10 Теорема Гартнера-Эллиса

Принцип больших уклонений можно сформулировать и для значительно более общей модели. Пусть Z_1,...,Z_n — некоторые случайные векторы, $R_{Z_n}(\vec{h}) = \mathbf{E}\exp(\langle\vec{h}, Z_n\rangle)$. Предположим, что существует предел

$$\ln R(\vec{h}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln R_{Z_n}(n\vec{h}),$$

причем $R(\vec{h})$ конечна на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ и $\ln R$ дифференцируема на этом множестве. Как и прежде положим $\Lambda(\vec{\theta}) = \sup_h((\theta, h) - \ln R(h))$.

Замечание 1. Определенные выше функции обладают следующими свойствами:

1. Функция R выпуклая ф-ия, Λ выпуклая ф-ия роста.

2. Если найдется h: $grad \ln R(\vec{h}) = \vec{\theta}$, то $\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h})$.

Доказательство части 2) и второй половины 1) повторяет уже проведенные доказательства для теоремы Крамера. Выпуклость R следует из выпуклости R_{Z_n}.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Гартнер-Эллис)**.** . *Если $\ln R$ гладкая, непрерывная снизу функция, то $P(\vec{Z_n} \in A)$ удовляет ПБУ с $\Lambda(\vec{\theta})$.*

Доказательство. 1) Получим оценку сверху, т.е. для любого замкнутого F покажем, что

$$\limsup \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z_n} \in F) \leq -\inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

1.1) Докажем оценку для компактного F. Для окрестности $U_\delta(\vec{\theta})$

$$\mathbf{P}(Z_n \in U_\delta(\vec{\theta})) \leq \mathbf{E}e^{(\vec{h}n,\vec{Z}_n)} \exp\left(-\inf_{\vec{y}\in U_\delta(\vec{\theta})} (\vec{h}, y)\right) \leq R_n(n\vec{h})e^{-n(\vec{h},\vec{x})}e^{\delta|\vec{h}|n}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ для каждого $\vec{\theta} \in F$ найдутся $\delta = \delta(\vec{\theta})$, $\vec{h}$, такие что $\delta|\vec{h}| < \varepsilon$, $\Lambda(\vec{\theta}) \leq (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) + \varepsilon$. Для каждой точки $\vec{\theta} \in F$ рассмотрим $U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})$. Тогда мы имеем покрытие компакта F такими окрестностями, из которого можно выбрать конечное подпокрытие, центры окрестностей которого мы назовем $\vec{\theta}_i$, $i \le N$. Имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})) \le 2\varepsilon - \Lambda(\vec{\theta}).$$

Рассмотрим покрытие компакта F открытыми шарами с центрами $\vec{\theta}_i$ и радиусами $\delta(\vec{\theta}_i)$. Выбирая из него конечное подпокрытие, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \le 2\varepsilon - \inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Отсюда для компактного F имеем верхнюю оценку. 1.2) Мы доказали для компактного F и теперь хотим доказать для произвольного замкнутого.

Будем считать, что $\inf_F \Lambda(\vec{\theta})$ конечный, в противном случае доказа Введем $F_M = F \cap [-M, M]^d$ и для компакта F_M воспользуемся предыдущим свойством, откуда

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F_M) \le \exp(-\inf_{F_M} \Lambda(\vec{\theta})n + \varepsilon n) \le \exp(-I_F n + 2\varepsilon n)$$

при достаточно большом M, где $I_F = -\inf_{\theta\in F} \Lambda(\vec{\theta})$.

Теперь нам нужно оценить вероятности $\mathbf{P}(\vec{Z}_n \notin F_M)$. Оценим их следующим образом:

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \notin F_M) \le \mathbf{P}(\exists i : Z_{n,i} > M) + \mathbf{P}(\exists i : Z_{n,i} < -M),$$

где $Z_{n,i}$ — координаты $\vec{Z}_n$.

В силу неравенства Маркова при $\vec{e}_i = (0, ...0, 1, 0, ...0)$

$$\mathbf{P}(Z_{n,i} > M) \le \mathbf{E} e^{nZ_{n,i}} e^{-nM} = R_n(n\vec{e}_i) e^{-nM},$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(Z_{n,i} < -M) \le \mathbf{E} e^{-nZ_{n,i}} e^{-nM} = R_n(-n\vec{e}_i) e^{-nM}.$$

При этом в силу условия Гартнера-Эллиса

$$R_n(n\vec{e}_i) \le (R(\vec{e}_i) + \varepsilon)^n, \quad R_n(-n\vec{e}_i) \le (R(-\vec{e}_i) + \varepsilon)^n.$$

При достаточно большом M выполнено неравенство $\ln(R(\vec{e}_i)+\varepsilon) - M < (I_F + 2\varepsilon)$, откуда

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \le (2d+1) \exp(-I_F n + 2\varepsilon n).$$

Отсюда имеем требуемое соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \ge -I_F + 2\varepsilon,$$

откуда из произвольности $\varepsilon > 0$ имеем требуемое.

2) Докажем нижнюю оценку, т.е. для любого открытого G покажем, что

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in G) \geq -\inf_{\vec{\theta} \in G} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Как и прежде, достаточно доказать, что при любых $\vec{x}$ и всех достаточно малых δ

$$\liminf \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq -\Lambda(\vec{x}).$$

2.1) Допустим, что найдется супремум $\Lambda(\vec{x})$ достигается при некотором $\vec{h}$. Тогда $grad(\ln R(\vec{h})) = \vec{x}$ и

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) = \int_{U_\delta(\vec{x})} \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in d\vec{y}) = e^{-n(\vec{h},\vec{x})} R_n(n\vec{h}) \int_{U_\delta(\vec{x})} e^{-n(\vec{h},\vec{y}-\vec{x})} \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in d\vec{y}) \geq$$
$$e^{-n(\vec{h},\vec{x})} R_n(n\vec{h}) e^{-|\vec{h}|\delta} \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in U_\delta(\vec{x})).$$

Раньше мы пользовались для оценки последней вероятности ЗБЧ, но теперь последовательность Z более сложная. Оценим ее снизу следующим образом:

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in U_\delta(\vec{x})) = 1 - \mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \notin U_\delta(\vec{x})) \geq$$
$$1 - \left(\sum_{i=1}^{d} \left(\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2}) + \mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i < -\delta d^{-1/2}) \right) \right).$$

В силу неравенства Маркова при любом $\tilde{h} > 0$

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2}) \leq \frac{\mathbf{E} e^{n\tilde{h} Z_{n,i}^{(n\vec{h})}}}{e^{n\tilde{h}(x_i + \delta d^{-1/2})}} = \frac{R_n(n(\tilde{h}\vec{e}_i + \vec{h}))}{R_n(n\vec{h}) e^{n\tilde{h}(x_i + \delta d^{-1/2})}}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2}) \leq \ln R(\tilde{h}\vec{e}_i + \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) - \tilde{h} x_i + \delta d^{-1/2}.$$

Но $\ln R(\tilde{h}\vec{e}_i + \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) - (e_i, grad \ln R(\vec{h}))\tilde{h} = o(\tilde{h})$, откуда при достаточно малом $\tilde{h}$ величина $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_{n,i}^{(n\vec{h})} - x_i > \delta d^{-1/2})$ отрицательна, а значит

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n^{(n\vec{h})} \in U_\delta(\vec{x})) \geq \frac{1}{2}$$

при достаточно большом n. Таким образом,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq \Lambda(\vec{x}) - |\vec{h}|\delta,$$

откуда в силу произвольности δ имеем требуемое.

2.2) Как и в теореме Крамера предположим, что супремум в определении Λ недостижим. Тогда рассмотрим $\vec{X}_n = \vec{Y}_n + \vec{Z}_n$, $\vec{Y}_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{E}/(Mn))$ и не зависит от $\vec{Z}_n$, где M — некоторый параметр, E — единичная матрица. Тогда

$$\ln R_{\vec{X}_n}(n\vec{h}) = \ln R_n(n\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R_n(n\vec{h})$$

и

$$\ln \tilde{R}(\vec{h}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln R_{X_n}(n\vec{h}) = \ln R(\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R(h),\ \tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) \leq \Lambda(\vec{\theta}),$$

где $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}))$. При этом $\ln R(\vec{h}) \geq (\vec{h}, \vec{\mu})$, где $\vec{\mu} = grad \ln R(\vec{0})$, существующий в силу дифференцируемости $\ln R$. , а значит

$$(\vec{h}, \vec{x}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}) \leq (\vec{h}, (\vec{x} - \vec{\mu})) - \frac{1}{2M}|\vec{h}|^2 \to -\infty,$$

$h \to \infty$. Следовательно, супремум в $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta})$ достижим в конкретной точке $\vec{h}$, удовлетворяющей условию $\vec{x} = grad \ln \tilde{h}(\vec{h})$.
В силу 2.1)

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) \geq -\tilde{\Lambda}(\vec{x}) \geq -\Lambda(\vec{x}).$$

При этом

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) - \mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2).$$

Модуль вектора больше $\delta/2$ только если одна из координат больше по модулю $\delta/(2\sqrt{d})$. Значит

$$\mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2) \leq 2d\left(1 - \Phi\left(\frac{\delta^2\sqrt{nM}}{2d}\right)\right).$$

В силу соотношения

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2},\ x \to \infty,$$

имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} > \frac{\delta}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{M\delta^2 n}{2d}\right).$$

Выберем M так, что $M\delta^2/(2d)$ будет больше $\Lambda(\vec{x}) + 2\varepsilon$, тогда

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq \exp(-\Lambda(\vec{x})n)e^{-\varepsilon n}\left(1 - 2de^{-\varepsilon n}\right).$$

Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_\delta(\vec{x})) \geq -\Lambda(\vec{x}) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем требуемое. $\square$