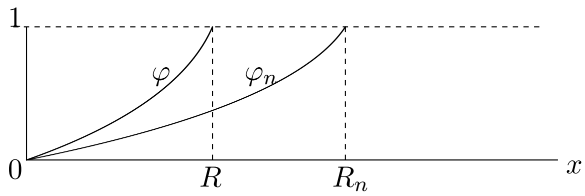
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство,
$T : \Omega \to \Omega$ — измеримое отображение,
$T^{n+1}(\omega) := T(T^n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
T^0 — тождественное отображение.
ξ — случайная величина, $\xi_n(\omega) := \xi(T^n(\omega))$.

Пусть $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^n$ — степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$. Предположим, что $\varphi(R) < \infty$. Пусть $\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^n$ — n-я частичная сумма этого ряда. Определим R_n равенством $\varphi(R_n) = \varphi(R)$.

Сравним $\varphi'(R)$ и $\varphi'_n(R_n)$. Логически возможны три случая: 1) всегда $\varphi'(R) \leq \varphi'_n(R_n)$, 2) всегда $\varphi'(R) \geq \varphi'_n(R_n)$, 3) иногда верно первое, а иногда второе.



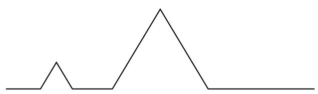
Темы курсовых работ. Эти темы скорее являются напрвлениями, внутри каждого из которых может быть несколько более конкретных тем.

1. Символические цепи Маркова.

Обычная цепь Маркова с конечным или счетным числом состояний — это последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, в которой при каждом $n > 1$ условное распределение величины ξ_n при условии $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ зависит только от ξ_{n-1}. Ей отвечает ориентированный граф, вершины которого — это значения случайных величин ξ_i (состояния), а ребро проведено из одной вершины в другую в том и только в том случае, когда вероятность перехода из первой во вторую положительна. В теории символических цепей Маркова ориентированный граф фиксируется, а значения переходных вероятностей можно менять. Одна из типичных задач: как выбрать вероятности перехода, чтобы получилась "наиболее случайная" цепь Маркова? Что значит "наиболее случайная", можно определить точно, но пока достаточно понимать это интуитивно. Эта задача имеет отношение к статистической физике.

2. Случайные фрактальные множества.

Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части, построим на средней из них правильный треугольник и удалим его основание. Получится ломаная из четырех звеньев, каждое длиной $1/3$. С этими звеньями сделаем то же самое, что только что сделали с единичным отрезком, и т.д. Можно показать, что в пределе получится непрерывная кривая, которая не является гладкой ни в одной точке. Норвежский математик Н. Ф. Х. фон Кох придумал эту конструкцию (в начале прошлого века), чтобы показать, что пример с теми же свойствами, что у знаменитой функции Вейерштрасса, можно получить средствами элементарной геометрии. У этой кривой есть и другие интересные свойства. Кривая Коха — один из простейших примеров фрактального множества: в то время как размерность (понимаемая в любом разумном смысле) всякой гладкой кривой равна единице, а гладкой поверхности — двум, у кривой Коха она принимает промежуточное дробное значение.



Если к первоначальному отрезку добавить еще два так, чтобы получился правильный треугольник, и каждую его сторону превратить в кривую Коха, то получится множество, называемое снежинкой Коха, оно (а точнее, его допредельный вариант) действительно похоже на снежинку (достаточно заглянуть в Интернет). В конструкцию Коха можно разными способами ввести случайность. Например, на каждом шаге можно бросать монету и при одном исходе строить треугольник на очередном звене, а при другом — сразу переходить к следующему звену. Возникает много вопросов о свойствах предельной кривой (в первую очередь надо понять, в каком смысле она существует). На некоторые из них получить ответ довольно легко, другие гораздо труднее, но и интереснее. Во всяком случае, здесь открывается широкое поле деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

П. Биллингслей. Эргодическая теория и информация.

Я.Г. Синай. Введение в эргодическую теорию.

Р. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах.