и 11, а также соотношения (24) следует, что

$$\Psi(t;s_1,\lambda) = \left(\frac{3\lambda\varphi(\lambda)}{2} + 2\ln\varphi(\lambda)\right)\left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)}\right] \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\ln\ln t/\ln t}^{1-\ln\ln t/(2\ln t)} \Psi(t^x;s_1,\lambda x)\varphi(\lambda x)\,dx$$

$$-\frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2}\int\limits_{\ln\ln t/(2\ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t})/\ln t} \Psi(t-t^x;s_1,\lambda)\,dx + \nu^\varepsilon(t;s_1,\lambda), \quad \nu^\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon. \tag{45}$$

Рассмотрим интегральное уравнение относительно функции $\Psi(s_1,\lambda)$, где $s_1 \in [0,1]$ и $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Psi(s_1,\lambda) &= \left(\frac{3\lambda\varphi(\lambda)}{2} + 2\ln\varphi(\lambda)\right)\left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)}\right] \\ &- \frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2}\int_0^1 \Psi(s_1,\lambda)\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \Psi(s_1,\lambda x)\varphi(\lambda x)\,dx. \qquad (46)\end{aligned}$$

Лемма 12 *Функция* $\Psi(s_1,\lambda) = [1 - C_q(s_1)/C_q(0)]\,[1 - \varphi^3(\lambda)/(2-\varphi(\lambda))]$ *для* $s_1 \in [0,1]$ *и* $\lambda \geq 0$ *является единственным решением уравнения* (46).

Доказательство. Будем искать решение уравнения (46) в следующем виде:

$$\Psi(s_1,\lambda) = [1 - C_q(s_1)/C_q(0)]\,[1 - \theta(s_1,\lambda)],$$

где $\theta(s_1,\lambda),\ s_1 \in [0,1],\ \lambda \geq 0$, – неизвестная функция. Тогда с учетом (22) и (35) получаем уравнение относительно функции $\theta(s_1,\lambda)$, равносильное (46):

$$\theta(s_1,\lambda)[1 + \lambda\varphi(\lambda)/2] = 1 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \theta(s_1,\lambda\,x)\varphi(\lambda\,x)\,dx. \qquad (47)$$

После замены переменных $y = \lambda\,x$ в последнем интеграле, привлекая представление (22), перепишем (47) в виде

$$\theta(s_1,\lambda)[2 - \varphi(\lambda)]/\varphi(\lambda) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \theta(s_1,y)\varphi(y)\,dy.$$

Для дифференцируемой по λ функции $\theta(s_1,\lambda)$ последнее уравнение равносильно уравнению

$$\theta'_\lambda(s_1,\lambda) = \theta(s_1,\lambda)\left[-\sigma_0^2\frac{\varphi^2(\lambda)}{2-\varphi(\lambda)} - \left(\frac{2-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right)'\Big/\left(\frac{2-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right)\right] \qquad (48)$$

с начальным условием $\theta(s_1,0) = 1$. Заметим, что в силу (22) справедливо тождество $\varphi^2(\lambda)/[2-\varphi(\lambda)] = -\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$. Приходим к простому дифференциальному уравнению, решение которого с учетом начального условия имеет вид $\theta(s_1,\lambda) = \varphi^3(\lambda)/[2-\varphi(\lambda)]$. Тем самым находим решение уравнения (47). Единственность решения этого уравнения устанавливается аналогично лемме 4 из [17]. Лемма 12 доказана.

Снова применяя подход, изложенный в [52], несложно показать, что

$$\Psi(t;s_1,\lambda) \to \Psi(s_1,\lambda), \quad t \to \infty, \qquad (49)$$

равномерно по $s_1 \in [0,1]$ и $0 < \varepsilon \leq \lambda \leq \Lambda$, где $\sigma_0^2\Lambda < 1$. Тогда в силу (14), (15), (49) и леммы 12 при указанных s_1 и λ имеем

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left[s_1^{Z_1(t)}\exp\left\{-\frac{(1-\kappa)\,C\,\lambda Z_2(t)}{2\,\sigma_0^2\ln t}\right\}\middle|\, Z_1(t) > 0\right] \\ &\qquad = \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)}\right]\frac{\varphi^3(\lambda)}{2-\varphi(\lambda)}. \qquad (50)\end{aligned}$$

В последней формуле положим $s_1 = s_1(\lambda_1) = e^{-\lambda_1}$. Преобразование Лапласа вектора, составленного из неотрицательных случайных величин, является аналитической и ограниченной функцией в области $Re\,\lambda_1 > 0$, $Re\,\lambda_2 > 0$. Это же верно для функции

$$(1 - C_q(s_1(\lambda_1))/C_q(0))\varphi^3(\lambda)/(2-\varphi(\lambda)).$$

В силу теоремы единственности для аналитических функций соотношение (50) справедливо для всех λ_1, λ_2 с $Re\,\lambda_1 > 0$, $Re\,\lambda_2 > 0$. Теорема 3 полностью доказана.

3 Исследование времен достижения с запретом в модели случайного блуждания

Раздел посвящен исследованию новых объектов в рамках модели случайного блуждания с непрерывным временем по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, а именно, временам достижения с запретом. Точнее говоря, для любых точек $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $y \neq z$, определим функцию $H_{x,y,z}(t)$, $t \geq 0$, как (несобственную) функцию распределения момента первого достижения (или первого возвращения, когда $x = y$) точки y, если точкой старта случайного блуждания является состояние x, а точка z – запрещенное состояние. В данной работе мы находим предельное значение $H_{x,y,z}(\infty) = \lim_{t\to\infty} H_{x,y,z}(t)$ и анализируем асимптотическое поведение $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ для неразложимого, симметричного, однородного по пространству и времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков.

Наиболее интересным оказывается случай $d = 1$, поскольку тогда существует два совершенно различных вида асимптотического поведения функции $H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ в зависимости от того, является ли случайное блуждание простым или нет. Стоит также упомянуть, что для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, значение $H_{x,y,z}(\infty)$ лежит строго в интервале $(0, 1)$, а порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ определяется только размерностью d, независимо от значений x, y и z. При этом для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ именно взаимное расположение точек x, y и z задает как значение $H_{x,y,z}(\infty) \in [0, 1]$, так и порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$, когда $t \to \infty$.

Напомним, что свойства времен достижения (или, более общо, времен прохождения, включающих времена первого попадания в некоторое множество и последнего выхода из множества) и переходные вероятности с запретами для однородной марковской цепи изложены в [29] и [51] соответственно (про переходные вероятности с запрещениями см. также статью [22] и ссылки в ней). Аналог функции $H_{x,y,z}(\cdot)$ для однородной марковской цепи использовался и ранее (см., например, [10], с. 202, и [49], с. 31), но служил вспомогательным инструментом и не изучался сам по себе.

Отметим, что рассматриваемые в этом разделе задачи возникли при изучении ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$.

3.1 Основные результаты третьего раздела

Предполагается, что все случайные величины (заданные, как обычно, на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$) принимают значения в расширенной прямой $[-\infty, \infty]$.

Определение 1 *Пусть $\mathbb{P}$ – некоторая вероятностная мера на $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, и матрица $A = (a(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ такова, что ее элементы обладают свойствами: $a(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x,x) < 0$, $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y) = 0$ и $\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} |a(x,x)| < \infty$. Тогда марковская цепь $S = \{S(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем, пространством состояний $\mathbb{Z}^d$ (т.е. $S(t) : \Omega \to \mathbb{Z}^d$ для каждого $t \geq 0$), начальным распределением $\mathbb{P}$ и генератором A называется случайным блужданием по $\mathbb{Z}^d$.*

Существование такого процесса обеспечивает теорема 2 в [20], гл. 3, § 2. Далее мы рассматриваем только симметричное, однородное, неразложимое случайное блуждание

S с конечной дисперсией скачков, начальное распределение $\mathbb{P}$ которого сосредоточено в некоторой фиксированной точке решетки. *Симметрия* и *однородность* означают, что для $x, y \in \mathbb{Z}^d$ верны соотношения $a(x,y) = a(y,x)$ и $a(x,y) = a(\mathbf{0}, y-x) =: a(y-x)$ соответственно (здесь и далее символ $\mathbf{0}$ обозначает начало координат решетки $\mathbb{Z}^d$). Случайное блуждание называется *неразложимым*, если для любых состояний $x, y \in \mathbb{Z}^d$ найдется момент $t > 0$ такой, что $\mathsf{P}(S(t) = y | S(0) = x) > 0$, т.е. все точки решетки $\mathbb{Z}^d$ достижимы. Говорят, что случайное блуждание имеет *конечную дисперсию скачков*, если $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \|x\|^2 a(\mathbf{0}, x) < \infty$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Условия, налагаемые на элементы $a(x,y)$, позволяют использовать явную конструкцию случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с генератором A (см., например, теорему 1.2 в книге [38], гл. 9, раздел 1). Согласно этой конструкции случайный процесс S является скачкообразным процессом с непрерывными справа траекториями. Скачок процесса из состояния $x \in \mathbb{Z}^d$ в состояние $y \in \mathbb{Z}^d$, $x \neq y$, происходит с вероятностью $-a(x,y)/a(x,x)$ независимо от предшествующего развития S. Более того, для времен перехода $\tau^{(0)} := 0$ и $\tau^{(n)} := \inf\{t \geq \tau^{(n-1)} : S(t) \neq S(\tau^{(n-1)})\}$, $n \geq 1$, имеет место следующее утверждение. Случайные величины семейства $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ независимы, и каждая из них подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $a := -a(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. В дальнейшем рассматривается только модификация процесса S, построенная по указанной схеме.

Заметим, что по последовательности $\{\tau^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ можно ввести *вложенную марковскую цепь* $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, где $S_n := S(\tau^{(n)})$. Напомним, что $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – однородная дискретная марковская цепь с переходными вероятностями $a(x,y)/a$ при $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ (см., например, [38], гл. 8, раздел 4).

Приведем еще несколько фактов, касающихся введенного случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$. Пусть $p(t; x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, *переходные вероятности* случайного блуждания, т.е.

$$p(t; x, y) := \mathsf{P}(S(t+u) = y | S(u) = x) = \mathsf{P}(S(t) = y | S(0) = x)$$

для любого $u \geq 0$. Тогда при $u \to 0+$

$$\begin{aligned} p(u; x, y) &= a(x,y)u + o(u), \quad x \neq y, \\ p(u; x, x) &= 1 + a(x,x)u + o(u). \end{aligned}$$

Согласно [18] и [33], гл. 2, раздел 1, верно асимптотическое равенство

$$p(t; x, y) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad t \to \infty, \tag{51}$$

где

$$\gamma_d := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\det \phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0})|}} \quad \text{и} \quad \phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0}) := \left(\left.\frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right|_{\theta=\mathbf{0}} \right)_{i,j\in\{1,\ldots,d\}}.$$

В свою очередь,

$$\phi(\theta) := \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} a(\mathbf{0}, z)\cos(z, \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

и $(\cdot,\cdot)$ есть скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Кроме того, в монографии [33], гл. 2, раздел 1, установлено, что

$$p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t; x, y) \sim \frac{\tilde{\gamma}_d(y-x)}{t^{d/2+1}}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad t \to \infty, \tag{52}$$

где

$$\tilde{\gamma}_d(z) := \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\upsilon, z)^2 e^{\frac{1}{2}(\phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0})\upsilon,\upsilon)}\, d\upsilon, \quad z \in \mathbb{Z}^d.$$

Положим $G_\lambda(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t;x,y)\, dt$, $\lambda > 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, т.е. функция $G_\lambda(x,y)$ является преобразованием Лапласа переходной вероятности $p(\cdot;x,y)$. Как показано в [33], гл. 2, раздел 2, эта функция допускает представление

$$G_\lambda(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)}\, d\theta. \tag{53}$$

Учитывая соотношение (51), легко видеть, что при $d \geq 3$ *функция Грина* $G_0(x,y)$ конечна для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Однако при $d = 1$ или $d = 2$ имеем $\lim_{\lambda\to 0+} G_\lambda(x,y) = \infty$. Это явление согласуется с транзиентностью случайного блуждания при $d \geq 3$ и его возвратностью при $d = 1$ и $d = 2$ (более подробно см., например, [50], гл. 4, разделы 1 и 2).

Ввиду (52) функция $\lim_{\lambda\to 0+} (G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(x,y))$ конечна при всех $d \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно, можно положить

$$\rho_d(x) := \begin{cases} a \lim\limits_{\lambda\to 0+} (G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0},x)), & x \neq \mathbf{0}, \\ 1, & x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Равенство (53) влечет другую формулу для функции $\rho_d(x)$, если $x \neq \mathbf{0}$:

$$\rho_d(x) = \frac{a}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\cos(x,\theta) - 1}{\phi(\theta)}\, d\theta. \tag{54}$$

Введем еще ряд обозначений, необходимых для формулировки основных результатов данного раздела. Пусть $\tau := \inf\{t \geq 0 : S(t) \neq S(0)\}$, т.е. марковский момент τ (относительно естественной фильтрации случайного процесса S) есть время первого выхода из точки старта случайного блуждания. С учетом явной конструкции случайного блуждания имеем: $\tau = \tau^{(1)}$ п.н. и, как следствие, $G(t) := \mathsf{P}(\tau \leq t | S(0) = x) = 1 - e^{-at}$, $t \geq 0$.

Пусть

$$\tau_{y,z} := \inf\{t \geq \tau : S(t) = y, S(u) \neq z, \tau \leq u \leq t\} \quad \text{при} \quad y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z.$$

Как обычно, $\inf\{t \in \varnothing\} = \infty$. Назовем марковский момент $\tau_{y,z}$ *временем* (*первого*) *достижения состояния* y *с запретом в состоянии* z. Обозначим

$$H_{x,y,z}(t) := \mathsf{P}(\tau_{y,z} \leq t | S(0) = x), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z, \quad t \geq 0,$$

(несобственную) функцию распределения этого марковского момента при условии старта случайного блуждания в точке x.

Величина

$$\tau^-_{y,z} := \inf\{t \geq 0 : S(t+\tau) = y, S(u) \neq z, \tau \leq u \leq t+\tau\}, \quad y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z,$$

не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса S. При этом случайная величина $\tau^-_{y,z}$ может быть также названа *временем* (*первого*) *достижения состояния* y *с запретом в состоянии* z *после выхода из начального состояния*, поскольку в этом случае отсчет времени происходит не с момента старта процесса, а с момента первого выхода из стартового состояния. Аналогично полагаем

$$H^-_{x,y,z}(t) := \mathsf{P}(\tau^-_{y,z} \le t | S(0) = x), \quad x,y,z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \ne z, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, $\tau_{y,z} = \tau^-_{y,z} + \tau$ п.н. Кроме того, в силу строго марковского свойства случайного блуждания по отношению к марковскому моменту τ (см., например, [38], гл. 8, раздел 4) случайные величины $\tau^-_{y,z}$ и τ независимы. Поэтому $\tau_{y,z}$ имеет (несобственное) абсолютно непрерывное распределение как сумма двух случайных величин, одна из которых обладает плотностью. С другой стороны, явная конструкция марковской цепи S обнаруживает, что распределение $\tau^-_{y,z}$ имеет атом в нуле при $x \ne y$, а именно, $H^-_{x,y,z}(0) = a(x,y)/a$.

Отметим, что из тождеств $a(x,y) = a(x-y) = a(-x,-y)$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, следуют свойства функции $H_{x,y,z}$ такие, как однородность и инвариантность относительно отражений решетки $\mathbb{Z}^d$, т.е. если $r,x,y,z \in \mathbb{Z}^d$ и $y \ne z$, то

$$H_{x+r,y+r,z+r}(t) = H_{x,y,z}(t), \quad H_{-x,-y,-z}(t) = H_{x,y,z}(t), \quad t \ge 0. \tag{55}$$

Для $x,y \in \mathbb{Z}^d$, $y \ne \mathbf{0}$, зададим функции $C_d(x,y)$ с помощью формул:

$$\begin{aligned}
C_1(x,y) &:= \frac{\rho_1(y-x)+\rho_1(x)-\rho_1(y)}{4a\pi\gamma_1} \\
&+ \frac{a\pi y^2\gamma_1^3(\rho_1(y-x)-\rho_1(x)-\rho_1(y))}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi xy\gamma_1^3}{\rho_1(y)}, \\
C_2(x,y) &:= \frac{\rho_2(y-x)+\rho_2(x)-\rho_2(y)}{4a\gamma_2}, \\
C_d(x,y) &:= \frac{2\gamma_d(\rho_d(y-x)+\rho_d(x)-\rho_d(y))}{a(d-2)(G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})+G_0(\mathbf{0},y))^2}, \quad d \ge 3.
\end{aligned}$$

В следующих трех теоремах содержатся основные результаты раздела.

Теорема 4 *Пусть точки $x,y,z \in \mathbb{Z}^d$ таковы, что $y \ne z$. Тогда для случайного блуждания S по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, справедливы соотношения*

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{\rho_d(x-z)+\rho_d(y-z)-\rho_d(y-x)}{2\rho_d(y-z)} \in (0,1), \quad d=1 \quad \text{или} \quad d=2, \tag{56}$$

а при $d \ge 3$

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})G_0(x,y)-G_0(x,z)G_0(y,z)}{G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0})-G_0^2(y,z)} \in (0,1),\ x \ne y,\ x \ne z, \tag{57}$$

$$H_{y,y,z}(\infty) = 1 - \frac{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})}{a(G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0})-G_0^2(y,z))} \in (0,1), \tag{58}$$

$$H_{z,y,z}(\infty) = \frac{G_0(y,z)}{a(G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0})-G_0^2(y,z))} \in (0,1). \tag{59}$$

Более того, при $t \to \infty$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_1(x-z,y-z)}{\sqrt{t}}, \quad d=1, \tag{60}$$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_2(x-z,y-z)}{\ln t}, \quad d=2, \tag{61}$$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_d(x-z,y-z)}{t^{d/2-1}}, \quad d \ge 3, \tag{62}$$

где $C_d(\cdot,\cdot)$, $d \in \mathbb{N}$, – положительные функции, определенные выше.

Теорема 5 *Если S – простое случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ и $x, y, z \in \mathbb{Z}$ таковы, что $y \neq z$, то*

$$1 - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{\sqrt{2}\,|y-x|}{\sqrt{a\,\pi}\,\sqrt{t}}, \qquad x < y < z \quad \text{или} \quad z < y < x, \tag{63}$$

$$1 - \frac{1}{2|y-z|} - H_{y,y,z}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\,a\,\pi}\,\sqrt{t}}, \tag{64}$$

$$\frac{x-z}{y-z} - H_{x,y,z}(t) = o(e^{-a\,\varepsilon\,t}), \qquad z < x < y \quad \text{или} \quad y < x < z, \tag{65}$$

$$\frac{1}{2|y-z|} - H_{z,y,z}(t) = o(e^{-a\,\varepsilon\,t}), \tag{66}$$

$$H_{x,y,z}(t) \equiv 0, \qquad x < z < y \quad \text{или} \quad y < z < x, \tag{67}$$

для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$.

Теорема 6 *Утверждения теорем 1 и 2 останутся верными, если функцию $H_{x,y,z}$ в левых частях соотношений (56)–(67) заменить на функцию $H^-_{x,y,z}$, в то время как правые части этих формул оставить неизменными.*

Теоремы 4 и 5 установлены в разделах 3.3 и 3.4 соответственно. Доказательства основаны на применении преобразований Лапласа и Лапласа-Стилтьеса к основным уравнениям, содержащим как функции $H_{x,y,z}$ и $H_{x,z,y}$, так и функции $H_{x,y}$, $H_{z,y}$, $H_{x,z}$ и $H_{y,z}$. Здесь $H_{x,y}(t)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, есть (несобственная) функция распределения времени (первого) достижения точки y, если точка старта блуждания находилась в x. Далее используется аппарат тауберовых теорем, а при достаточно высоких размерностях d важную роль играют вспомогательные результаты теории восстановления (см. §3 статьи [18]). Существенная трудность, возникающая на этом пути, заключается в проверке положительности функций $C_d(x,y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, при выполнении условий теоремы 4. Теорема 6 получена в разделе 3.5 как следствие теорем 4 и 5.

3.2 Вспомогательные утверждения

Для неотрицательной функции $\kappa(t)$ и неотрицательной неубывающей функции $\chi(t)$, $t \geq 0$, положим

$$\hat{\kappa}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\kappa(t)\,dt, \quad \check{\chi}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,d\chi(t), \quad \lambda > 0,$$

если несобственные интегралы в правых частях равенств существуют. Напомним полезное соотношение между преобразованием Лапласа-Стилтьеса ограниченной функции $\chi(t)$ и преобразованием Лапласа функции $\chi(\infty) - \chi(t)$, где $\chi(\infty) := \lim_{t\to\infty}\chi(t)$, а именно,

$$(\chi\widehat{(\infty) -} \chi)(\lambda) = \frac{\chi(\infty) - \check{\chi}(\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{68}$$

Это тождество следует из формулы интегрирования по частям.

Введем марковский момент $\tau_y := \inf\{t \geq \tau : S(t) = y\}$, который будем называть *временем (первого) достижения точки* $y \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим его функцию распределения при условии, что случайное блуждание стартовало в точке x, как

$$H_{x,y}(t) := \mathsf{P}(\tau_y \leq t | S(0) = x), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad t \geq 0.$$

Предельное значение $H_{x,y}(\infty) := \lim_{t\to\infty} H_{x,y}(t)$ и асимптотическое поведение функции $H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t)$ при $t \to \infty$ были найдены в статьях [5], [18], [39], [40] и [53] при $y = \mathbf{0}$ и $x \in \mathbb{Z}^d$. В силу однородности случайного блуждания эти результаты легко сформулировать в более общем виде.

Лемма 13 *Пусть* $x, y \in \mathbb{Z}^d$. *Тогда*

$$H_{x,y}(\infty) = 1 \qquad \textit{при} \qquad d = 1 \quad \textit{и} \quad d = 2, \tag{69}$$

$$H_{x,x}(\infty) = 1 - \frac{1}{a\,G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})} \qquad \textit{при} \qquad d \geq 3, \tag{70}$$

$$H_{x,y}(\infty) = \frac{G_0(x,y)}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})} \qquad \textit{при} \qquad d \geq 3 \quad \textit{и} \quad y \neq x. \tag{71}$$

Более того, при $t \to \infty$, *справедливы соотношения*

$$1 - H_{x,y}(t) \sim \frac{\rho_1(y-x)}{a\,\gamma_1\,\pi\,\sqrt{t}} \qquad \textit{при} \qquad d = 1, \tag{72}$$

$$1 - H_{x,y}(t) \sim \frac{\rho_2(y-x)}{a\,\gamma_2\,\ln t} \qquad \textit{при} \qquad d = 2, \tag{73}$$

$$H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t) \sim \frac{2\gamma_d\,\rho_d(y-x)}{a\,(d-2)\,G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0})\,t^{d/2-1}} \qquad \textit{при} \qquad d \geq 3.$$

Из доказательства этой леммы приведем только два соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\check{H}_{x,x}(\lambda) = 1 - \frac{\widehat{(1-G)}(\lambda)}{G_\lambda(x,x)} = 1 - \frac{\widehat{(1-G)}(\lambda)}{G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \check{H}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\lambda), \tag{74}$$

$$\check{H}_{x,y}(\lambda) = \frac{G_\lambda(x,y)}{G_\lambda(y,y)} = \frac{G_\lambda(x-y,\mathbf{0})}{G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \frac{G_\lambda(y-x,\mathbf{0})}{G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \check{H}_{x-y,\mathbf{0}}(\lambda) = \check{H}_{y-x,\mathbf{0}}(\lambda). \tag{75}$$

В следующей лемме выводится линейное интегральное уравнение относительно функций $H_{x,y,z}(t)$ и $H_{x,z,y}(t)$, которое является основой доказательства теорем 4 и 5.

Лемма 14 *Пусть* $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ *и* $y \neq z$. *Тогда имеет место уравнение*

$$H_{x,y}(t) = H_{x,y,z}(t) + \int_0^t H_{z,y}(t-u)\,dH_{x,z,y}(u), \quad t \geq 0. \tag{76}$$

Доказательство. Величины τ_y и $\tau_{y,z}$ совпадают п.н. на событии $\{\tau_{y,z} < \infty\}$ в силу их определения, т.е. $\tau_y \mathbb{I}(\tau_{y,z} < \infty) = \tau_{y,z}\mathbb{I}(\tau_{y,z} < \infty)$ п.н. Поэтому $\{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} \leq t\} = \{\tau_{y,z} \leq t\}$ для каждого неотрицательного t. Более того, видим, что $\tau_y \mathbb{I}(\tau_{z,y} < \infty) \geq \tau_{z,y}\mathbb{I}(\tau_{z,y} < \infty)$ п.н. Следовательно,

$$\{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} > t\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} = \infty\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{z,y} < \infty\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{z,y} \leq t\}$$

для каждого $t \geq 0$. Эти соотношения позволяют написать

$$\begin{aligned} H_{x,y}(t) &= \mathsf{P}(\tau_y \leq t, \tau_{y,z} \leq t | S(0) = x) + \mathsf{P}(\tau_y \leq t, \tau_{y,z} > t | S(0) = x) \\ &= \mathsf{P}(\tau_{y,z} \leq t | S(0) = x) + \mathsf{P}(\tau_y \leq t, \tau_{z,y} \leq t | S(0) = x) \\ &= H_{x,y,z}(t) + \int_0^t \mathsf{P}(\tau_y \leq t | \tau_{z,y} = u, S(0) = x)\, dH_{x,z,y}(u). \end{aligned}$$

Обращаясь к определениям τ_y и $\tau_{z,y}$, а также к определению марковской цепи, проверяем, что $\mathsf{P}(\tau_y \leq t | \tau_{z,y} = u, S(0) = x) = \mathsf{P}(\tau_y \leq t - u | S(0) = z)$. Предыдущие рассуждения вместе с этим равенством приводят к искомому утверждению. Лемма 14 доказана.

Полученное уравнение имеет естественную интерпретацию. А именно, левая часть уравнения (76) отвечает траекториям случайного блуждания, стартующим в точке x и достигающим точки y до момента t. Каждая такая траектория принадлежит одному из двух типов. Траектории первого типа не проходят через точку z прежде, чем достигнут точки y. Они учитываются первым слагаемым в правой части уравнения (76). Что касается траектории второго типа, то она достигает точки z в момент u, $0 \leq u \leq t$, прежде, чем достигнет точки y так, что часть траектории после достижения точки z – это путь, начинающийся в точке z и достигающий точки y до момента $t - u$. Второе слагаемое в правой части уравнения (76) отвечает траекториям второго типа.

Получим следствие леммы 14, в котором дается преобразование Лапласа-Стилтьеса решения уравнения (76).

Следствие 1 *Если $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ и $y \neq z$, то для любого $\lambda > 0$ справедливо представление*

$$\check{H}_{x,y,z}(\lambda) = \frac{\check{H}_{x,y}(\lambda) - \check{H}_{x,z}(\lambda)\check{H}_{z,y}(\lambda)}{1 - \check{H}_{z,y}(\lambda)\check{H}_{y,z}(\lambda)}. \tag{77}$$

Доказательство. В силу леммы 14 имеется система двух линейных интегральных уравнений относительно функций $H_{x,y,z}(t)$ и $H_{x,z,y}(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} H_{x,y}(t) &= H_{x,y,z}(t) + H_{x,z,y} * H_{z,y}(t), \\ H_{x,z}(t) &= H_{x,z,y}(t) + H_{x,y,z} * H_{y,z}(t). \end{aligned} \right.$$

Применение преобразования Лапласа-Стилтьеса к каждому уравнению системы приводит к новой системе алгебраических уравнений относительно функций $\check{H}_{x,y,z}(\lambda)$ и $\check{H}_{x,z,y}(\lambda)$

$$\left\{ \begin{aligned} \check{H}_{x,y}(\lambda) &= \check{H}_{x,y,z}(\lambda) + \check{H}_{x,z,y}(\lambda)\check{H}_{z,y}(\lambda), \\ \check{H}_{x,z}(\lambda) &= \check{H}_{x,z,y}(\lambda) + \check{H}_{x,y,z}(\lambda)\check{H}_{y,z}(\lambda). \end{aligned} \right.$$

Решая эту систему, получаем представление (77). Что и требовалось доказать.

Для установления теоремы 4 нам также понадобится следующая лемма. Ее доказательство основано на рассмотрении всех возможных скачков случайного блуждания после времени ожидания τ.

Лемма 15 *Для точек $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $y \neq z$, имеем*

$$H^-_{x,y,z}(\infty) - H^-_{x,y,z}(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^d, r \neq x, r \neq y, r \neq z} \frac{a(x,r)}{a}\,(H_{r,y,z}(\infty) - H_{r,y,z}(t)), \quad t \geq 0. \tag{78}$$

Доказательство. Ввиду определений случайных величин τ и $\tau^-_{y,z}$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} & H^-_{x,y,z}(\infty) - H^-_{x,y,z}(t) = \mathsf{P}(t < \tau^-_{y,z} < \infty | S(0) = x) \\ = & \sum_{r\in\mathbb{Z}^d, r\notin\{x,y,z\}} \mathsf{P}(t < \tau^-_{y,z} < \infty, S(\tau) = r | S(0) = x) \\ = & \sum_{r\in\mathbb{Z}^d, r\notin\{x,y,z\}} \mathsf{P}(S(\tau) = r | S(0) = x)\mathsf{P}(t < \tau^-_{y,z} < \infty | S(\tau) = r, S(0) = x). \end{aligned}$$

Здесь $\mathsf{P}(t < \tau^-_{y,z} < \infty | S(\tau) = r, S(0) = x) = \mathsf{P}(t < \tau_{y,z} < \infty | S(0) = r)$ в силу равенства $\tau_{y,z} = \tau + \tau^-_{y,z}$ п.н. и благодаря строго марковскому свойству случайного блуждания относительно момента остановки τ (см., например, [38], гл. 8, раздел 4). Более того, в соответствии с явной конструкцией марковской цепи S соотношение $\mathsf{P}(S(\tau) = r | S(0) = x) = a(x,r)/a$ также справедливо. Объединяя полученные равенства с предыдущими рассуждениями, приходим к соотношению (78). Лемма 15 доказана.

Последний вспомогательный результат будет полезен при доказательстве теоремы 5.

Лемма 16 *Для каждого числа $x \in \mathbb{N}$ имеет место следующее равенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos x\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta = 2\pi x.$$

Для получения этого утверждения достаточно переписать данный интеграл в виде интеграла Фейера, см., например, [27], гл. 9, §3.

3.3 Анализ времен достижения с запретом в общем случае

Данный раздел посвящен установлению теоремы 4. Во-первых, ввиду однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно доказать эту теорему для $z = \mathbf{0}$. Во-вторых, нам придется рассматривать отдельно случаи $d = 1$, $d = 2$ и $d \geq 3$, поскольку ее доказательство существенно зависит от размерности d. Прежде чем перейти к непростому случайному блужданию по $\mathbb{Z}$, приведем несколько формул, имеющих один и тот же вид для всех размерностей $d \in \mathbb{N}$.

Пусть $x, y \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ и $x \neq y$. Используя тождества (68), (74), (75) и (77), а также вспоминая, что $\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - G(t))\, dt = (\lambda + a)^{-1}$, $\lambda \geq 0$, выводим следующие соотношения:

$$(H_{x,y,\mathbf{0}}\widehat{(\infty) -} H_{x,y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{G_\lambda(x,y)G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0},x)G_\lambda(\mathbf{0},y)}{(G^2_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G^2_\lambda(\mathbf{0},y))\lambda}, \tag{79}$$

$$(H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}\widehat{(\infty) -} H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{G_\lambda(\mathbf{0},y)}{(G^2_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G^2_\lambda(\mathbf{0},y))(\lambda+a)\lambda}, \tag{80}$$

$$(H_{y,y,\mathbf{0}}\widehat{(\infty) -} H_{y,y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{y,y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})}{(G^2_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G^2_\lambda(\mathbf{0},y))(\lambda+a)\lambda}. \tag{81}$$

3.3.1 Случай $d = 1$

В этом подразделе мы сосредоточимся на непростом случайном блуждании по $\mathbb{Z}$, хотя некоторые рассуждения будут справедливыми и для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Вначале найдем значение $H_{x,y,0}(\infty)$ при $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, с помощью формулы $H_{x,y,0}(\infty) = \lim_{\lambda \to 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$. С этой целью выпишем асимптотическое представление функции $\check{H}_{0,r}(\lambda)$, $r \in \mathbb{Z}$,

$$\check{H}_{0,r}(\lambda) = 1 - \frac{\rho_1(r)\sqrt{\lambda}}{a\,\gamma_1\sqrt{\pi}} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to 0+, \tag{82}$$

которое в силу равенства (68) получается в результате применения тауберовой теоремы (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5) к соотношению (72). Подставляя (82) в (77) и учитывая однородность функции $H_{x,y}$, вычисляем $\lim_{\lambda \to 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$ и, следовательно, приходим к формуле для значения $H_{x,y,0}(\infty)$, которая также верна и при рассмотрении простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Однако, для завершения доказательства соотношения (56) при $d = 1$, нам остается показать, что $H_{x,y,0}(\infty) \in (0,1)$. Отметим, что ввиду равенства (69) уравнение (76) влечет эквивалентности $H_{x,y,0}(\infty) = 0 \Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 1$ и $H_{x,y,0}(\infty) = 1 \Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 0$. Следовательно, для проверки утверждения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0,1)$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, достаточно установить, что $H_{x,y,0}(\infty) > 0$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. В свою очередь, последнее справедливо, если, например, соотношение (60) имеет место при $C_1(x,y) > 0$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. Таким образом, исходная задача обоснования соотношения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0,1)$ сводится к доказательству формулы (60) и демонстрации положительности функции $C_1(\cdot,\cdot)$. Остальная часть подраздела посвящена проверке этих двух утверждений.

Доказательство соотношения (60) основано на формулах (79) – (81), в которые подставляются асимптотические выражения (при $\lambda \to 0+$) функций $G_\lambda(0,0)$ и $G_\lambda(0,0) - G_\lambda(0,r)$ для $r = x$, $r = y$ и $r = y - x$. Предельное поведение функции $G_\lambda(0,0)$ при $d = 1$, вытекающее из соотношения (51) в силу тауберовой теоремы (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5), имеет вид

$$G_\lambda(0,0) = \frac{\gamma_1\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to 0+. \tag{83}$$

Более того, обращаясь к той же тауберовой теореме, заключаем, что

$$G_\lambda(0,0) - G_\lambda(0,r) = a^{-1}\rho_1(r) - 2\sqrt{\pi}\,\tilde{\gamma}_1(r)\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to 0+, \quad r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{84}$$

В самом деле, $a^{-1}\rho_1(r) = \int_0^\infty (p(t;0,0) - p(t;0,r))\,dt < \infty$ ввиду соотношения (52) и цепочки равенств

$$\begin{aligned} G_\lambda(0,0) - G_\lambda(0,r) - a^{-1}\rho_1(r) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(p(t;0,0) - p(t;0,r))\,dt - a^{-1}\rho_1(r) \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_0^t (p(u;0,0) - p(u;0,r))\,du\right)dt - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} a^{-1}\rho_1(r)\,dt \\ &= -\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_t^\infty (p(u;0,0) - p(u;0,r))\,du\right)dt. \end{aligned} \tag{85}$$

Здесь

$$\int_t^\infty (p(u;0,0) - p(u;0,r))\,du \sim \frac{2\tilde{\gamma}_1(r)}{\sqrt{t}}, \quad t \to \infty,$$

согласно формуле (52) и теореме 31 в [16]. Теперь подставим асимптотическое равенство (84) и формулу для $H_{x,y,0}(\infty)$, возникающую в соотношении (56), в равенства (79)–(81). После приведения подобных членов подставим соотношение (83) в полученные формулы. Опуская громоздкие выкладки, получаем, что

$$(H_{x,y,0}\widehat{(\infty) -} H_{x,y,0})(\lambda) \sim \frac{\rho_1(x)+\rho_1(y-x)-\rho_1(y)}{4\,a\,\sqrt{\pi}\,\gamma_1\sqrt{\lambda}}$$
$$+\quad \frac{a\sqrt{\pi}\,(\rho_1(y)\tilde{\gamma}_1(x)+\rho_1(y-x)\tilde{\gamma}_1(y)-\rho_1(x)\tilde{\gamma}_1(y)-\rho_1(y)\tilde{\gamma}_1(y-x))}{\rho_1^2(y)\,\sqrt{\lambda}}$$

для $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, и $\lambda \to 0+$. Это соотношение может быть переписано в следующем виде

$$(H_{x,y,0}\widehat{(\infty) -} H_{x,y,0})(\lambda) \sim \frac{C_1(x,y)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \to 0+, \tag{86}$$

если справедливо равенство $\tilde{\gamma}_1(r) = \pi r^2 \gamma_1^3$, $r \in \mathbb{Z}$. Последнее верно в силу определений γ_1 и $\tilde{\gamma}_1(r)$, поскольку $\gamma_1 = 1/\sqrt{-2\pi\phi''(0)}$ и

$$\tilde{\gamma}_1(r) = \frac{r^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \upsilon^2 e^{\phi''(0)\,\upsilon^2/2}\,d\upsilon = \frac{r^2\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2}\,du}{-4\pi\phi''(0)\sqrt{-\phi''(0)}} = \frac{r^2}{-2\phi''(0)\sqrt{-2\pi\phi''(0)}}.$$

Здесь мы учли, что замена переменной $u = \upsilon\sqrt{-\phi''(0)}$ сводит интегрирование к общеизвестному равенству $\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$. Отметим, что соотношение (86) имеет место также для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Однако в этом случае функция $C_1(x,y)$ принимает неотрицательные (не строго положительные) значения.

Если $C_1(x,y) > 0$, то применение тауберовой теоремы (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5) к соотношению (86) приводит к желаемому асимптотическому равенству (60). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 4 при $d = 1$ нам остается только проверить положительность функции $C_1(x,y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

Ввиду формулы (55) достаточно ограничиться рассмотрением случая $y > 0$. Тогда существует три возможных расположения точек x, y и 0, а именно, $x \geq y$, $0 \leq x < y$ и $x < 0$. Вначале рассмотрим случай $x \geq y$. Чтобы проверить положительность функции $C_1(x,y)$ для таких точек x и y, найдем ее оценку снизу. Для этого заметим, что

$$\rho_1(x)+\rho_1(y-x)-\rho_1(y) \geq 0$$

в силу формулы для значения $H_{y,x,0}(\infty)$, возникающей в соотношении (56), и очевидного неравенства $H_{y,x,0}(\infty) \leq 1$. Ясно, что $C_1(0,y) \geq 0$, и поэтому $\rho_1^2(y) - 4a^2\pi^2y^2\gamma_1^4 \geq 0$. Объединяя эти неравенства, мы видим, что при $x \geq y$

$$C_1(x,y) = \frac{(\rho_1(x)+\rho_1(y-x)-\rho_1(y))(\rho_1^2(y)-4a^2\pi^2y^2\gamma_1^4)}{4\,a\,\pi\,\rho_1^2(y)\,\gamma_1}$$

$$+\frac{2\rho_1(y-x)a\pi y^2\gamma_1^3}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi\gamma_1^3 y(x-y)}{\rho_1(y)} \geq \frac{2\rho_1(y-x)a\pi y^2\gamma_1^3}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi\gamma_1^3 y(x-y)}{\rho_1(y)} > 0.$$

Прежде чем перейти к случаю $0 \leq x < y$, выведем еще одно полезное соотношение. Напомним, что $\tau_{y,0} \geq \tau_{y,0}^-$ п.н., так как $\tau_{y,0} = \tau_{y,0}^- + \tau$ п.н. Поскольку величина τ распределена по экспоненциальному закону, то $\mathsf{P}(\tau_{y,0} < \infty) = \mathsf{P}(\tau_{y,0}^- < \infty)$. Поэтому

$\mathsf{P}(t < \tau_{y,0} < \infty) \geq \mathsf{P}(t < \tau^-_{y,0} < \infty)$ и, тем самым, $H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) \geq H^-_{x,y,0}(\infty) - H^-_{x,y,0}(t)$. Из леммы 15 и свойства монотонности преобразования Лапласа следует, что

$$(H_{x,y,0}\widehat{(\infty) -} H_{x,y,0})(\lambda) \geq \sum_{r\in\mathbb{Z}, r\notin\{x,y,0\}} \frac{a(x,r)}{a}(H_{r,y,0}\widehat{(\infty) -} H_{r,y,0})(\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{87}$$

Теперь обратимся к случаю $0 \leq x < y$. Проверим положительность функции $C_1(x,y)$ последовательно для $x = y-1$, $x = y-2$, …, $x = 0$. Если $x = y-1$, то существует точка $r > y$ такая, что $a(y-1,r) > 0$, так как иначе случайное блуждание является простым. Следовательно, в силу соотношения (86) и выше установленного неравенства $C_1(r,y) > 0$, $0 < y < r$, в правой части равенства (87) найдется слагаемое порядка $1/\sqrt{\lambda}$. Тогда из асимптотического равенства (86) вытекает, что левая часть представления (87) также имеет порядок $1/\sqrt{\lambda}$, $\lambda \to 0+$, и, тем самым, неравенство $C_1(y-1,y) > 0$ при $y > 0$ доказано. Напомним, что рассматриваемое случайное блуждание неразложимо, т.е. наибольший общий делитель всех значений $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ таких, что $a(r) > 0$, равняется 1 (см. [3], гл. 13, § 3). Это означает, что при $x = y-2$ существует точка $r > y$ или $r = y-1$ такая, что $a(y-2,r) > 0$. Поскольку для указанных значений r мы выше установили положительность функции $C_1(r,y)$, то ввиду соотношения (86) делаем вывод, что левая часть равенства (87) имеет порядок роста $1/\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \to 0$. Поэтому заключаем, что $C_1(y-2,y) > 0$ при $y > 0$. Последовательно рассматривая случаи $x = y-3$, $x = y-4$, …, $x = 0$, мы доказываем в соответствии с описанной схемой, что $C_1(x,y) > 0$ для всех значений $x \in [0,y)$, $x \in \mathbb{Z}$.

Случай $x < 0 < y$ разбирается тоже с помощью косвенных методов, поскольку непосредственная оценка функции $C_1(x,y)$ для таких значений x и y вызывает трудности. Мы последовательно рассматриваем ситуации $x = -1$, $x = -2$, …. Вначале предположим, что для случайного блуждания S существуют хотя бы три точки $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ и $r_3 > 0$ такие, что $a(r_1) > 0$, $a(r_2) > 0$ и $a(r_3) > 0$. Если $x = -1$, то в правой части равенства (87) найдется по крайней мере одно слагаемое с индексом r, где $r > 0$, $r \neq y$ и $a(-1,r) > 0$. Аналогично предыдущим рассуждениям заключаем, что левая часть соотношения (87) имеет порядок роста $1/\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \to 0+$ и, тем самым, $C_1(-1,y) > 0$. Если $x = -2$, то в правой части равенства (87) найдется по крайней мере одно слагаемое с индексом $r = -1$ или $r > 0$ такое, что $r \neq y$ и $a(-2,r) > 0$. Поскольку для таких значений r положительность функции $C_1(r,y)$ установлена выше, то в силу формул (86) и (87) приходим к выводу, что $C_1(-2,y) > 0$. Положительность функции $C_1(x,y)$ при $x = -3$, $x = -4$, … проверяется аналогично.

Продолжим разбирать случай $x < 0 < y$, предполагая теперь, что найдутся ровно две точки $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ такие, что $a(r_1) > 0$ и $a(r_2) > 0$. Пусть $x = -1$. Если существует точка $r > 0$, $r \neq y$, такая, что $a(-1,r) > 0$ (т.е. $r_1 = r+1$ или $r_2 = r+1$), то с учетом соотношений (86) и (87), а также в силу установленного неравенства $C_1(r,y) > 0$, получаем искомую оценку $C_1(-1,y) > 0$. В противном случае имеем $r_1 = 1$ и $r_2 = y+1$. Если $y > 1$, то $a(-2,y-1) = a(y+1) > 0$ и, как следствие, $C_1(-2,y) > 0$ ввиду формул (86), (87) и доказанного ранее неравенства $C_1(y-1,y) > 0$. Поэтому, если $r_1 = 1$, $r_2 = y+1$ и $y > 1$, то выводим оценку $C_1(-1,y) > 0$ с помощью соотношений (86) и (87), а также равенства $a(-1,-2) = a(1) > 0$ и только что проверенного неравенства $C_1(-2,y) > 0$. Однако для случая $r_1 = 1$, $r_2 = y+1$ и $y = 1$ предыдущие рассуждения не годятся, и мы вынуждены обратиться к следующим известным фактам, относящимся к вложенной марковской цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Для этой вложенной цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ определим марковский момент

$$T := \min\{n > 0 : S_n \geq -1\}.$$

Согласно теоремам 15.1 и 15.2 из [1] справедливы формулы

$$\mathsf{P}(T < \infty | S(0) = -1) = 1, \quad \mathsf{P}(T > n | S(0) = -1) \sim \frac{c}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty, \tag{88}$$

где c есть некоторая положительная постоянная.

Для краткости будем писать $\mathsf{P}_{-1}(\cdot) := \mathsf{P}(\cdot | S(0) = -1)$. Поскольку предполагается, что $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$, то случайный процесс $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ может совершать скачки величины 1 или 2. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{-1}(T = n, S_n = -1) &= \mathsf{P}_{-1}(T = n, S_{n-1} = -2, S_n = -1) \\
&+ \mathsf{P}_{-1}(T = n, S_{n-1} = -3, S_n = -1) \\
&= \mathsf{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -2, S_n = -1) \\
&+ \mathsf{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -3, S_n = -1) \\
&= \frac{a(-2,-1)}{a} \mathsf{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -2) \\
&+ \frac{a(-3,-1)}{a} \mathsf{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -3) \\
&\geq \frac{\min\{a(1), a(2)\}}{a} \mathsf{P}_{-1}(T = n).
\end{aligned} \tag{89}$$

Вернемся к оценке функции $H_{-1,1,0}(\infty) - H_{-1,1,0}(t) = \mathsf{P}_{-1}(t < \tau_{1,0} < \infty)$ снизу при $t \to \infty$. Обозначим $N = \{N(t), t \geq 0\}$ пуассоновский процесс, построенный с помощью случайной последовательности $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. N – пуассоновский процесс интенсивности a. Рассматривая все возможные скачки случайного блуждания S, учитывая соотношение (89) и вспоминая явную конструкцию марковской цепи S, выводим

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{-1}(t < \tau_{1,0} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(\tau_{1,0} = \tau^{(n)}, t < \tau_{1,0} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(S_k \neq 0, S_k \neq 1, 0 < k < n, S_n = 1, t < \tau^{(n)} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(S_k \leq -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1, S_n = 1, N(t) < n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(S_k \leq -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1, S_n = 1) \mathsf{P}(N(t) < n) \\
&\geq \frac{a(-1,1)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1) \mathsf{P}(N(t) < n) \\
&= \frac{a(2)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{-1}(T = n-1, S_{n-1} = -1) \mathsf{P}(N(t) < n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \quad \frac{a(2)\min\{a(1),a(2)\}}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}_{-1}(T=n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-at}(at)^k}{k!} \\
&= \quad \frac{a(2)\min\{a(1),a(2)\}}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}_{-1}(T\geq k)\frac{e^{-at}(at)^k}{k!}. \qquad (90)
\end{aligned}
$$

Таким образом, поиск оценки снизу для $\mathsf{P}_{-1}(t<\tau_{1,0}<\infty)$ сводится к нахождению нижней оценки для последнего ряда. Несложно проверить, что $(N(t)-at)/\sqrt{at}\xrightarrow{Law}\eta$, где величина $\eta\sim\mathcal{N}(0,1)$, когда $t\to\infty$. Тем самым, для каждого $b>0$ имеем

$$
\mathsf{P}(N(t)\in(at-b\sqrt{at},at+b\sqrt{at}))\to\mathsf{P}(\eta\in(-b,b))>0,\quad t\to\infty.
$$

Поэтому ввиду формулы (88) получаем

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}_{-1}(T\geq k)\frac{e^{-at}(at)^k}{k!}&\geq\mathsf{P}(T\geq[at+b\sqrt{at}])\,\mathsf{P}(N(t)\in(at-b\sqrt{at},at+b\sqrt{at})) \\
&\sim\frac{c}{\sqrt{at}}\,\mathsf{P}(\eta\in(-b,b)),\quad t\to\infty. \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Объединяя соотношения (86), (90) и (91), а также учитывая свойство монотонности преобразования Лапласа, заключаем, что $C_1(-1,1)>0$.

В результате мы показали, что $C_1(-1,y)>0$ для любого $y>0$. Перейдем к рассмотрению стартовой точки $x=-2$. Напомним, что по предположению существуют ровно две точки $r_1>0$ и $r_2>0$ такие, что $a(r_1)>0$ и $a(r_2)>0$. Если найдется число $r>0$, $r\neq y$, или $r=-1$ такое, что $a(-2,r)>0$ (т.е. $r_1=r+2$ или $r_2=r+2$), то благодаря соотношениям (86) и (87), а также установленному неравенству $C_1(r,y)>0$, приходим к искомой оценке $C_1(-2,y)>0$. В противном случае имеем $r_1=2$ и $r_2=y+2$. В частности, $a(-4,-2)>0$ и $a(-4,y-2)>0$. Поскольку рассматриваемое случайное блуждание неразложимо, можно утверждать, что $y-2\neq0$. Как следствие, справедливо неравенство $C_1(-4,y)>0$ в силу формул (86), (87) и ранее установленной оценки $C_1(y-2,y)>0$ при $y>0$ и $y\neq2$. В свою очередь, $C_1(-2,y)>0$ ввиду соотношений (86), (87) и доказанного выше неравенства $C_1(-4,y)>0$. Следовательно, положительность функции $C_1(x,y)$ для значений $x=-2$ и $y>0$ показана. Для значений $x=-3$, $x=-4$, …, проверка положительности функции $C_1(x,y)$ при $y>0$ осуществляется аналогично случаю $x=-2$. Таким образом, теорема 4 при $d=1$ доказана.

3.3.2 Случай $d=2$

Как и в предыдущем подразделе, найдем предельное значение $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$ при $x,y\in\mathbb{Z}^2$, $y\neq\mathbf{0}$, с помощью формулы $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)=\lim_{\lambda\to0+}\check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda)$. Вначале для функции $\check{H}_{\mathbf{0},r}(\lambda)$, $r\in\mathbb{Z}^2$, выпишем асимптотическое равенство

$$
\check{H}_{\mathbf{0},r}(\lambda)=1+\frac{\rho_2(r)}{a\,\gamma_2\ln\lambda}+o\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right),\quad\lambda\to0+, \qquad (92)
$$

которое с учетом формулы (68) получается в результате применения тауберовой теоремы (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5) к соотношению (73). Подставляя (92) в представление (77) и принимая во внимание однородность функции $H_{x,y}$, находим величину $\lim_{\lambda\to0+}\check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda)$.

Тем самым значение $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$ установлено. Однако для завершения доказательства соотношения (56) при $d = 2$ остается показать, что $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \in (0,1)$. Аналогично подразделу 3.3.1, из равенств (69) и (76) вытекают эквивалентности $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)=0 \Leftrightarrow H_{x,\mathbf{0},y}(\infty)=1$ и $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) = 1 \Leftrightarrow H_{x,\mathbf{0},y}(\infty) = 0$. Поэтому для проверки соотношения $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \in (0,1)$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$, достаточно удостовериться в справедливости неравенства $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) > 0$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. В свою очередь, последнее имеет место, если, например, соотношение (61) выполнено с $C_2(x,y) > 0$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. Таким образом, начальная задача проверки утверждения $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \in (0,1)$ сводится к доказательству соотношения (61) и демонстрации положительности функции $C_2(\cdot,\cdot)$. Оставшаяся часть подраздела посвящена доказательству этих двух утверждений.

Доказательство (61) основано на формулах (79)–(81), в которых функции $G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})$ и $G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0},r)$ заменяются их асимптотическими выражениями при $\lambda \to 0+$ для $r = x$, $r = y$ и $r = y - x$. Благодаря тауберовой теореме (теорема 2 в [26], гл. 13, § 5) асимптотическое поведение функции $G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})$ при $d = 2$ следует из соотношения (51), а именно,

$$G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) = -\gamma_2 \ln \lambda + o(\ln \lambda), \quad \lambda \to 0+\,. \tag{93}$$

Используя ту же самую тауберову теорему и равенство (85), верное для всех $d \in \mathbb{N}$, заключаем, что

$$G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0},r) = a^{-1}\rho_2(r) + \tilde{\gamma}_2(r)\,\lambda \ln \lambda + o(\lambda \ln \lambda),\ \lambda \to 0+,\ r \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}. \tag{94}$$

В самом деле, имеем $a^{-1}\rho_2(r) = \int_0^\infty (p(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) - p(t;\mathbf{0},r))\,dt < \infty$ в силу соотношения (52), а ввиду формулы (52) и теоремы 31 в монографии [16] выводим, что

$$\int_t^\infty (p(u;\mathbf{0},\mathbf{0}) - p(u;\mathbf{0},r))\,du \sim \frac{\tilde{\gamma}_2(r)}{t}, \quad t \to \infty.$$

Теперь подставим выражение (94) и значение $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$, задаваемое формулой (56), в равенства (79)–(81). После приведения подобных членов подставляем разложение (93) в полученные формулы. Опуская стандартные вычисления, делаем вывод, что при $\lambda \to 0+$

$$(H_{x,y,\mathbf{0}}\widehat{(\infty) - H_{x,y,\mathbf{0}}})(\lambda) \sim \frac{\rho_2(x) + \rho_2(y-x) - \rho_2(y)}{-4\,a\,\gamma_2\,\lambda \ln \lambda},\ x, y \in \mathbb{Z}^2,\ y \neq \mathbf{0}.$$

Если $C_2(x,y) > 0$, то применение тауберовой теоремы (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5) к последнему асимптотическому равенству приводит к формуле (61). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 4 при $d = 2$ нам осталось только проверить положительность функции $C_2(x,y)$ для всех значений $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся методом от противного. Предположим, что существуют точки x и y такие, что $x \in \mathbb{Z}^2$, $y \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ и $C_2(x,y) = 0$. Тогда из определения функции $C_2(x,y)$ вытекает, что

$$\rho_2(x) + \rho_2(y-x) - \rho_2(y) = 0. \tag{95}$$

В силу (56) последнее равенство эквивалентно соотношению $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) = 1$. Следовательно, формулы (69) и (76) влекут тождества $H_{y,\mathbf{0},x}(t) = 0$ и $H_{y,x,\mathbf{0}}(t) = H_{y,x}(t)$ при $t \geq 0$. Поэтому ввиду соотношения (73) получаем, что $C_2(y,x) > 0$ и $C_2(y,x) = \rho_2(y-x)/(a\,\gamma_2)$. С учетом определения функции $C_2(y,x)$ последнее равенство может быть переписано в виде $\rho_2(y) - \rho_2(x) = 3\rho_2(y-x)$. Это соотношение в сочетании с предположением (95) приводит к противоречию. Тем самым установлено, что $C_2(x,y) > 0$ для всех значений $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. Доказательство теоремы 4 при $d = 2$ завершено.

3.3.3 Случай $d \geq 3$

В этом подразделе мы предполагаем, что $d \geq 3$. Из формул (74), (75) и (77) выводим соотношения

$$\check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda) = \frac{G_\lambda(x,y)G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(x,\mathbf{0})G_\lambda(\mathbf{0},y)}{G_\lambda^2(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0},y)}, \quad x \neq y, \tag{96}$$

$$\check{H}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\lambda) = \frac{G_\lambda(\mathbf{0},y)}{(G_\lambda^2(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0},y))(\lambda+a)}, \tag{97}$$

$$\check{H}_{y,y,\mathbf{0}}(\lambda) = 1 - \frac{G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})}{(G_\lambda^2(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0},y))(\lambda+a)}. \tag{98}$$

Отсюда с учетом тождества $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) = \lim_{\lambda\to 0+} \check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, находим предельное значение $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$. Чтобы доказать полностью утверждения (57)–(59), нам остается проверить, что $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \in (0,1)$. В силу соотношений (70), (71) и (76) верны неравенства $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \leq H_{x,y}(\infty) < 1$. Для проверки того, что $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) > 0$, достаточно установить асимптотическое равенство (62) и показать, что функция $C_d(x,y)$ строго положительна. Остальная часть подраздела посвящена доказательству этих двух утверждений.

Предлагаемый подход к выводу соотношения (62) состоит в следующем. В силу (51) функции распределения, преобразования Лапласа которых есть соответственно $G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0})$, $G_\lambda(\mathbf{0},x)$, $G_\lambda(\mathbf{0},y)$, $G_\lambda(x,y)$ и $(\lambda+a)^{-1}$, имеют хвосты, эквивалентные постоянным (последняя из них равна нулю), умноженным на одну и ту же функцию $t^{1-d/2}$. Поэтому благодаря лемме 6 из [18], а также формулам (96)–(98), можно утверждать, что функция распределения $H_{x,y,\mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, тоже имеет хвост, эквивалентный постоянной, умноженной на $t^{1-d/2}$. Более того, эту постоянную легко вычислить с помощью соотношений (20) и (22) из [18]. Тем самым, асимптотическое равенство (62) установлено.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 4 при $d \geq 3$ нам остается только проверить положительность функции $C_d(x,y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$, $x \neq y$ (легко видеть, что функции $C_d(\mathbf{0},y)$ и $C_d(y,y)$ всегда положительны при $d \geq 3$). Основная идея этого шага – та же, что и при доказательстве положительности функции $C_2(\cdot,\cdot)$ в подразделе 3.3.2. А именно, предположим противное, т.е. что для некоторых $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}, y\}$ и $y \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ верно равенство $C_d(x,y) = 0$. Оно эквивалентно соотношению

$$G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0},x) = G_0(x,y) - G_0(\mathbf{0},y). \tag{99}$$

Заметим, что формула для $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty)$, возникающая в утверждении (57), позволяет записать

$$H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) = \frac{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})(G_0(x,y) - G_0(\mathbf{0},y)) + G_0(\mathbf{0},y)(G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0},x))}{G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_0^2(\mathbf{0},x)}.$$

Объединяя формулу (99) и последнее равенство, видим, что

$$\begin{aligned} H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) &= \frac{(G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0},x))(G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0},y))}{G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_0^2(\mathbf{0},x)} \\ &= \frac{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0},y)}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0},x)} = \frac{G_0(x,y) + G_0(\mathbf{0},x)}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0},x)}. \end{aligned}$$

Однако согласно формуле (76) имеем $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) \le H_{y,x}(\infty)$ и с учетом соотношения (71) отсюда заключаем, что

$$\frac{G_0(x,y)+G_0(\mathbf{0},x)}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})+G_0(\mathbf{0},x)} \le \frac{G_0(x,y)}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})} \Leftrightarrow G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}) \le G_0(x,y).$$

Полученное противоречие завершает доказательство асимптотического равенства (62) и, тем самым, доказательство теоремы 4.

3.4 Простое случайное блуждание по одномерной решетке

В этом разделе мы докажем теорему 5. Прежде всего, отметим, что в силу однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно установить теорему 5 при $z=0$. Напомним, что для простого случайного блуждания по решетке $\mathbb{Z}$ переходные интенсивности имеют вид $a(r,r+1) = a(r,r-1) = a/2$ и $a(r,r+k)=0$ для всех значений $r \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k|>1$. В соответствии с определениями функции $\phi(\theta)$ и постоянной γ_1 имеем $\phi(\theta) = a(\cos\theta - 1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, и $\gamma_1 = 1/\sqrt{2a\pi}$. Следовательно, лемма 16 и равенство (54) влекут тождество $\rho_1(r) = |r|$, $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Повторим, что формула для предельного значения $H_{x,y,0}(\infty)$ в утверждении (56) верна также и для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Поэтому заключаем, что $H_{x,y,0}(\infty) = 0$ при $y<0<x$ и $x<0<y$, $H_{x,y,0}(\infty) = x/y$ при $0<x<y$ и $y<x<0$, $H_{x,y,0}(\infty)=1$ при $0<y<x$ и $x<y<0$, $H_{0,y,0}(\infty) = 1/(2|y|)$ и $H_{y,y,0}(\infty) = 1-1/(2|y|)$. Таким образом, при всех значениях $y<0<x$ и $x<0<y$ справедливо тождество $H_{x,y,0}(\cdot) \equiv 0$, т.е. соотношение (67) доказано. Для $0<y<x$ и $x<y<0$ благодаря формуле (76) приходим к выводу, что $H_{x,y,0}(\infty) = 1 = H_{x,y}(\infty)$ и $H_{x,0,y}(\infty)=0$. Это равносильно соотношениям $H_{x,0,y}(\cdot) \equiv 0$ и $H_{x,y,0}(\cdot) \equiv H_{x,y}(\cdot)$. Поскольку асимптотическое поведение функции $H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t)$ найдено в лемме 13, то формула (63) также доказана. Более того, формула (86) верна для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, и поэтому, применяя тауберову теорему (теорема 4 в [26], гл. 13, § 5), мы устанавливаем асимптотическое поведение функции $H_{y,y,0}(\infty) - H_{y,y,0}(t)$ при $t\to\infty$, причем в возникающей формуле постоянная $C_1(y,y) = 1/(2\sqrt{a\pi}) > 0$. В итоге соотношение (64) доказано. Нам осталось только получить утверждения (65) и (66), т. е. исследовать асимптотические свойства функции $H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t)$, когда $x \in [0,y)$, $x \in \mathbb{Z}$.

С этой целью напомним широко известный результат (задача о разорении игрока) для вложенной марковской цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. А именно, справедливо неравенство

$$\mathsf{P}(0<S_k<y, 0<k\le n | S(0)=x) \le (1-\varepsilon_0)^n$$

для некоторого числа $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и каждого значения $x \in [0,y]$, $x \in \mathbb{Z}$ (см., например, [30], гл. 1, § 9). Основываясь на этом результате, выводим

$$\begin{aligned} H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(t<\tau_{y,0}<\infty, N(t)=n|\, S(0)=x\right) \\ \le\ & \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(0<S_k<y, 0<k\le n, N(t)=n|\, S(0)=x\right) \\ =\ & \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(0<S_k<y, 0<k\le n|\, S(0)=x\right)\, \mathsf{P}\left(N(t)=n|\, S(0)=x\right) \\ \le\ & \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^n \frac{(at)^n e^{-at}}{n!} = e^{-a\,\varepsilon_0\, t}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что соотношения (65) и (66) верны для некоторого числа $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Теорема 5 полностью доказана.

3.5 Времена достижения с запретом после выхода из начального состояния

В последнем подразделе раздела 3 мы устанавливаем теорему 6. С учетом однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно доказать теорему 6 при $z = \mathbf{0}$. Поскольку $\tau_{y,\mathbf{0}} = \tau^{-}_{y,\mathbf{0}} + \tau$ п.н., имеем

$$H_{x,y,\mathbf{0}}(t) = H^{-}_{x,y,\mathbf{0}} * G(t), \quad t \geq 0. \tag{100}$$

Это соотношение сразу влечет равенство $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) = H^{-}_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$ при $x \in \mathbb{Z}^d$ и $y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Если случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}$ простое и $0 \leq x < y$ или $y < x \leq 0$, то оценка функции $H^{-}_{x,y,0}(\infty) - H^{-}_{x,y,0}(t)$ при $t \to \infty$ вытекает из теоремы 5 и неравенства

$$H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) \geq H^{-}_{x,y,0}(\infty) - H^{-}_{x,y,0}(t),$$

использовавшегося при доказательстве теоремы 4 для $d = 1$. Кроме того, в силу установленного тождества $H^{-}_{x,y,0}(\infty) = H_{x,y,0}(\infty)$ и соотношения (67) для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ мы можем утверждать, что $H^{-}_{x,y,0}(t) \equiv 0$, когда $x < 0 < y$ или $y < 0 < x$. Таким образом, для этих случаев теорема 6 доказана.

Если же рассматривается случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ в ситуациях, когда $0 \leq x < y$, $y < x \leq 0$, $x < 0 < y$ или $y < 0 < x$, то оказывается полезным снова обратиться к §3 статьи [18] и, в частности, к лемме 6. С помощью теорем 4 и 5, равенства $\check{H}^{-}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda) = \check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda)/\check{G}(\lambda)$, вытекающего из тождества (100), а также благодаря формулам (20) и (22) леммы 6 из [18], приходим к заключению, что $H^{-}_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) - H^{-}_{x,y,\mathbf{0}}(t) \sim H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) - H_{x,y,\mathbf{0}}(t)$ при $t \to \infty$ для указанных значений d, x и y. Тем самым, теорема 6 доказана полностью.

4 Критическое ветвящееся случайное блуждание

Каталитическое ветвящееся случайное блуждание (КВСБ) по d-мерной целочисленной решетке является одной из моделей эволюции популяции частиц. Напомним основные черты этой модели. Каждая частица независимо от остальных может совершать случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ и производить потомков в источнике ветвления, расположенном без ограничения общности в начале координат. *Симметричное ветвящееся случайное блуждание* (СВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, изучавшееся ранее, например, в статьях [2], [32] и [37], есть частный случай модели КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ (см. [34]).

Рассматриваемая модель была предложена в [53] для $d = 1$, а затем исследовалась для других размерностей $d \in \mathbb{N}$ в [5], [18], [34] и [39]. Анализ КВСБ, проведенный в [18] и [34], показал, что по аналогии со многими разновидностями ветвящихся процессов (см. [25]) КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ классифицируется как надкритическое, критическое или докритическое. Согласно [34], [44] и [46] для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ характерен *экспоненциальный* рост (когда время стремится к бесконечности) как общих численностей частиц, так и локальных численностей. Выражение "локальный" относится к частицам, расположенным в любой фиксированной точке решетки.

Совершенно иная картина имеет место для критического КВСБ, которое является основным объектом изучения в данном разделе. Например, при $d = 1$ или $d = 2$ популяция частиц вырождается с вероятностью 1, но выживает со строго положительной вероятностью при $d \geq 3$ (см. [6], [18], [39] и [53]). Более того, при условии невырождения процесса размер популяции имеет нетривиальное дискретное предельное распределение, различающееся при $d < 3$ и $d \geq 3$ (см. [5], [39] и [53]). Таким образом, в модели критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ асимптотическое поведение (по времени) общего числа частиц на решетке существенно зависит от размерности d и не растет экспоненциально. Что касается локальных численностей частиц в модели критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, ранее в статьях [5], [18], [19], [39], [40], [52] и [53] были установлены только асимптотические свойства числа частиц, расположенных в *источнике ветвления*. В частности, оказывается, что для всех $d \in \mathbb{N}$ вероятность наличия частиц в источнике ветвления стремится к нулю с ростом времени. Стоит заметить, что ее асимптотическое поведение, а также предельные законы для соответствующим образом нормированного числа частиц в источнике ветвления, при условии наличия частиц в начале координат, имеют различный вид при $d = 1, 2, 3, 4$ и $d \geq 5$. Среди возникающих предельных распределений можно встретить экспоненциальное и дискретное наряду со смесью этих распределений.

В модели критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ поведение числа частиц, расположенных в *произвольной* точке решетки, оставалось неизвестным. В данном разделе завершается картина исследования указанного поведения. Изучается асимтотика по времени средних локальных численностей и вероятности нахождения частиц в произвольной фиксированной точке $y \neq \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. Кроме того, мы получаем условную предельную теорему для должным образом нормированного числа частиц в такой точке y. Следует подчеркнуть, что в отличие от работ [5], [18], [19], [52] и [53] допускается старт КВСБ в *любой* точке $x \in \mathbb{Z}^d$, а не только в источнике ветвления. Асимптотические свойства числа частиц в $\mathbf{0}$ для КВСБ с произвольной стартовой точкой были изучены в [40].

Другая нетривиальная задача в исследовании критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ состоит в нахождении предельного *совместного* распределения числа частиц в источнике ветвления и вне его. При $d = 1$ глубокие результаты в этом направлении установлены в статье

[17]. В данном пособии такого рода задачи решаются для КВСБ по $\mathbb{Z}^2$ с использованием теоремы 3. При этом нам удалось обойтись без дополнительных ограничений на поведение производящей функции числа потомков (ср. с [17]). В случае $d = 2$, как и при $d = 1$, неожиданным образом оказалось, что численности частиц в источнике ветвления и вне его асимптотически независимы при наличии частиц в начале координат.

Четвертый раздел имеет следующую структуру. В подразделе 4.1 мы даем детальное описание рассматриваемой модели и формулируем основные результаты. Теорема 7 доказывается в подразделе 4.2. Подраздел 4.3 посвящен конструкции вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса, существенную роль здесь играют результаты раздела 3. Затем в подразделе 4.4 мы устанавливаем теоремы 8 и 9. Наконец, в подразделе 4.5 показывается, что теорема 10 вытекает из теоремы 3.

4.1 Основные результаты четвертого раздела

Опишем модель критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. В начальный момент времени $t = 0$ на решетке находится единственная частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Если $x \neq \mathbf{0}$, то частица совершает случайное блуждание с непрерывным временем до момента первого достижения начала координат. Предполагается, что это случайное блуждание задается инфинитезимальной матрицей $A = (a(u,v))_{u,\, v\in\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющей условиям, сформулированным в подразделе 3.1 предыдущего раздела. Поэтому для упомянутого блуждания в дальнейшем будут использоваться обозначения и результаты раздела 3.

Если $x = \mathbf{0}$ или частица достигла начала координат, то она проводит там экспоненциально распределенное время (с параметром 1). Затем она либо погибает с вероятностью $\alpha \in (0,1)$, произведя перед гибелью случайное число потомков ξ, либо покидает источник ветвления с вероятностью $1-\alpha$. В последнем случае интенсивность перехода из начала координат в точку $v \neq \mathbf{0}$ равняется

$$\overline{a}(\mathbf{0}, v) := -(1-\alpha)\frac{a(v)}{a(\mathbf{0})}.$$

В начале координат ветвление определяется вероятностной производящей функцией

$$f(s) := \mathsf{E}s^{\xi} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \quad s\in[0,1].$$

В [18] КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ названо *критическим*, если выполнены следующие соотношения:

$$\alpha f'(1) + (1-\alpha)(1-h_d) = 1 \quad \text{и} \quad \sigma^2 := \alpha\, f''(1) < \infty. \tag{101}$$

Здесь h_d вероятность события, состоящего в том, что частица, покинувшая начало координат, никогда не вернется обратно. В силу леммы 13 имеем $h_1 = h_2 = 0$ и $h_d = (a\, G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}))^{-1} \in (0,1)$ при $d \geq 3$.

Новорожденные частицы в момент появления расположены в начале координат. Они эволюционируют в соответствии со схемой, описанной выше, независимо друг от друга, а также от родительских частиц. Число частиц, находящихся в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент $t \geq 0$, обозначается $\mu(t;y)$.

Цели раздела 4 состоят в следующем. Во-первых, мы находим асимптотическое поведение (при $t\to\infty$) среднего числа частиц $m(t;x,y) := \mathsf{E}_x\mu(t;y)$, расположенных в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, в момент времени $t \geq 0$ (повсюду в данном разделе индекс x означает, что КВСБ стартует в точке $x \in \mathbb{Z}^d$). Во-вторых, мы оцениваем асимптотическое поведение вероятности $q(t;x,y) := \mathsf{P}_x(\mu(t;y) > 0)$ наличия частиц в точке y в момент времени t. В-третьих, при $t \to \infty$ устанавливаем предельную теорему для должным образом нормированных локальных численностей частиц $\mu(t;y)$ при условии, что $\mu(t;y) > 0$. Наконец, в заключение раздела 4 мы применяем результаты раздела 2 к модели КВСБ по $\mathbb{Z}^2$ для нахождения предельного совместного распределения числа $\mu(t;\mathbf{0})$ частиц в источнике ветвления и нормированного числа $\eta(t;\mathbf{0}) := \sum_{z\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} \mu(t;z)$ частиц вне источника при условии $\mu(t;\mathbf{0}) > 0$, когда стартовой точкой КВСБ является $\mathbf{0}$.

Чтобы сформулировать основные результаты раздела, введем дополнительные обозначения. Положим $q(s,t;x,y) := 1 - \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$. При $d = 2$ нам понадобится функция

$$J(s;y) := \alpha \int_0^\infty \left(f(1 - q(s,u;\mathbf{0},y)) - 1 + q(s,u;\mathbf{0},y)\right) du, \quad s \in [0,1], \quad y \in \mathbb{Z}^d.$$

Если же $d \geq 5$, то в силу (51) значение

$$m_d := 1 - (1-\alpha)a^{-1} + 2(1-\alpha)a^{-1}G_0^{-2}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \int_0^\infty tp(t;\mathbf{0},\mathbf{0})\, dt$$

конечно.

Основные результаты содержатся в четырех следующих теоремах. Для полноты картины утверждения теорем 7, 8 и 9 включают случай $y = \mathbf{0}$, изученный ранее в [5], [18], [19], [39], [40], [52] и [53].

Теорема 7 *Пусть $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Следующие соотношения, различающиеся при $y \neq \mathbf{0}$ и $y = \mathbf{0}$, справедливы при $t \to \infty$*

$$\begin{aligned}
m(t;x,y) &\sim \frac{\gamma_1}{\sqrt{t}}, \quad m(t;x,\mathbf{0}) \sim \frac{\gamma_1 a}{(1-\alpha)\sqrt{t}}, && d = 1,\\
m(t;x,y) &\sim \frac{\gamma_2}{t}, \quad m(t;x,\mathbf{0}) \sim \frac{\gamma_2 a}{(1-\alpha)t}, && d = 2,\\
m(t;x,y) &\sim \frac{G_0(x,\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},y)}{2\pi\gamma_3\sqrt{t}}, \quad m(t;x,\mathbf{0}) \sim \frac{aG_0(x,\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})}{2\pi\gamma_3(1-\alpha)\sqrt{t}}, && d = 3,\\
m(t;x,y) &\sim \frac{G_0(x,\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},y)}{\gamma_4 \ln t}, \quad m(t;x,\mathbf{0}) \sim \frac{aG_0(x,\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})}{\gamma_4(1-\alpha)\ln t}, && d = 4,\\
m(t;x,y) &\to \frac{(1-\alpha)G_0(x,\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},y)}{a\, G_0^2(\mathbf{0},\mathbf{0})\, m_d}, \quad m(t;x,\mathbf{0}) \to \frac{G_0(x,\mathbf{0})}{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})m_d}, && d \geq 5.
\end{aligned}$$

Теорема 8 *При $x, y \in \mathbb{Z}^d$ и $t \to \infty$ имеют место следующие формулы*

$$
\begin{aligned}
q(t;x,y) &\sim \frac{2(1-\alpha)}{\sigma^2\gamma_1\, a\sqrt{t}\ln t}, && d=1,\\
q(t;x,y) &\sim \frac{\gamma_2}{t}\left(1-\frac{a}{1-\alpha}J(0;y)\right), \quad y\neq \mathbf{0}, && d=2,\\
q(t;x,\mathbf{0}) &\sim \frac{\gamma_2 a}{(1-\alpha)t}(1-J(0;\mathbf{0})), && d=2,\\
q(t;x,y) &\sim \frac{4\pi\gamma_3(1-\alpha)G_0(x,\mathbf{0})}{\sigma^2\, a\, G_0^3(\mathbf{0},\mathbf{0})\sqrt{t}\ln t}, && d=3,\\
q(t;x,y) &\sim \frac{3\gamma_4(1-\alpha)G_0(x,\mathbf{0})\ln t}{\sigma^2\, a\, G_0^3(\mathbf{0},\mathbf{0})\, t}, && d=4,\\
q(t;x,y) &\sim \frac{2\, m_d G_0(x,\mathbf{0})}{\sigma^2\, G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})t}, && d\geq 5,
\end{aligned}
$$

где при $d=2$ и $s\in[0,1]$ верны строгие неравенства $J(s;y)<(1-s)(1-\alpha)/a$, $y\neq\mathbf{0}$, и $J(s;\mathbf{0})<1-s$.

Теорема 9 *Для $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda\in[0,\infty)$ и $s\in[0,1]$ имеем при $t\to\infty$*

$$
\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}_x\left(\exp\left\{-\frac{\lambda\,\mu(t;y)}{\mathsf{E}_x(\mu(t;y)|\mu(t;y)>0)}\right\}\middle|\,\mu(t;y)>0\right)=\frac{1}{\lambda+1},
$$
$$
d=1,3 \quad \text{или} \quad d\geq 5,
$$

$$
\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}_x\left(s^{\mu(t;y)}\middle|\,\mu(t;y)>0\right)=\frac{(1-\alpha)s-a(J(0;y)-J(s;y))}{1-\alpha-aJ(0;y)}, \quad y\neq\mathbf{0}, \quad d=2,
$$

$$
\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}_x\left(s^{\mu(t;\mathbf{0})}\middle|\,\mu(t;\mathbf{0})>0\right)=\frac{s-(J(0;\mathbf{0})-J(s;\mathbf{0}))}{1-J(0;\mathbf{0})}, \quad d=2,
$$

$$
\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}_x\left(\exp\left\{-\frac{\lambda\,\mu(t;y)}{\mathsf{E}_x(\mu(t;y)|\mu(t;y)>0)}\right\}\middle|\,\mu(t;y)>0\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2+3\lambda},
$$
$$
d=4.
$$

Теорема 10 *При $d=2$ для всех $s\in[0,1]$ и $\lambda\geq 0$ справедливо равенство*

$$
\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\left(s^{\mu(t;\mathbf{0})}\exp\left\{-\frac{\lambda(1-\alpha)\eta(t;\mathbf{0})}{2\sigma^2\,\gamma_2\, a\,\ln t}\right\}\middle|\,\mu(t;\mathbf{0})>0\right)
=\frac{s-(J(0;\mathbf{0})-J(s;\mathbf{0}))}{1-J(0;\mathbf{0})}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+\lambda}(\sqrt{1+\lambda}+1)^2}.
$$

Заметим, что нормирующий множитель $\mathsf{E}_x(\mu(t;y)|\mu(t;y)>0)$, возникающий в теореме 9, есть ни что иное как $m(t;x,y)/q(t;x,y)$, а асимптотическое поведение функций $m(t;x,y)$ и $q(t;x,y)$ найдено в теоремах 7 и 8 соответственно.

Для доказательства теоремы 7 оказалось полезным обратиться к прямым и обратным дифференциальным уравнениям Колмогорова (рассматриваемым в подходящих банаховых пространствах) для средних численностей частиц в различных узлах решетки, а также к результирующим интегральным уравнениям (см. [33]). При установлении теоремы 10, как и при выводе результатов в [5], [18], [19], [52] и [53], касающихся числа частиц в источнике ветвления, эффективно используется метод введения вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с *двумя типами* частиц. Однако для доказательства теорем 8 и 9 мы вынуждены привлечь уже ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с *шестью типами* частиц. Применение последнего метода существенно опирается на результаты раздела 3 об асимптотическом поведении хвоста (несобственной) функции распределения времени достижения с запретом в рамках модели (неветвящегося) случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$. Благодаря этому можно применить теоремы В.А. Ватутина, установленные для ветвящихся процессов Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц (см., например, [11]–[14]). Затем мы имеем дело со сложными аналитическими оценками решений параметрических интегральных уравнений (см., например, [18], [19], [52] и [53]).

4.2 Изучение средних локальных численностей частиц

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 7. Напомним несколько полезных результатов, которые нам понадобятся в этом разделе. Согласно [20], гл.3, §2, переходные вероятности $p(t;x,y)$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, случайного блуждания, порожденного матрицей A, удовлетворяют *обратным* уравнениям Колмогорова

$$\frac{d\,p(t;x,y)}{d\,t} = (Ap(t;\cdot,y))\,(x), \quad p(0;x,y) = \delta_y(x). \tag{102}$$

Здесь $(Ap(t;\cdot,y))(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} a(x,z)p(t;z,y)$, а $\delta_y(\cdot)$ – вектор-столбец в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$ с нулевыми компонентами, за исключением компоненты, индексированной y и равной 1. Аналогично *обратные* уравнения Колмогорова для $m(t;x,y)$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, (см., например, теорему 2.1 в [34]) имеют вид

$$\frac{d\,m(t;x,y)}{d\,t} = \left(\overline{A}m(t;\cdot,y)\right)(x) + \overline{\beta}_c\,(\Delta_{\mathbf{0}}m(t;\cdot,y))\,(x), \quad m(0;x,y) = \delta_y(x), \tag{103}$$

где $\overline{A} = (\overline{a}(u,v))_{u,v\in\mathbb{Z}^d} := A + (a^{-1}(1-\alpha)-1)\,\Delta_{\mathbf{0}}A$, $\Delta_{\mathbf{0}} := \delta_{\mathbf{0}}\delta_{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}$ (T обозначает операцию транспонирования) и $\overline{\beta}_c := (1-\alpha)\,(a\,G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}))^{-1}$. В этом разделе мы следуем обозначениям, принятым в [34].

Лемма 17 *При каждом $y \in \mathbb{Z}^d$ функция $m(t;y,y)$ не возрастает по t.*

Доказательство. Монотонность функции $m(\cdot;y,y)$ для СВСБ по $\mathbb{Z}^d$ была установлена в лемме 3.3.5 из [33]. Ключевым шагом доказательства было использование самосопряженности оператора $H := A + \beta_c\Delta_{\mathbf{0}}$, где $\beta_c := G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Для КВСБ в качестве аналога оператора H выступает несамосопряженный оператор $\overline{H} := \overline{A} + \overline{\beta}_c\Delta_{\mathbf{0}}$. Однако лемма 3.1 из [34] позволяет перейти к (самосопряженной) *симметризации* оператора $\overline{H}$ и уже затем применить лемму 3.3.5 из [33]. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы, установленной в [35], и поэтому здесь не приводится.

Уравнение (103) было получено с помощью дифференцирования в точке $s = 1$ следующего *обратного* уравнения Колмогорова для производящей функции $F(s,t;x,y) := \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, (см. [34])

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(s,t;x,y)}{\partial t} &= \left(\overline{A}F(s,t;\cdot,y)\right)(x) + \left(\Delta_{\mathbf{0}}\overline{f}(F(s,t;\cdot,y))\right)(x), \\ &\quad F(s,0;x,y) = s^{\delta_y(x)}.\end{aligned} \tag{104}$$

Здесь $\overline{f}(s) := \alpha(f(s) - s)$, $s \in [0,1]$, есть инфинитезимальная производящая функция числа непосредственных потомков родительской частицы. В дальнейшем мы воспользуемся уравнением (104) в разделе 4.4.

В лемме 18 мы выводим аналог прямого уравнения для $F(s,t;x,y)$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, и, как следствие, прямое уравнение Колмогорова для $m(t;x,y)$. Напомним, что $\overline{A}^*$ обозначает сопряженный оператор к $\overline{A}$ и $\left(\overline{A}^* m(t;x,\cdot)\right)(y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} m(t;x,z)\overline{a}(z,y)$.

Лемма 18 *При $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, справедливо следующее соотношение*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(s,t;x,y)}{\partial t} &= (s-1)\sum_{z\in\mathbb{Z}^d,\, z\neq y} \overline{a}(z,y)\mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mu(t;z) \\ &+ (s-1)\overline{a}(y,y)\mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)-1}\mu(t;y) \\ &+ \delta_{\mathbf{0}}(y)\overline{f}(s)\mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)-1}\mu(t;y), \quad F(s,0;x,y) = s^{\delta_x(y)}. \end{aligned} \tag{105}$$

Более того, имеем

$$\frac{d\,m(t;x,y)}{d\,t} = \left(\overline{A}^* m(t;x,\cdot)\right)(y) + \overline{\beta}_c\left(\Delta_{\mathbf{0}} m(t;x,\cdot)\right)(y), \quad m(0;x,y) = \delta_x(y). \tag{106}$$

Доказательство. Как обычно при выводе прямых уравнений Колмогорова, мы рассматриваем всевозможные эволюции популяции частиц на промежутке времени $[t, t+h)$ и полагаем $h \to 0+$. Чтобы обосновать возникающие предельные переходы, мы используем теорему Лебега о мажорированной сходимости и полезные оценки для переходных вероятностей (см. доказательство леммы 3 в [20], гл.3, §2). Мы также учитываем конечность среднего общего числа частиц популяции $M(t;x) := \mathsf{E}_x\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\mu(t;z)\right)$ для каждого $x \in \mathbb{Z}^d$ и $t \geq 0$. Последнее наблюдение верно, поскольку функция $M(t;x)$ из $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$ является решением линейного дифференциального уравнения (103) с начальным условием $M(0;x) = 1$ для всех x (вместо $\delta_y(x)$ в (103)), см. [34].

Уравнение (106) является следствием (105) в силу формулы $m(t;x,y) = \partial_s F(s,t;x,y)|_{s=1}$. Следует также учесть, что $\overline{f}\,'(1) = \overline{\beta}_c$ в силу (101). Лемма 18 полностью доказана.

Рассмотрим уравнения (103) и (106) как неоднородные для дифференциального уравнения (102) в банаховом пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$. Применяя формулу вариации постоянной (см. [21], гл.2, §1), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} m(t;x,y) = p(t;x,y) &+ \left(1 - \frac{a}{1-\alpha}\right)\int_0^t p(t-u;x,\mathbf{0})m'(u;\mathbf{0},y)\,du \\ &+ \frac{a\,\overline{\beta}_c}{1-\alpha}\int_0^t p(t-u;x,\mathbf{0})m(u;\mathbf{0},y)\,du, \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} m(t;x,y) = p(t;x,y) &+ \left(\frac{1-\alpha}{a} - 1\right)\int_0^t m(t-u;x,\mathbf{0})p'(u;\mathbf{0},y)\,du \\ &+ \overline{\beta}_c\int_0^t m(t-u;x,\mathbf{0})p(u;\mathbf{0},y)\,du. \end{aligned} \tag{108}$$

Аналогичный результат для СВСБ по $\mathbb{Z}^d$ может быть найден в [33], теорема 1.4.1. Теперь мы можем дать

Доказательство теоремы 7. Чтобы найти асимптотическое поведение $m(t;x,y)$ при

$t \to \infty$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, мы оцениваем каждое из слагаемых в правых частях уравнений (107) и (108), когда $x \neq \mathbf{0}$ и $x = \mathbf{0}$ соответственно, при $t \to \infty$. А именно, мы покажем, что при $d = 1$ и $d = 2$, основной вклад в асимптотическое поведение правой части уравнения (107), а также уравнения (108), вносит первое слагаемое. Однако, при $d \geq 3$ асимптотическое поведение правых частей (107) и (108) определяется только третьим слагаемым. Стоит упомянуть, что при $d = 1$ и $d = 2$ третьи слагаемые в уравнениях (107) и (108) равны нулю в силу тождества $\overline{\beta}_c = 0$.

Пусть $x = \mathbf{0}$. Асимптотическое поведение первого слагаемого в правой части уравнения (108) находится с помощью формулы (51). Оценка второго слагаемого может быть получена посредством леммы 6 из [18] и, в частности, соотношения (20). Однако, чтобы избежать проверки ограниченности вариации функций $p(t; x, y)$ и $m(t; x, y)$ по переменной t, мы выбираем другой подход, состоящий в непосредственном оценивании второго слагаемого. Напомним, что представление (2.1.15) в [33] влечет неравенства $p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \leq 0$, $p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \leq p'(t; \mathbf{0}, y)$, $p''(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \geq 0$ и $p''(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p''(t; \mathbf{0}, y) \geq 0$, $t \geq 0$. Тогда с учетом формул (51) и (52), а также классических результатов о дифференцировании асимптотических формул (см., например, [4], гл.7, §3), при $d \in \mathbb{N}$ имеем

$$p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim -\frac{d\,\gamma_d}{2\,t^{d/2+1}}, \quad p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p'(t; \mathbf{0}, y) \sim -\frac{(d+2)\tilde{\gamma}_d(y)}{2t^{d/2+2}}, \quad t \to \infty.$$

Отсюда, благодаря лемме 5.1.2 из [33] ("лемме о свертках") и уже доказанному утверждению теоремы 7 для $x = \mathbf{0}$ и $y = \mathbf{0}$, мы заключаем, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) p'(u; \mathbf{0}, y)\, du = \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(p'(u; \mathbf{0}, y) - p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{0})\right) du$$
$$+ \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{0})\, du = o(m(t; \mathbf{0}, \mathbf{0})). \tag{109}$$

Объединяя соотношения (51), (108) и (109), мы устанавливаем теорему 7 для $d = 1$ и $d = 2$, когда $x = \mathbf{0}$. Утверждение теоремы 7 при $d \geq 3$ и $x = \mathbf{0}$ следует из формул (51), (108) и (109) в силу леммы 5.1.2 из [33] и ввиду теоремы 7 для известного случая $x = y = \mathbf{0}$.

Пусть $x \neq \mathbf{0}$. Аналогично случаю $x = \mathbf{0}$ мы видим, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t p(t-u; x, \mathbf{0}) m'(u; \mathbf{0}, y)\, du = \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, y) p'(u; x, \mathbf{0})\, du = o(m(t; \mathbf{0}, y)). \tag{110}$$

Таким образом, сочетание формул (51), (107) и (110) доказывает теорему 7 для $d = 1$ или $d = 2$ и $x \neq \mathbf{0}$. При $d \geq 3$ и $x \neq \mathbf{0}$ мы оцениваем третье слагаемое в уравнении (107) с помощью леммы 5.1.2 из [33], соотношения (51) и утверждения теоремы 7 при $d \geq 3$ и $x = \mathbf{0}$, установленного выше. Теорема 7 доказана.

4.3 Вспомогательный процесс Беллмана-Харриса

Опишем кратко ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с шестью типами частиц. Он начинается с одной частицы типа $i = 1, \ldots, 6$. Родительская частица имеет случайное время жизни с функцией распределения $G_i(t)$, $t \geq 0$. Перед гибелью частица производит потомков в соответствии с производящей функцией $f_i(\vec{s})$, $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_6) \in [0, 1]^6$. Новые частицы типа $j = 1, \ldots, 6$ эволюционируют независимо друг от друга (и от остальных потомков) с функцией распределения времени жизни $G_j(t)$ и производящей функцией $f_j(\vec{s})$

численностей непосредственных потомков всех типов. Пусть $M := \left(\partial_{s_j} f_i|_{\vec{s}=(1,\ldots,1)}\right)_{i,j=1,\ldots,6}$ есть матрица средних. Ветвящийся процесс Беллмана-Харриса называется *критическим неразложимым*, если перронов корень матрицы M (т.е. максимальное по модулю собственное значение) равен 1 и существует натуральное число n такое, что все элементы матрицы M^n положительны (см., например, [25], гл.4, §6 и 7). Обозначим число частиц типа j, существующих в момент t, как $Z_j(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, 6$. Положим

$$F_i(t; \vec{s}) = \mathsf{E}_i \left(\prod\nolimits_{j=1}^{6} s_j^{Z_j(t)}\right), \quad i = 1, \ldots, 6, \quad t \geq 0, \quad \vec{s} \in [0,1]^6,$$

где индекс i означает тип родительской частицы. Другими словами, $F_i(t; \vec{s})$ – это производящая функция численностей частиц всех типов, существующих в момент t, при условии, что процесс начался с одной частицы типа i.

Вернемся к КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. В этом разделе мы предполагаем, что КВСБ может стартовать в начале координат или в некоторой фиксированной точке $y \neq \mathbf{0}$. Мы разделим популяцию частиц, существующих в момент $t \geq 0$, на семь групп. Частицы, расположенные в момент t в начале координат (в точке y), образуют первую (вторую) группу, имеющую мощность $\mu(t; \mathbf{0})$ ($\mu(t; y)$). Теперь рассмотрим в момент t семейство частиц такое, что ему соответствует тройка (u, v, w) точек решетки и его мощность обозначается $\mu_{u,v,w}(t)$. Это семейство состоит из частиц, которые покинули u хотя бы один раз за временной интервал $[0, t]$, а после последнего выхода из u еще не достигли ни v, ни w, но когда-нибудь достигнут v до возможного посещения w. Третья группа соответствует набору $(u, v, w) = (\mathbf{0}, y, \mathbf{0})$, четвертая – $(y, \mathbf{0}, y)$, пятая – $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, y)$, а шестая – $(y, y, \mathbf{0})$. Седьмая группа состоит из оставшихся частиц, не включенных в описанные шесть групп. Заметим, что последняя группа содержит только частицы, имеющие бесконечное время жизни, поскольку после момента t они никогда не вернутся в начало координат. Поэтому после момента t эти частицы не произведут потомков и не будут влиять на число частиц в других шести группах.

Теперь мы можем ввести вспомогательный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса и использовать его при изучении КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. Рассмотрим шеститипный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса, имеющий следующие функции распределения G_i и производящие функции f_i, $i = 1, \ldots, 6$,

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= 1 - e^{-t}, \quad f_1(\vec{s}) = \alpha f(s_1) + (1-\alpha) H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0) s_2 \\
&\qquad\qquad\qquad + (1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)) s_3 \\
&\qquad\qquad\qquad + (1-\alpha) H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) s_5 \\
&\qquad\qquad\qquad + (1-\alpha)(1 - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)), \\
G_2(t) &= 1 - e^{-at}, \quad f_2(\vec{s}) = H^-_{y,\mathbf{0},y}(0) s_1 + (H^-_{y,\mathbf{0},y}(\infty) - H^-_{y,\mathbf{0},y}(0)) s_4 \\
&\qquad\qquad\qquad + H^-_{y,y,\mathbf{0}}(\infty) s_6 + (1 - H^-_{y,\mathbf{0},y}(\infty) - H^-_{y,y,\mathbf{0}}(\infty)), \\
G_3(t) &= \frac{H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(t) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)}{H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)}, \quad f_3(\vec{s}) = s_2, \quad G_4(t) = \frac{H^-_{y,\mathbf{0},y}(t) - H^-_{y,\mathbf{0},y}(0)}{H^-_{y,\mathbf{0},y}(\infty) - H^-_{y,\mathbf{0},y}(0)}, \\
f_4(\vec{s}) &= s_1, \; G_5(t) = \frac{H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t)}{H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)}, \; f_5(\vec{s}) = s_1, \; G_6(t) = \frac{H^-_{y,y,\mathbf{0}}(t)}{H^-_{y,y,\mathbf{0}}(\infty)}, \; f_6(\vec{s}) = s_2,
\end{aligned}$$

где функции вида $H^-_{x,y,z}(\cdot)$ введены в разделе 3. Из соотношения (55) вытекают тождества $G_3 \equiv G_4$ и $G_5 \equiv G_6$. Легко видеть, что для каждого $t \geq 0$ имеем

$$(\mu(t; \mathbf{0}), \mu(t; y), \mu_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(t), \mu_{y,\mathbf{0},y}(t), \mu_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t), \mu_{y,y,\mathbf{0}}(t)) \stackrel{Law}{=} (Z_1(t), \ldots, Z_6(t)).$$

Заметим, что введенный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с шестью типами частиц является критическим и неразложимым. В самом деле, несложно проверить, что все элементы матрицы M^6 положительны. Более того, если $H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0) \neq 0$ (т.е. $a(\mathbf{0},y) > 0$), то даже все элементы матрицы M^4 положительны. Следовательно, построенный процесс неразложим. Чтобы проверить его критичность, отметим, что в силу теоремы 6 первое соотношение в (101) можно представить в форме

$$\alpha f'(1) = 1 - (1-\alpha)\left(H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) + \frac{(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty))^2}{1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)}\right). \tag{111}$$

Тогда, переписывая явное выражение для характеристического многочлена матрицы M, мы заключаем, что он имеет вид

$$\det(M - wI) = w^2(w-1)R(w),$$

где I – единичная матрица, $w \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{aligned} R(w) &:= w^3 + w^2(1 - \alpha f'(1)) + \\ &+ w\left(1 - \alpha f'(1) - (2-\alpha)H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) - (1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))^2\right) \\ &+ (1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))^2 - (1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty))^2. \end{aligned}$$

Многочлен $R(w)$ не имеет вещественных корней больших 1, так как $R(1) > 0$ и $R'(w) > 0$ при $w \geq 1$. Действительно, благодаря тождеству (111) мы получаем представление $R(1)$ в виде суммы строго положительных слагаемых

$$\begin{aligned} R(1) &= (1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty))((1-\alpha)H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) + 1) \\ &+ (1-\alpha)H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)) \\ &+ \frac{(1-\alpha)H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)(1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)))}{1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)} \\ &+ \frac{(1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty))^2}{1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)}. \end{aligned}$$

Кроме того, если $w \geq 1$, то

$$\begin{aligned} R'(w) &= 3w^2 + 2w(1 - \alpha f'(1)) + 1 - \alpha f'(1) - (2-\alpha)H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) \\ &- (1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))^2 > 3 - 2H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, наибольший положительный корень характеристического многочлена матрицы M есть 1. Тогда согласно теореме Фробениуса (см., например, теорему 2 в [25], гл.4, §5) 1 является перроновым корнем матрицы M. Тем самым, проверена критичность вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса.

Обозначим $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_6)$ и $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_6)$ левый и правый положительные собственные векторы, соответствующие перронову корню матрицы M, такие, что $(\vec{u}, \vec{1}\,) = 1$ и $(\vec{v}, \vec{u}\,) = 1$, где $\vec{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^6$. Учитывая равенство (111), перепишем компоненты $\vec{u}$ и

$\vec{v}$ в удобной форме

$$u_1 = u_4 = u_5 = \frac{1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)}{U}, u_2 = u_3 = u_6 = \frac{H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)}{U}, \tag{112}$$

$$v_1 = \frac{U}{V},\ v_2 = \frac{U(1-\alpha)H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)}{V(1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty))}, v_3 = \frac{U(1-\alpha)(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))}{V}, \tag{113}$$

$$v_4 = v_2(H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)), v_5 = \frac{U(1-\alpha)H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)}{V},\ v_6 = v_2 H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty), \tag{114}$$

где вспомогательные величины U и V определены следующим образом

$$\begin{aligned} U &:= 3(1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) + H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)), \\ V &:= 3 - 2\alpha f'(1) - (2-\alpha)H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty) \\ &+ (1-\alpha)((H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))^2 - (H^-_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0))^2 - (H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty))^2). \end{aligned}$$

Используя разложение $f(1-x) = 1 - f'(1)x + f''(1)x^2/2 + o(x^2)$, $x \to 0+$, наряду с формулами (111)–(114) и определением $\vec{f}(\vec{s}) = (f_1(\vec{s}), \ldots, f_6(\vec{s}))$, нетрудно проверить с помощью стандартных вычислений, что

$$x - \left(\vec{v}, \vec{1} - \vec{f}\left(\vec{1} - \vec{u}x\right)\right) \sim Bx^2, \quad x \to 0+, \quad \text{где} \quad B := \frac{\sigma^2\left(1 - H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(\infty)\right)^2}{2UV}. \tag{115}$$

В следующих двух леммах мы применяем теоремы, установленные в статьях [11] – [14], к построенному ветвящемуся процессу Беллмана-Харриса с шестью типами частиц и затем переформулируем полученные результаты в терминах КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ при $d \geq 5$. Общими для этих теорем являются условия критичности и неразложимости процесса Беллмана-Харриса, которые мы проверили выше. Еще одно общее условие, налагаемое на поведение функции $x - (\vec{v}, \vec{1} - \vec{f}(\vec{1} - \vec{u}x))$, выполнено в силу (115). При этом разные теоремы В.А.Ватутина опираются на различные предположения о порядке убывания хвостов функций $G_k(\cdot)$, $k = 1, \ldots, 6$. Следует напомнить, что асимптотическое поведение этих функций было установлено в теореме 6. А именно, наш результат для $d \leq 5$ соответствует условиям теоремы 1 в [13], в то время как случаи $d = 6$ и $d \geq 7$ охватываются условиями теоремы 3 из [14] и теоремы 2 из [12] соответственно.

Лемма 19 *При $y \in \mathbb{Z}^5$, $y \neq \mathbf{0}$, для КВСБ по $\mathbb{Z}^5$ имеем*

$$q(t; \mathbf{0}, y) = o\left(t^{-3/4}\right), \quad q(t; y, y) = o\left(t^{-3/4}\right), \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Чтобы применить теорему 1 из [13] к процессу Беллмана-Харриса с шестью типами частиц, построенному выше для КВСБ по $\mathbb{Z}^5$, проверим выполнение условий этой теоремы. Согласно определению вектора $\vec{G}(\cdot) = (G_1(\cdot), \ldots, G_6(\cdot))$ и теореме 6 при $d = 5$, величина β в условии 2) теоремы 1 из [13] равняется $3/2$, а функция $L_1(t)$ в том же условии стремится к некоторой постоянной при $t \to \infty$. Справедливость условия 3) теоремы 1 из [13] вытекает из теоремы 1 в [11] (для нашего процесса функция $L_1(t)$ в этой теореме стремится к $1/B$ при $t \to \infty$ в силу (115)), определения вектора $\vec{G}(\cdot)$ и теоремы 6 при $d = 5$. Тем самым, мы вправе применить теорему 1 из [13]. Учитывая утверждение теоремы 6 при $d = 5$ и формулы (112)–(114), выводим из теоремы 1 в [13], что $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_i(s_2^{Z_2(t)}|\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,) = 1$ для каждого $s_2 \in [0,1]$ и $i = 1,2$ (как обычно, $\vec{Z}(t) = (Z_1(t),\ldots,Z_6(t))$ и $\vec{0} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^6$). Полагая $s_2 = 0$ в последнем соотношении, получаем $\mathsf{P}_i(Z_2(t) > 0) = o(\mathsf{P}_i(\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,))$ при $t \to \infty$. Более того, анализируя доказательство теоремы 1 из [13], можем показать, что для нашего процесса Беллмана-Харриса медленно меняющаяся функция $L^*(x)$ в утверждении этой теоремы оказывается эквивалентной $1/\sqrt{B}$ при $x \to 0+$. Следовательно, указанная в статье [13] формула (0.4) может быть уточнена в нашем случае, а именно, функция $\mathsf{P}_i(\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,)$ имеет порядок убывания $t^{-3/4}$ при $t \to \infty$. Следовательно, ввиду связи между КВСБ по $\mathbb{Z}^5$ и вспомогательным ветвящимся процессом Беллмана-Харриса, доказательство леммы 19 завершено.

Лемма 20 *В рамках КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ при $d \geq 6$ имеют место следующие соотношения для $y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$,*

$$q(t;\mathbf{0},y) \sim \frac{2\,m_d}{\sigma^2\,t}, \quad q(t;y,y) \sim \frac{2\,m_d\,G_0(\mathbf{0},y)}{\sigma^2\,G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})\,t}, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Применим теорему 3 из [14] к нашему ветвящемуся процессу Беллмана-Харриса, когда $d = 6$. В этой связи проверим выполнение условий указанной теоремы. В силу (115) соотношение (6) из [14] имеет место для нашего процесса, и функция $L_1(n)$, фигурирующая в (6), сходится к $1/B$ при $n \to \infty$. Равенство (7) в [14] также выполнено благодаря формуле (6) в [14], определению вектора $\vec{G}(\cdot)$ и теореме 6 при $d = 6$. Теперь мы вправе применить теорему 3 из [14]. В частности, из нее следует, что для каждого $i = 1,2$ выражения $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}_i(Z_1(t) = 0|\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,)$ и $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}_i(Z_2(t) = 0|\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,)$ совпадают и являются положительными и строго меньшими 1. Следовательно,

$$\mathsf{P}_i(Z_1(t) > 0) \sim \mathsf{P}_i(Z_2(t) > 0) \text{ при } t \to \infty.$$

Асимптотическое поведение функций $q(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathsf{P}_1(Z_1(t) > 0)$ и $q(t;y,\mathbf{0}) = \mathsf{P}_2(Z_1(t) > 0)$ может быть найдено в [40], леммы 2 и 4. Таким образом, лемма 20 доказана при $d = 6$.

В случае $d \geq 7$ мы применим теорему 2 из [12]. Условие (6) этой теоремы выполняется в силу теоремы 1 из [11] (для нашего процесса функция $L_1(t)$ в последней теореме сходится к $1/B$ при $t \to \infty$), определения вектора $\vec{G}(\cdot)$ и теоремы 6 при $d \geq 7$. Определение $G_k(\cdot)$ и теорема 6 при $d \geq 7$ также влекут, что $\int_0^\infty t\,dG_k < \infty$ для каждого $k = 1,\ldots,6$. Тем самым, все условия теоремы 2 из [12] удовлетворены, и из нее вытекает, что $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}_i(Z_k(t) = 0|\vec{Z}(t) \neq \vec{0}\,) = 0$ для каждого $k = 1,\ldots,6$ и $i = 1,2$. Следовательно, $\mathsf{P}_i(Z_1(t) > 0) \sim \mathsf{P}_i(Z_2(t) > 0)$, $t \to \infty$. Заметим, что асимптотическое поведение функций $q(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathsf{P}_1(Z_1(t) > 0)$ и $q(t;y,\mathbf{0}) = \mathsf{P}_2(Z_1(t) > 0)$ может быть найдено в [40], леммы 2 и 4. Лемма 20 полностью доказана.

Завершая этот раздел, выведем интегральное уравнение относительно функции $q(\cdot;\mathbf{0},y)$, $y \neq \mathbf{0}$, являющееся аналогом уравнения (2.6) из [19] относительно функции $q(\cdot;\mathbf{0},\mathbf{0})$. Новое интегральное уравнение будет существенно использоваться при доказательстве теоремы 8 в случае $d = 4$. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, введем дополнительные обозначения. Положим $h(s) := \alpha(f(1-s) - 1 + f'(1)s)$, $s \in [0,1]$, и $K(t) := \alpha f'(1) G_1(t) + (1-\alpha) G_1 * H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$, где функция вида $H^-_{z,r}(\cdot)$, $z, r \in \mathbb{Z}^d$, такова, что $H_{z,r}(t) = G * H^-_{z,r}(t)$ при всех $t \geq 0$. Заметим, что функции $H_{z,r}(\cdot)$ и $G(\cdot)$ введены в разделе 3. Асимптотические свойства функции распределения $K(t) = K_d(t)$ и ее плотности $k_d(t)$ при $t \to \infty$ были установлены в лемме 11 из [18].

Лемма 21 *Для $y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, имеем*

$$q(t;\mathbf{0},y) = (1-\alpha)G_1 * \left(H^{-}_{\mathbf{0},y}(t) - H_{\mathbf{0},y}(t)\right) + q(\cdot;\mathbf{0},y) * K(t) - h(q(\cdot;\mathbf{0},y)) * G_1(t). \tag{116}$$

Доказательство. Напомним интегральные уравнения (см. [25], гл.8, §1) относительно производящих функций $\vec{F}(t;\vec{s}) := (F_1(t;\vec{s}), \dots, F_6(t;\vec{s}))$ процесса Беллмана-Харриса с шестью типами частиц:

$$F_i(t;\vec{s}) = s_i(1-G_i(t)) + \int_0^t f_i\left(\vec{F}(t-u;\vec{s})\right) dG_i(u),$$

где $t \geq 0$, $s_i \in [0,1]$ и $i = 1,\dots,6$. Полагая здесь $\vec{s} = (1,0,1,1,1,1)$ и подставляя явные формулы для G_j, $j = 3,4,5,6$, и f_i, $i = 1,\dots,6$, мы получаем шесть интегральных уравнений относительно функций $F_i(t) := F_i(t;(1,0,1,1,1,1))$, $t \geq 0$, $i = 1,\dots,6$. Подставляя четвертое и шестое уравнения во второе и решая полученное уравнение восстановления относительно $F_2(\cdot)$, находим

$$\begin{aligned} F_2(t) &= G_2 * \left(1 - H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(t) - H^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0},y} * \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t)\right) \\ &+ F_1 * G_2 * \left(H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0) + \left(H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\cdot) - H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(0)\right) * \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t)\right). \end{aligned}$$

Теперь подставим последнее уравнение, а также третье и пятое уравнения относительно функций F_i, в первое уравнение. После некоторых упрощений приходим к интегральному уравнению относительно функции F_1

$$\begin{aligned} F_1(t) &= 1 - \alpha G_1 * (1 - f(F_1(t))) - (1-\alpha)G_1 * (1 - F_1(\cdot)) * H^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(t) \\ &- (1-\alpha)G_1 * (H^{-}_{\mathbf{0},y}(t) - H_{\mathbf{0},y}(t)) \end{aligned} \tag{117}$$

при условии, что два следующих равенства верны

$$\begin{aligned} H^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(t) &= H^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t) + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}} * H^{*k}_{y,y,\mathbf{0}} * H_{y,\mathbf{0},y}(t), \\ H^{-}_{\mathbf{0},y}(t) &= H^{-}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}} * \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{\mathbf{0},\mathbf{0},y}(t) \end{aligned}$$

для каждого $t \geq 0$. Первое из них справедливо, поскольку любая траектория из $\mathbf{0}$ в $\mathbf{0}$ частицы, совершающей случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$, либо проходит через точку y ровно k раз, $k = 1,2,\dots$, либо не достигает точки y до первого возвращения в $\mathbf{0}$. Аналогичные рассуждения оправдывают второе равенство. Напомним, что в силу связи между КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ и построенным процессом Беллмана-Харриса имеем

$$q(t;\mathbf{0},y) = \mathsf{P}_1(Z_2(t) > 0) = 1 - F_1(t).$$

Следовательно, переписывая (117) как уравнение относительно функции $q(t;\mathbf{0},y)$, приходим к (116). Лемма 21 доказана.

4.4 Предельные теоремы для локальных численностей частиц

В данном разделе мы установим теоремы 8 и 9. Прежде всего, выведем несколько интегральных уравнений, которые нам понадобятся в этом разделе. Рассмотрим уравнение

(104) как неоднородное относительно дифференциального уравнения (103) в банаховом пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$. Согласно формуле вариации постоянной заключаем (аналогичный вывод см. в [39]), что

$$q(s,t;x,y) = (1-s)m(t;x,y) - \int_0^t m(t-u;x,\mathbf{0})h(q(s,u;\mathbf{0},y))\,du, \tag{118}$$

где $q(s,t;x,y) = 1 - F(s,t;x,y)$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, а функция $h(\cdot)$ была введена в разделе 4.3. Подставляя в последнее уравнение $x = \mathbf{0}$, приходим к интегральному уравнению относительно функции $q(s,t;\mathbf{0},y)$

$$q(s,t;\mathbf{0},y) = (1-s)m(t;\mathbf{0},y) - \int_0^t m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})h(q(s,u;\mathbf{0},y))\,du. \tag{119}$$

Заметим, что $q(0,t;x,y)$ равняется $q(t;x,y)$. Поэтому из (118) вытекает, что

$$q(t;x,y) = m(t;x,y) - \int_0^t m(t-u;x,\mathbf{0})h(q(u;\mathbf{0},y))\,du. \tag{120}$$

Подставляя в (120) $x = \mathbf{0}$, получаем интегральное уравнение относительно функции $q(t;\mathbf{0},y)$

$$q(t;\mathbf{0},y) = m(t;\mathbf{0},y) - \int_0^t m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})h(q(u;\mathbf{0},y))\,du. \tag{121}$$

Теперь докажем теоремы 8 и 9 при $x = \mathbf{0}$. Поскольку их доказательства существенно зависят от размерности $d \in \mathbb{N}$, мы вынуждены рассмотреть отдельно случаи $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$ и $d \geq 5$. Очевидно, теорема 8 для $x = \mathbf{0}$ и $d \geq 6$ вытекает из леммы 20. В силу лемм 17, 18, 19 и уравнения (121) доказательство теоремы 8 при $x = \mathbf{0}$ для случаев $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ и $d = 5$ следует схемам доказательств соответственно теоремы 2 из [53], теоремы 2 из [5], теоремы 4 из [18] (пункт 3) и теоремы 4 из [18] (пункт 4). Более того, в силу леммы 21 доказательство теоремы 8 при $x = \mathbf{0}$ и $d = 4$ аналогично доказательству теоремы 1.1 из [19]. Таким образом, мы дадим только несколько комментариев по поводу доказательства теоремы 8 для $x = \mathbf{0}$ и $d \leq 5$.

Если $d = 1$, то имеет место равенство $\int_0^\infty h(q(u;\mathbf{0},y))\,du = (1-\alpha)a^{-1}$. Далее, в силу (51), (52), (107), (108) и теоремы 5 из [18] получаем полезную оценку

$$m(t;\mathbf{0},y) - (1-\alpha)a^{-1}m(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = O\left(t^{-3/2}\right), \quad t \to \infty.$$

При $d = 2$ верно строгое неравенство $J(0;y) = \int\limits_0^\infty h(q(u;\mathbf{0},y))\,du < (1-\alpha)a^{-1}$. Однако, если $d = 3$, то $\int_0^\infty h(q(u;\mathbf{0},y))\,du = (1-\alpha)a^{-1}G_0(\mathbf{0},y)G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ и

$$m(t;\mathbf{0},y) - (1-\alpha)a^{-1}G_0(\mathbf{0},y)G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})\,m(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = O(t^{-1}), \quad t \to \infty,$$

ввиду (51), (52), (108) и теоремы 5 из [18]. Для $d = 4$ первое слагаемое в (116) есть $o(t^{-1})$, $t \to \infty$, в силу леммы 13, и оно не вносит вклада в главный член асимптотического поведения функции $q(t;\mathbf{0},y)$. Что касается $d = 5$, то с помощью соотношений (51), (52), (108), теоремы 5 и следствия 1 из [18] устанавливаем, что

$$\int_0^\infty h(q(u;\mathbf{0},y))\,du = (1-\alpha)a^{-1}G_0(\mathbf{0},y)G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})$$

и
$$m(t;\mathbf{0},y)-(1-\alpha)a^{-1}G_0(\mathbf{0},y)G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})\,m(t;\mathbf{0},\mathbf{0})=O\left(t^{-3/2}\right),\quad t\to\infty.$$
Тем самым, теорема 8 доказана для $x=\mathbf{0}$.

Обратимся к доказательству теоремы 9 при $x=\mathbf{0}$. Для $d=1,3$, $d=2$ и $d\geq 5$ оно аналогично доказательствам соответственно теоремы 4 из [52], теоремы 2 из [5] и теоремы 4 из [40]. Заметим только, что постоянная c^*, возникающая в доказательстве теоремы 9 при $x=\mathbf{0}$, в отличие от своего аналога в теореме 4 из [52], равняется $\sigma^2\gamma_1^2 a/(2(1-\alpha))$ и $\sigma^2 aG_0^3(\mathbf{0},\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},y)/(8\pi^2\gamma_3^2(1-\alpha))$ соответственно для $d=1$ и $d=3$. Наконец, постоянная c_d^*, появляющаяся в теореме 4 из [40], в случае теоремы 9 при $x=\mathbf{0}$ и $d\geq 5$ равна $(1-\alpha)G_0(\mathbf{0},y)\sigma^2/\left(2a\,G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})m_d^2\right)$. Поскольку предельная теорема для $\mu(t;\mathbf{0})$ при $d=4$ была установлена с помощью иного подхода, а именно метода моментов, мы дадим подробное доказательство предельной теоремы для $\mu(t;y)$ при $d=4$. Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 9 при $x=\mathbf{0}$, рассмотрим детально случай $d=4$.

Обозначим
$$s(t):=s(t;\lambda)=\exp\left\{-\frac{\lambda\ln^2 t}{c^*t}\right\},\quad t>0,\quad \lambda\geq 0,$$
где постоянная $c^*:=\sigma^2 aG_0^3(\mathbf{0},\mathbf{0})G_0(\mathbf{0},y)/(3\gamma_4^2(1-\alpha))$. В силу теорем 7 и 8 для $x=\mathbf{0}$ и $d=4$ видим, что
$$\mathsf{E}_{\mathbf{0}}\left(\mu(t;y)|\,\mu(t;y)>0\right)=\frac{m(t;\mathbf{0},y)}{q(t;\mathbf{0},y)}\sim\frac{c^*t}{\ln^2 t},\quad t\to\infty. \tag{122}$$
Неравенство $1-e^{-z}\leq z$ при $z\geq 0$ влечет оценку
$$\begin{aligned} q(s(t),u;\mathbf{0},y) &= \mathsf{E}_{\mathbf{0}}\left(1-\exp\left\{-\frac{\lambda\ln^2 t\,\mu(u;y)}{c^*t}\right\}\right)\\ &\leq \frac{\lambda\ln^2 t}{c^*t}\mathsf{E}_{\mathbf{0}}\mu(u;y)=\frac{\lambda\ln^2 t}{c^*t}m(u;\mathbf{0},y),\end{aligned}$$
где $u\geq 0$ и $t>0$. Ввиду этой оценки, а также теоремы 7 и неравенства $h(z)\leq\sigma^2z^2$ (справедливого при достаточно малых $z\geq 0$), для достаточно больших t имеем
$$\begin{aligned} &\int_0^{t/\ln^3 t} m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})h(q(s(t),u;\mathbf{0},y))du\\ \leq\; &\frac{\sigma^2\lambda^2\ln^4 t}{c^{*2}t^2}\int_0^{t/\ln^3 t} m^2(u;\mathbf{0},y)m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})du=\frac{\nu_1(t;\lambda)\ln t}{t}.\end{aligned} \tag{123}$$
Здесь $\nu_1\in\mathcal{U}$, а функциональный класс $\mathcal{U}$ определен в разделе 2. Аналогичным образом получаем
$$\begin{aligned} &\int_{t-t/\ln^2 t}^{t} m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})h(q(s(t),u;\mathbf{0},y))du\\ \leq\; &\frac{\sigma^2\lambda^2\ln^4 t}{c^{*2}t^2}\int_{t-t/\ln^2 t}^{t} m^2(u;\mathbf{0},y)m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})du=\frac{\nu_2(t;\lambda)\ln t}{t}\end{aligned} \tag{124}$$
для $\nu_2\in\mathcal{U}$. Нетрудно проверить, что равномерно по $u\in[t/\ln^3 t, t-t/\ln^2 t]$
$$\ln u\sim\ln t,\quad \ln(t-u)\sim\ln t,\quad t\to\infty. \tag{125}$$

Эти факты, теорема 7 и соотношение $h(z) \sim \sigma^2 z^2/2,\ z \to 0$, позволяют утверждать, что

$$\begin{aligned} I(t;\lambda): &= \int_{t/\ln^3 t}^{t-t/\ln^2 t} h(q(s(t),u;\mathbf{0},y))m(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})du \\ &= \frac{\sigma^2 m(t;\mathbf{0},\mathbf{0})}{2}\int_{t/\ln^3 t}^{t-t/\ln^2 t} q^2(s(t),u;\mathbf{0},y)du\ (1+\nu_3(t;\lambda)), \end{aligned}$$

где $\nu_3 \in \mathcal{U}$. После замены переменных $u = tv$ и применения теорем 7 и 8 для $x = \mathbf{0}$ и $d = 4$ получаем

$$I(t;\lambda) = \frac{3}{2q(t;\ \mathbf{0},y)}\int_{1/\ln^3 t}^{1-1/\ln^2 t} q^2(s(t),tv;\mathbf{0},y)\,dv\ (1+\nu_4(t;\lambda)), \quad \nu_4 \in \mathcal{U}. \tag{126}$$

В последнем интеграле функция $q(s(t;\lambda),tv;\mathbf{0},y)$ может быть заменена $q(s(tv;\lambda v),tv;\mathbf{0},y)$. В самом деле, поскольку $1-e^{-z} \le z$ при $z \ge 0$, то

$$\begin{aligned} & |q(s(t;\lambda),tv;\mathbf{0},y) - q(s(tv;\lambda v),tv;\mathbf{0},y)| \\ = & \ \mathsf{E}_{\mathbf{0}}\left(\exp\left\{-\frac{\lambda v\ln^2(tv)}{c^* tv}\mu(tv;y)\right\} - \exp\left\{-\frac{\lambda\ln^2 t}{c^* t}\mu(tv;y)\right\}\right) \\ \le & \ \mathsf{E}_{\mathbf{0}}\left(1-\exp\left\{-\frac{\lambda(-2\ln t\ln v - \ln^2 v)}{c^* t}\mu(tv;y)\right\}\right) \\ \le & \ \frac{\lambda(-2\ln t\ln v - \ln^2 v)}{c^* t} m(tv;\mathbf{0},y). \end{aligned}$$

Функции $z\ln z$ и $z\ln^2 z$ ограничены при $z \in (0,1)$, поэтому в силу теорем 7 и 8 при $x = \mathbf{0}$, а также соотношения (125), мы видим, что равномерно по $v \in [1/\ln^3 t, 1-1/\ln^2 t]$ и $\lambda \in [0,\Lambda]$, где Λ – произвольное положительное число,

$$\frac{q(s(t;\lambda),tv;\mathbf{0},y)}{q(tv;\mathbf{0},y)} - \frac{q(s(tv;\lambda v),tv;\mathbf{0},y)}{q(tv;\mathbf{0},y)} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{127}$$

Положим

$$\psi(t;\lambda) := \frac{q(s(t;\lambda),t;\mathbf{0},y)}{\lambda q(t;\mathbf{0},y)}, \quad t > 0, \quad \lambda > 0.$$

Тогда поделив обе части уравнения (119) на $\lambda q(t;\mathbf{0},y)$ и учитывая формулы (123)–(127) наряду с теоремой 8 для $x = \mathbf{0}$ и соотношением $1-e^{-z} \sim z,\ z \to 0$, получаем

$$\psi(t;\lambda) = 1 + \nu_5(t;\lambda) - \frac{3\lambda}{2}\int_{1/\ln^3 t}^{1-1/\ln^2 t} \psi^2(tv;\lambda v)\,dv, \quad \nu_5 \in \mathcal{U}.$$

Замена переменных $w = \lambda v$ приводит к следующему соотношению

$$\psi(t;\lambda) = 1 + \nu_5(t;\lambda) - \frac{3}{2}\int_{\lambda/\ln^3 t}^{\lambda(1-1/\ln^2 t)} \psi^2\left(\frac{t\,w}{\lambda};w\right)dw.$$

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4 из [52], позволяют написать

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t;\lambda) = \psi(\lambda) = \frac{2}{3\lambda+2}, \quad 0 < \lambda \le \Lambda_0, \tag{128}$$

где Λ_0 – некоторое положительное число и $\psi(\lambda)$ – единственное решение уравнения

$$\psi(\lambda) = 1 - \frac{3}{2}\int_0^\lambda \psi^2(w)\,dw, \quad \lambda \geq 0.$$

Вспоминая определение функции $\psi(t;\lambda)$, перепишем соотношение (128) в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_{\mathbf{0}} \left\{ \exp\left\{ -\frac{\lambda \ln^2 t\,\mu(t;y)}{c^* t} \right\} \middle| \mu(t;y) > 0 \right\} = 1 - \lambda \lim_{t\to\infty} \psi(t;\lambda) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3\lambda+2} \tag{129}$$

для $0 < \lambda \leq \Lambda_0$. Поскольку и преобразование Лапласа неотрицательной случайной величины, и функция $1/3 + 2/3 \cdot 2/(3\lambda+2)$ являются аналитическими и ограниченными в области $\{\lambda : Re\,\lambda > 0\} \subset \mathbb{C}$, то в силу теоремы единственности для аналитических функций соотношение (129) верно для каждого λ с $Re\,\lambda > 0$ (аналогичный вывод см., например, в [15]). Объединяя соотношения (122) и (129), мы завершаем доказательство теоремы 9 для $x = \mathbf{0}$ и $d = 4$. Таким образом, теорема 9 доказана для $x = \mathbf{0}$.

Теперь докажем теоремы 8 и 9, когда $x \neq \mathbf{0}$. Для этого выведем еще несколько интегральных уравнений. В рамках КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ родительская частица может за время $[0,t]$ либо достичь точки $\mathbf{0}$, либо не достичь ее. В последнем случае в момент времени t на решетке $\mathbb{Z}^d$ находится одна частица, расположенная либо в точке y, либо вне ее. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)} &= \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mathbb{I}(\tau_{\mathbf{0}} \leq t) + \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mathbb{I}(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 1) \\ &+ \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mathbb{I}(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 0) = \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mathbb{I}(\tau_{\mathbf{0}} \leq t) \\ &+ s\mathsf{P}_x(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 1) + \mathsf{P}_x(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 0). \end{aligned} \tag{130}$$

Очевидно, первое слагаемое в (130) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}\mathbb{I}(\tau_{\mathbf{0}} \leq t) = \int\limits_{\{\tau_{\mathbf{0}} \leq t\}} s^{\mu(t;y)}\,d\,\mathsf{P}_x &= \int\limits_{\{\tau_{\mathbf{0}} \leq t\}} \mathsf{E}_x \left(s^{\mu(t;y)} \middle| \tau_{\mathbf{0}} \right) d\,\mathsf{P}_x \\ = \int_0^t \mathsf{E}_x \left(s^{\mu(t;y)} \middle| \tau_{\mathbf{0}} = u \right) dH_{x,\mathbf{0}}(u) &= \int_0^t \mathsf{E}_{\mathbf{0}} s^{\mu(t-u;y)}\,dH_{x,\mathbf{0}}(u). \end{aligned} \tag{131}$$

Легко видеть, что вероятность, фигурирующая во втором слагаемом в (130), может быть представлена следующим образом

$$\mathsf{P}_x(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 1) = H_{x,y,\mathbf{0}} * \sum\nolimits_{k=0}^\infty H_{y,y,\mathbf{0}}^{*k} * (1 - G_2(t)), \quad x \neq y, \tag{132}$$

$$\mathsf{P}_y(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 1) = \sum\nolimits_{k=0}^\infty H_{y,y,\mathbf{0}}^{*k} * (1 - G_2(t)). \tag{133}$$

Также удобно переписать третье слагаемое в (130) в форме

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_x(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 0) &= 1 - H_{x,\mathbf{0}}(t) \\ &- H_{x,y,\mathbf{0}} * \sum\nolimits_{k=0}^\infty H_{y,y,\mathbf{0}}^{*k} * (1 - G_2(t)), \quad x \neq y, \end{aligned} \tag{134}$$

$$\mathsf{P}_y(\tau_{\mathbf{0}} > t, \mu(t;y) = 0) = 1 - H_{y,\mathbf{0}}(t) - \sum\nolimits_{k=0}^\infty H_{y,y,\mathbf{0}}^{*k} * (1 - G_2(t)). \tag{135}$$

Объединяя результаты (130)–(135), приходим к искомым интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} q(s,t;x,y) &= (1-s)H_{x,y,\mathbf{0}} * \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{y,y,\mathbf{0}} * (1-G_2(t)) \\ &+ \int_0^t q(s,t-u;\mathbf{0},y)\,dH_{x,\mathbf{0}}(u), \quad x \neq y, \\ q(s,t;y,y) &= (1-s)\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{y,y,\mathbf{0}} * (1-G_2(t)) + \int_0^t q(s,t-u;\mathbf{0},y)\,dH_{y,\mathbf{0}}(u). \end{aligned}$$

В частности, при $s=0$ имеем

$$\begin{aligned} q(t;x,y) &= H_{x,y,\mathbf{0}} * \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{y,y,\mathbf{0}} * (1-G_2(t)) \\ &+ \int_0^t q(t-u;\mathbf{0},y)\,dH_{x,\mathbf{0}}(u), \quad x \neq y, \qquad (136) \\ q(t;y,y) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^{*k}_{y,y,\mathbf{0}} * (1-G_2(t)) + \int_0^t q(t-u;\mathbf{0},y)\,dH_{y,\mathbf{0}}(u). \qquad (137) \end{aligned}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 8 и 9 при $x \neq \mathbf{0}$. Чтобы установить теорему 8 при $x \neq \mathbf{0}$ и $d \neq 2$, используем уравнения (136) и (137). Нетрудно видеть, что первые слагаемые в правых частях уравнений (136) и (137) равны

$$p(t;x,y) - \int_0^t p(t-u;\mathbf{0},y)\,dH_{x,\mathbf{0}}(u)$$

для $x \neq y$ и $x = y$ соответственно. Последнее выражение может быть переписано следующим образом

$$\begin{aligned} & p(t;x,y) - \int_0^t p(t-u;\mathbf{0},y)dH_{x,\mathbf{0}}(u) \\ = \; & p(t;x,y) - p(t;x,\mathbf{0}) + \int_0^t (p(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0}) - p(t-u;\mathbf{0},y))dH_{x,\mathbf{0}}(u) \qquad (138) \end{aligned}$$

в силу очевидного тождества

$$p(t;x,\mathbf{0}) = \int_0^t p(t-u;\mathbf{0},\mathbf{0})\,dH_{x,\mathbf{0}}(u).$$

Асимптотическое поведение первого слагаемого в правой части соотношения (138) дается формулой (52), а асимптотика второго слагаемого в (138) может быть найдена с помощью соотношения (52), леммы 3 из [40] и леммы 5.1.2 из [33]. Таким образом, первые слагаемые в (136) и (137) есть $O(t^{-3/2})$ при $d=1$ и $O(t^{-d/2})$ при $d \geq 3$. Следовательно, первые слагаемые в (136) и (137) есть $o(q(t;\mathbf{0},y))$ при $t \to \infty$ в силу теоремы 8 при $x = \mathbf{0}$. Более того, с учетом леммы 3 из [40] и леммы 5.1.2 из [33] мы обнаруживаем, что последние слагаемые в (136) и (137) эквивалентны $q(t;\mathbf{0},y)$ и $q(t;\mathbf{0},y)\,G_0(x,\mathbf{0})G_0^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ при $d=1$ и $d \geq 3$ соответственно. Тем самым, теорема 8 доказана для $x \neq \mathbf{0}$ и $d \neq 2$. Что касается теоремы 8 при $x \neq \mathbf{0}$ и $d = 2$, а также теоремы 9 для $x \neq \mathbf{0}$, мы только отметим, что их доказательства основаны на анализе уравнений (118) и (120). Поскольку эти доказательства аналогичны доказательствам теоремы 5 из [40], то они опускаются. Тем самым, теоремы 8 и 9 полностью доказаны.

4.5 Применение результатов второго раздела к ветвящемуся случайному блужданию

Применим результаты раздела 2 к КВСБ по $\mathbb{Z}^2$, стартующем в начале координат, и, тем самым, докажем теорему 10. С этой целью введем вспомогательный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, следуя подходу, предложенному в [53].

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ существует одна частица первого типа. Частица первого типа имеет функцию распределения времени жизни $\chi_1(t) := 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$, а производящую функцию численностей потомков $g_1(s_1, s_2) := \alpha f(s_1) + (1-\alpha)s_2$, где $s_1, s_2 \in [0,1]$. При этом положим функцию распределения времени жизни частицы второго типа равной $\chi_2(t) := H^-_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$, а соответствующую производящую функцию численностей непосредственных потомков равной $g_2(s_1, s_2) := s_1$, где $s_1, s_2 \in [0,1]$. Заметим, что в силу леммы 13 справедливо асимптотическое равенство

$$1 - \chi_2(t) \sim \frac{1}{a\,\gamma_2 \ln t}, \quad t \to \infty.$$

Обозначим $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, число частиц типа i, существующих во введенном двутипном ветвящемся процессе Беллмана-Харриса в момент t. Ясно, что

$$(\mu(t;\mathbf{0}), \eta(t;\mathbf{0})) \stackrel{Law}{=} (\xi_1(t), \xi_2(t)) \quad t \geq 0.$$

Положим $\chi_3(t) := \alpha\chi_1(t) + (1-\alpha)\chi_1 * \chi_2(t)$ и $V_\chi(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \chi_3^{*k}(t)$, $t \geq 0$. Пусть $v_\chi(t)$ обозначает плотность функции восстановления $V_\chi(t)$. Из раздела 2.2 следует, что $\mathsf{E}\xi_1(t) = (1 - \chi_1(\cdot)) * V_\chi(t)$. В силу равенства $m(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathsf{E}\xi_1(t)$ отсюда вытекает, что $m'(t;\mathbf{0},\mathbf{0}) = v_\chi(t) - m(t;\mathbf{0},\mathbf{0})$. Воспользовавшись теперь теоремой 5 из [18] при $d = 2$, находим асимптотическое поведение функции $v_\chi(t)$, а именно

$$v_\chi(t) \sim \frac{a\,\gamma_2}{(1-\alpha)\,t}, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, условие (2) раздела 2 выполнено, и мы вправе применить теоремы 1, 2 и 3 к построенному ветвящемуся процессу Беллмана-Харриса с двумя типами частиц. В частности, с учетом связи между введенным ветвящимся процессом и КВСБ по $\mathbb{Z}^2$ заключаем, что теорема 3 влечет теорему 10. Теорема 10 доказана.

Список литературы

[1] В. И. Афанасьев. *Случайные блуждания и ветвящиеся процессы.* МИАН, Москва, 2007.

[2] Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая. Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. *Докл. РАН*, 363(4):439–442, 1998.

[3] А. А. Боровков. *Теория вероятностей.* Книжный дом "Либроком", Москва, 2009.

[4] Н. Г. Брейн. *Асимптотические методы в анализе.* Иностранная литература, Москва, 1961.

[5] Е. Вл. Булинская. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке. *Теор. вероятн. и примен.*, 55(1):142–148, 2010.

[6] Е. Вл. Булинская. Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании. *Матем. заметки*, 90(6):845–859, 2011.

[7] Е. Вл. Булинская. Предельные теоремы для локальных численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании. *Докл. РАН*, 444(6):593–596, 2012.

[8] Е. Вл. Булинская. Времена достижения с запретом для случайного блуждания. *Матем. труды*, 15(1):3–26, 2012.

[9] Е. Вл. Булинская. Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков. *Тр. МИАН*, 282:69–79, 2013.

[10] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. *Теория случайных процессов.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.

[11] В. А. Ватутин. Предельные теоремы для критических марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. *Матем. сб.*, 103(145)(2(6)):253–264, 1977.

[12] В. А. Ватутин. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. *Теория вероятн. и примен.*, 23(4):807–818, 1978.

[13] В. А. Ватутин. Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц. *Теория вероятн. и примен.*, 24(3):503–514, 1979.

[14] В. А. Ватутин. Об одном классе критических ветвящихся процессов Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц. *Теория вероятн. и примен.*, 25(4):771–781, 1980.

[15] В. А. Ватутин. Критические ветвящиеся процессы Беллмана-Харриса, начинающиеся с большого числа частиц. *Матем. заметки*, 40(4):527–541, 1986.

[16] В. А. Ватутин. *Ветвящиеся процессы Беллмана-Харриса.* МИАН, Москва, 2009.

[17] В. А. Ватутин, В. А. Топчий. Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и примен.*, 49(3):461–484, 2004.

[18] В. А. Ватутин, В. А. Топчий. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления. *Мат. труды*, 14(2):28–72, 2011.

[19] В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Ю. Ху. Ветвящееся случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^4$ с ветвлением лишь в начале координат. *Теория вероятн. и примен.*, 56(2):224–247, 2011.

[20] И. И. Гихман, А. В. Скороход. *Теория случайных процессов*, том 2. Наука, Москва, 1973.

[21] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.* Наука, Москва, 1970.

[22] А. М. Зубков. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.*, 109(151)(4(8)):491–532, 1979.

[23] А. Н. Колмогоров, Н. А. Дмитриев. Ветвящиеся случайные процессы. *Докл. АН СССР*, 56:5–8, 1947.

[24] Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами. *Теория вероятн. и примен.*, 3(2):121–136, 1958.

[25] Б. А. Севастьянов. *Ветвящиеся процессы.* Наука, Москва, 1971.

[26] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, том 2. Мир, Москва, 1984.

[27] Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том 2. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2001.

[28] Т. Харрис. *Теория ветвящихся случайных процессов.* Мир, Москва, 1966.

[29] К. Л. Чжун. *Однородные цепи Маркова.* Мир, Москва, 1964.

[30] А. Н. Ширяев. *Вероятность*, volume 1. МЦНМО, Москва, 2004.

[31] Е. Б. Яровая. Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве. *Теор. и матем. физ.*, 88(1):25–30, 1991.

[32] Е. Б. Яровая. Предельная теорема для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с одним источником. *Успехи матем. наук*, 60(1):175–176, 2005.

[33] Е. Б. Яровая. *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* Изд-во мехмата МГУ, Москва, 2007.

[34] Е. Б. Яровая. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и примен.*, 55(4):705–731, 2010.

[35] Е. Б. Яровая. Монотонность вероятности возвращения в источник в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Вестник МГУ, сер. Матем*, (2):44–47, 2010.

[36] Е. Б. Яровая. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Матем. заметки*, 92(1):47–72, 2012.

[37] S. Albeverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaya. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.*, 326:975–980, 1998.

[38] P. Brémaud. *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte-Carlo Simulation, and Queues*. Springer, New York, 1999.

[39] E. Vl. Bulinskaya. Catalytic branching random walk on three-dimensional lattice. *Theory Stoch. Proc.*, 16(2):23–32, 2010.

[40] E. Vl. Bulinskaya. Limit distributions arising in branching random walks on integer lattices. *Lithuanian Math. J.*, 51(3):310–321, 2011.

[41] E. Vl. Bulinskaya. Local particles numbers in critical branching random walk. *J. Theoret. Probab.*, DOI: 10.1007/s10959-012-0441-4, 2012.

[42] E. Vl. Bulinskaya. Catalytic branching processes via hitting times with taboo and Bellman-Harris processes. *Abstracts of Communications of the 29-th European Meeting of Statisticians*, Budapest (Hungary), July 20-25, 2013, 62–62.

[43] E. Vl. Bulinskaya. Finiteness of hitting times under taboo. *Statist. Probab. Lett.*, 85(1):15–19, 2014.

[44] Ph. Carmona, Y. Hu. The spread of a catalytic branching random walk. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 2014, available at http://arxiv.org/pdf/1202.0637v2.pdf.

[45] D. Dawson, K. Fleischmann. A super-brownian motion with a single point catalyst. *Stoch. Proc. Appl.*, 49:3–40, 1994.

[46] L. Doering, M. Roberts. Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory. In: Donati-Martin C., et al. (Eds.), *Séminaire de Probabilités* XLV, *Lecture Notes in Math.*, 2078:305–322, 2013.

[47] K. Fleischmann, J-F. Le Gall. A new approach to the single point catalytic super-brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, 102:63–82, 1995.

[48] P. Haccou, P. Jagers, V. A. Vatutin. *Branching Processes in Biology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[49] S. Karlin, H. M. Taylor. *A Second Course in Stochastic Processes.* Academic Press, San Diego, 1981.

[50] G. F. Lawler, V. Limic. *Random Walk: A Modern Introduction.* Cambridge University Press, New York, 2010.

[51] R. Syski. *Passage Times for Markov Chains.* IOS Press, Amsterdam, 1992.

[52] V. A. Topchii, V. A. Vatutin. Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk. *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. (electronic)*, 6:325–332, 2003.

[53] V. A. Vatutin, V. A. Topchii, E. B. Yarovaya. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. *Theory Probab. and Math. Statist.*, (69):1–15, 2004.

[54] V. Vatutin, J. Xiong. Some limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks. *Acta Mathematica Sinica*, 23(6):997–1012, 2007.