6 Многомерный случай

6.1 Локальная и интегро-локальная теоремы для случайных векторов

Аналогичные локальные и интегро-локальные теоремы можно сформулировать в многомерном случае. Начнем с того, что разберемся как в этом случае определить решетчатость и нерешетчатость.

Под множеством значений случайного вектора X мы будем подразумевать такое множество A, что $\mathbf{P}(X \in A) = 1$. Решетками будем называть конечно-порожденные множества в $\mathbb{R}^d$, то есть множество всевозможные линейных комбинаций

$$\{a_1\vec{e}_1 + ... + a_d\vec{e}_d,\ a_i \in \mathbb{Z}\},$$

где e_1,...,e_d — некоторые линейно-независимые векторы, которые называют базисом решетки. Фундаментальным параллелепипедом решетки назовем множество $\theta_1\vec{e}_1 + ... + \theta_d\vec{e}_d$, $\theta_i \in [0,1]$, детерминантом решетки — объем фундаментального параллелепипеда (можно понять, что он не зависит от выбора базиса).

- Назовем вектор *вырожденным*, если при некотором неслучайном векторе $\vec{c}$ вектор $(\vec{c}, X)$ п.н. равен константе.
- Назовем вектор *арифметическим*, если для некоторого неслучайного вектора $\vec{y}_0$, такого что $\mathbf{P}(X = \vec{y}_0) > 0$ и множество сумм векторов из множества $\{x_i - x_j\}$ совпадает с $\mathbb{Z}^d$.
- Назовем вектор *сильно решетчатым*, если множество всевозможных целочисленных линейных комбинаций векторов из множества $\{x_i\}$ образует некоторую решетку S_X, которую мы будем называть решеткой X. Детерминант решетки будем обозначать q_X и называть показателем решетчатости.
- Назовем вектор *решетчатым*, если найдется вектор $\vec{c} \neq 0$, такой что $(\vec{c}, X)$ является решетчатой случайной величиной.
- Назовем вектор *нерешетчатым* в противном случае.

Примеры 1. Как и прежде решетчатость и нерешетчатость это вопрос множества значений D, которые принимает вектор. Рассмотрим несколько примеров:

- Пусть множество значений $D = \{(1,0),(0,1)\}$. Тогда оно порождает $\mathbb{Z}^2$, поскольку всякую точку $\mathbb{Z}^2$ можно представить как сумму точек решетки. При этом вектор X с таким множеством значений не будет арифметическим, поскольку множества $D-(1,0)$ (под этой записью подразумевается, что мы рассматриваем множество, получаемое вычитание из векторов, лежащих в D вектора (1,0)) и $D-(0,1)$ не являются порождающими $\mathbb{Z}^2$. Скажем $D-(1,0) = \{(0,0),(-1,1)\}$ и это множество вкладывается в $S = \{(-x,x),\ x \in \mathbb{Z}\}$. Соответствующий вектор является вырожденным, поскольку при $\vec{c} = (1,1)$ величина $(\vec{c}, X) = 1$ п.н.
- Множество $D = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$ является арифметическим, поскольку $D-(0,0)$ порождает $\mathbb{Z}^d$.
- Множество $D = \{(3,1),(1,2),(1,1)\}$ не является арифметическим, поскольку $D-(x,y)$ будет иметь первую координату четной при любом $(x,y) \in D$, а значит будет порождать подмножество $2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}^2$. При этом оно сильно решетчато, поскольку при

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, CD = \{(3/2,1),(1/2,2),(1/2,1)\},$$

  и $CD-(1/2,1) = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$ порождает $\mathbb{Z}^2$.

- Множество $D = \{(1,0),(2,e),(1,\pi)\}$ является решетчатым, поскольку при $\vec{c} = (1,0)$ величина $(\vec{c}, X)$ целочисленная. При этом оно не является сильно решетчатым.
- Множество $D = \{(0,0),(\pi,\pi),(e,e)\}$ является нерешетчатым, поскольку 0, $(c_1+c_2)\pi$, $(c_1+c_2)e$ не ложатся на решетку $\mathbb{Z}^d$ ни при каком векторе c.

Теорема 1. *Пусть X_i — н.о.р. векторы, $\mathbf{E}X_i = \vec{\mu}$ — вектор средних, Σ^2 — матрица ковариации вектора X.*
1) Пусть X_i — арифметические с $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\det(\Sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-2}(\vec{x}-\vec{\mu})\right) + o\left(\frac{1}{n^{d/2}}\right)$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$, $\vec{x} - \vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$.
2) Пусть X_i — сильно решетчатые с показателем q_X и пусть x_0 — вектором $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\det(\Sigma^2)^{1/2}\det C} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-2}(\vec{x}-\vec{\mu})\right) + o\left(\frac{1}{n^{d/2}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x} \in S_X$.
3) Пусть X_i — нерешетчатые векторы. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \in I_{\Delta_n}(\vec{x})) = \frac{\Delta_n^d}{(2\pi n)^{d/2}(\det(\Sigma^2))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-2}(\vec{x}-\vec{\mu})\right) + o\left(\frac{\Delta_n^d}{n^{d/2}}\right),$$

где $I_{\Delta_n}(\vec{x}) = [x_1, x_1+\Delta_n) \times \ldots [x_d, x_d+\Delta_n)$, при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к нулю, где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$.

Аналогично одномерному случаю из локальной и интегро-локальной теорем, мы можем получить теоремы о больших уклонениях. Для этого положим

$$R(\vec{h}) = \mathbf{E}e^{(\vec{h},\vec{X})},\ m(\vec{h}) = grad \ln R(h),\ \sigma^2(\vec{h}) = ((\ln R(h))''_{h_i,h_j}, i,j \in \{1,...,d\}), \vec{h}_{\vec{\theta}} : m(\vec{h}_{\vec{\theta}}) = \vec{\theta}.$$

При этом $m(\vec{h})$, $\sigma^2(h)$ — вектор средних и ковариационная матрица вектора $\vec{X}^{(\vec{h})}$ с сопряженным распределением

$$\mathbf{P}(X^{(\vec{h})} \in A) = R(\vec{h})^{-1} \int_A e^{(\vec{h},\vec{y})} \mathbf{P}(\vec{X} \in d\vec{y}).$$

Замечание 1. . Можно утверждать, что соотношения 1)-3) Теоремы 1 равномерны по сопряженным распределениям:

$$\mathbf{P}(S_n^{(\vec{h})} = \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\det(\sigma(\vec{h})^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-m(\vec{h}))^t \sigma(h)^{-2}(\vec{x}-m(\vec{h})\right) + \frac{o(1)}{n^{d/2}}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $\vec{h} \in D^*$, где D^* — компакт из D.

При этом как и прежде положим

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})) = (\vec{h}_{\vec{\theta}}, \vec{\theta}) - \ln R(\vec{h}_{\vec{\theta}}).$$

Теорема 2. *Пусть $\vec{X}_i$ — н.о.р. векторы с конечной дисперсией, $R(\vec{h}) < \infty$ при $\vec{h} \in D$, G — образ D при отображении $m(\vec{h})$.*
1) Пусть X_i — арифметические с $\vec{y}_0$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1+o(1)}{(2\pi n)^{d/2}\det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{\vec{x}}{n}\right) n\right)$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}-\vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$, $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.
2) Пусть X_i — сильно решетчатые с матрицей C и вектором $\vec{y}_0$. Тогда в аналогичным условиях

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = \frac{1+o(1)}{(2\pi n)^{d/2}\det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2}\det C}\exp\left(-\Lambda\left(\frac{\vec{x}}{n}\right)n\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}$: $C\vec{x}-\vec{y}_0 n \in \mathbb{Z}^d$, $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.
3) Пусть X_i — нерешетчатые векторы. Тогда в тех же условиях, что и в 1)

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[\vec{x}]) = \frac{\Delta_n^d(1+o(1))}{(2\pi n)^{d/2}\det(\sigma^2(\vec{h}_{\vec{x}/n}))^{1/2}}\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right),$$

при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к нулю, где $o()$ равномерно мало по $\vec{x}/n \in G^*$ для любого компакта G^*, содержащегося в G.

Доказательство. Докажем 1), остальные случаи рассматриваются аналогично. Из определения сопряженного распределения

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) = e^{-(\vec{h},\vec{x})}R(\vec{h})^{-n}\mathbf{P}(S_n^{(\vec{h})} = \vec{x}).$$

Положим $\vec{h} = \vec{h}_{x/n}$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(\vec{h_{x/n}})} = \vec{x}) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\sqrt{\det\sigma^2(h_{x/n})}}$$

в силу локальной теоремы. Стоит отметить, что поскольку x/n зависит от n, то указанное соотношение не следует напрямую из локальной теоремы, в которой распределение шагов не должно зависеть от n, но вытекает из Замечания 1. Имеем

$$\mathbf{P}(S_n = \vec{x}) \sim e^{-(\vec{h}_{\vec{x}/n},\vec{x}/n)n}R(\vec{h}_{\vec{x}/n})^{-n}\frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\sqrt{\det\sigma^2(h_{x/n})}},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Поведение траектории при условии уклонения

Зададимся вопросом о том, как устроены шаги X_i при условии уклонения $S_n \in \Delta_n[x)$, то есть тем, как ведет себя вероятность

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1,b_1],...,X_k \in [a_k,b_k]|S_n \in \Delta_n[x)).$$

Теорема 3. *При любых k, $a_1,...,a_k$, $b_1,...,b_k$*

$$\mathbf{P}(X_1 \in [a_1,b_1],...,X_k \in [a_k,b_k]|S_n \in \Delta_n[x)) - \mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} \in [a_1,b_1])...\mathbf{P}(X_k^{(h_{x/n})} \in [a_k,b_k]) \to 0$$

при $n\to\infty$ равномерно по $x \in G^*$, где G^* компактное подмножество G.

Доказательство. Для доказательства выведем формулу для $\mathbf{P}(S_{n-k} \in \Delta_n[x-y))$ при фиксированных k, y. Для этого заметим, что

$$\Lambda\left(\frac{x-y}{n-k}\right)(n-k) = \Lambda\left(\frac{x}{n}+\frac{xk-yn}{n(n-k)}\right)(n-k) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n - k\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) + h_{x/n}\frac{xk-yn}{n} + o(1) =$$
$$\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n + k\ln R(h_{x/n}) - yh_{x/n} + o(1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_{n-k}\in\Delta_n[x-y))\sim\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x-y)/(n-k)})}e^{-\Lambda\left(\frac{x-y}{n-k}\right)}\sim\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})}e^{h_{x/n}y}e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n}R(h_{x/n})^{-k}.$$

Полученная формула справедлива и при растущих k, y при $(xk-yn)=o(\sqrt{n})$.

Теперь

$$\mathbf{P}(X_1\in[a_1,b_1],...,X_k\in[a_k,b_k]|S_n\in\Delta_n[x))=$$
$$\frac{1}{\mathbf{P}(S_n\in\Delta_n[x))}\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_k}^{b_k}\mathbf{P}(X_1\in du_1)...\mathbf{P}(X_k\in du_k)\mathbf{P}(S_{n-k}\in\Delta_n[x-u_1...-u_k)).$$

В силу равномерности сходимости

$$\mathbf{P}(S_{n-k}\in\Delta_n[x-u_1-...-u-k))\sim\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_{x/n})}e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n}e^{h_{x/n}(u_1+...+u_k)}R(h_{x/n})^{-k},$$

откуда

$$\mathbf{P}(X_1\in[a_1,b_1],...,X_k\in[a_k,b_k]|S_n\in\Delta_n[x))\xrightarrow{d}R(h_{x/n})^{-k}\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_k}^{b_k}e^{h_{x/n}(u_1+...+u_k)}\mathbf{P}(X_1\in du_1)...\mathbf{P}(X_k\in du_k)=$$
$$\mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})}\in[a_1,b_1])...\mathbf{P}(X_k^{(h_{x/n})}\in[a_k,b_k])$$

$\square$