12 Теорема Крамера

Лемма 1. *1. $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.*

2. Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$.

3. Если $R(\widetilde{h}) < \infty$ при некотором $\widetilde{h} > 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = -\infty$). Если $R(\widetilde{h}) < \infty$ при некотором $\widetilde{h} < 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = +\infty$).

4. $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает, $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$ (в бесконечном случае это соотношение понимается как предельное).

5. Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = \mathbf{E}X_1 e^{hX_1}$. При этом если супремум в определении $\Lambda(\theta)$ достигается во внутренней точке h, то $(\ln R)'(h) = \theta$.

Доказательство. 1. Надо доказать, что $\ln R(h_1t_1+h_2t_2) \leq \ln R(h_1)t_1 + \ln R(h_2)t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.
Но

$$R(h_1t_1 + h_2t_2) = \mathbf{E}\left(e^{h_1X_1}\right)^{t_1}\left(e^{h_2X_1}\right)^{t_2} \leq \left(\mathbf{E}e^{h_1X_1}\right)^{t_1}\left(\mathbf{E}e^{h_1X_1}\right)^{t_2}$$

в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравнества

$$\sup_h(h\theta_1t_1+h\theta_2t_2-\ln R(h\theta_1t_1)-\ln R(h\theta_2t_2)) \leq t_1\sup_h(h\theta_1-\ln R(h\theta_1))+t_2\sup_h(h\theta_2-\ln R(h\theta_2)).$$

То, что Λ неотрицательна прямо следует из определения. Покажем, что она полунепрерывна снизу

$$\Lambda(\widetilde{\theta}) = \sup_h(\widetilde{\theta}h-\ln R(h)) \leq \widetilde{\theta}\,\widetilde{h}-\ln R(\widetilde{h})+\varepsilon = \lim_{\theta\to\widetilde{\theta}}(\theta\widetilde{h}-\ln R(\widetilde{h}))+\varepsilon \leq \lim_{\theta\to\widetilde{\theta}}\sup_h(\theta h-\ln R(h))+\varepsilon.$$

Следовательно, $\Lambda(\widetilde{\theta}) \leq \liminf_{\theta\to\widetilde{\theta}}\Lambda(\theta)$, что и т.д.

2. Утверждение очевидно вытекает из того, что $\theta h - \ln R(h) = -\infty$ при $h \neq 0$.

3. Пусть $X^+ = \max(X, 0)$. В силу неравенства Иенсена $\mathbf{E}\exp(hX^+) \geq \exp(h\mathbf{E}X^+)$, откуда вытекает неравенство

$$\mathbf{E}X^+ \leq \frac{1}{h}\mathbf{E}\exp(hX^+) \leq \frac{1}{h}(1 + \mathbf{E}\exp(hX^+)) < \infty,$$

откуда $\mathbf{E}X^+$ конечно. Аналогично доказывается то, что конечно $\mathbf{E}X^-$.

4. В силу неравенства Иенсена $\mathbf{E}Xh \le \ln R(h)$. Отсюда несложно доказывается $\Lambda(\mu) = 0$, поскольку $\mu h - \ln R(h) \le 0$.

   Докажем монотонность. Пусть μ конечно. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \le h\mu - \ln R(h) \le 0$, т.е. супремум достигается на положительных h, откуда выражение под знаком sup в определении Λ монотонно возрастает по θ. Аналогично при $\theta < \mu$.
   Пусть $\mu = -\infty$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h < 0$, а значит супремум в $\Lambda(\theta)$ можно рассматривать при $h \ge 0$.

$$\Lambda(\theta_1) = \sup_{h \ge 0}(\theta_1 h - \ln R(h)) \le \sup_{h \ge 0}(\theta_2 h - \ln R(h))$$

   при $\theta_1 \le \theta_2$, откуда Λ неубывает. Аналогично в противном случае. Отметим, что если μ не существует (ни конечного, ни бесконечного), то $R(h) = \infty$ при всех $h \ne 0$, откуда $\Lambda(\theta) = 0$.

5. Дифференцируемость и выражение для Λ мы уже получали раньше перед рассмотрением локальной теоремы Гнеденко.

□

Теперь давайте покажем, что справедлива следующая теорема Крамера

Теорема 1. *(Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.*

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа: 1) Докажем, что для любого замкнутого F

$$\limsup \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in F) \le -\inf_{\theta \in F} \Lambda(\theta).$$

Если $D_R = \{0\}$, то утверждение очевидно в силу того, что $\ln \mathbf{P}(S_n \in F) \le 0$, а $\Lambda = 0$ в силу Леммы 5.2. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда найдется $x \in D_R$, $x \ne 0$. При этом существует μ (возможно бесконечное).
Кроме того, если $\inf_{\theta \in F} \Lambda(\theta) = I_F = 0$, то утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай $I_F > 0$.

Если $\mu = -\infty$, то функция Λ в силу Леммы 5.2 возрастает на всей прямой. При этом

$$\mathbf{P}(X_1 \geq x) \leq \inf_{h \geq 0} \mathbf{E} e^{h(X_1 - x)} = \inf_h e^{-(hx - \ln R(h))} = e^{-\Lambda(x)},$$

т.е. $\Lambda(x) \to 0$, $x \to \infty$. А раз $I_F > 0$, то $\inf F = a > -\infty$.
Остается заметить, что тогда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \leq \mathbf{P}(S_n \geq an) \leq \inf_h \exp(-(ah - \ln R(h))n) = \exp(-\Lambda(a)n),$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается $\mu = \infty$.
И, наконец, если μ конечно, то F не должно содержать μ (иначе $I_F = 0$, т.к. $\Lambda(\mu) = 0$). Значит в силу замкнутости, $\inf\{x > \mu, x \in F\} = x^+ > \mu$, $\sup\{x < \mu, x \in F\} = x^- < \mu$. Отсюда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \leq \mathbf{P}(S_n \geq x^+ n) + \mathbf{P}(S_n \leq x^- n) \leq \exp(-\Lambda(x^+)n) + \exp(-\Lambda(x^-)n) \leq 2\exp(-I_F n),$$

откуда прямо следует верхняя граница.
2) Докажем нижний принцип больших уклонений: для всех открытых G

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \geq -\inf_{x \in G} \Lambda(x). \tag{1}$$

Покажем, что достаточно доказать что при любых $\delta > 0$, $x \in G$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \geq -\Lambda(x). \tag{2}$$

Действительно, если $I = \inf_{x \in G} \Lambda(x)$, то при любом ε найдется $y \in G : \Lambda(y) \leq I + \varepsilon$. При этом при некотором $\delta > 0$ справедливо соотношение $U_\delta(y) \in G$. Тогда из (3) следует, что

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(y)) \geq -\Lambda(y) \geq -I - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, имеем (1).

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \geq -\Lambda(x). \tag{3}$$

- Пусть $R(h) < \infty$ при всех $h \in \mathbb{R}$, распределение величины X сосредоточено на $[-a, a]$, причем не сосредоточено на $[0, a]$ или $[-a, 0]$.

- Пусть распределение не сосредоточено ни на $\mathbb{R}^+$, ни на $\mathbb{R}^-$. Фиксируем $M > 0$ и рассмотрим наши величины на отрезке $(-M, M)$, т.е. рассмотрим

$$\mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) := \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)|X_i \in (-M,M), i \le M) =$$
$$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \le M)\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-n}.$$

Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \le M)$$
$$\ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) - \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)).$$

К мерам Q_n в силу пункта а) можно применить теорему и получить, что правая часть записанного тождества есть

$$-\Lambda_M(0) + \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)) = -\ln \inf(\mathbf{E}(e^{hX_1}|X_1 \in (-M,M))) + \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))$$

При $M \to \infty$ второе слагаемое стремится к 0. Первое в силу предыдущей части сходится к величине не меньшей $\inf_h \ln R_M(h)$, где

$$R_M(\widetilde{h}) = \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-1}\mathbf{E}e^{hX_1}I_{X_1\in(-M,M)} \to \mathbf{E}e^{hX_1} = R(h),\ \ M \to \infty.$$

Если $I_M = \inf \ln R_M(h)$, $I^* = \limsup_{M\to\infty} I_M$, то

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \ge \lim_{M\to\infty} (\ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)) + \inf_h \ln R_M(h)) = I^*$$

Отстается убедиться, что $I^* = \inf \ln R(h)$. Заметим, что I^*

$$I^* = \lim_{M\to\infty} \inf_h \ln \mathbf{E}(\exp(hX_1); X_1 \in (-M,M)).$$

При каждом M рассмотрим множество таких h, что $\ln \mathbf{E}(\exp(hX_1); X_1 \in (-M,M)) \le I^*$. Эти множества замкнуты (в силу непрерывности), непусты (поскольку I^* — предел монотонной последовательности). Значит, найдется t, лежащий в пересечении таких множеств по всем M, откуда

$$\ln R_M(t) \le I^*.$$

Значит,

$$-\Lambda(0) = \inf_h \ln R(h) \le \ln R(t) = \limsup \ln R_M(t) \le I^*.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

- Пусть распределение сосредоточено на одной из полуосей (для удобства на положительной). Тогда $R(h)$ монотонно возрастает, а значит

  $$\Lambda(0) = -\ln \inf_{h\in\mathbb{R}} R(h) = -\ln \lim_{h\to-\infty} R(h) = -\ln \mathbf{P}(X_1 = 0).$$

  Но

  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \geq \mathbf{P}(X_1 = 0)^n,$$

  откуда вытекает требуемое.

$\square$