5 Большие уклонения в некрамеровском случае

Предположим, что условие Крамера больше не выполнено. Сохранится ли при этом какая-то подобная исходной форма теоремы?

Пример 1. Пусть $\mathbf{P}(X_1 > x) \sim x^{-\alpha}$, $x \to +\infty$, $\alpha > 2$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \geq \mathbf{P}(X_1 \geq x - \mu(n-1), X_2 + \cdots + X_n \geq \mu(n-1)) = \\ \mathbf{P}(X_1 \geq x - \mu(n-1))\mathbf{P}(X_2 + \cdots + X_n \geq \mu(n-1)).$$

Первая вероятность эквивалентна $(x - \mu(n-1))^{-\alpha}$, а вторая стремится к $1/2$ в силу ЦПТ (условие $\alpha > 2$ как раз и гарантирует существование дисперсии). Таким образом, никакой экспоненциальной малости вероятности мы при этом не наблюдаем.

Оказывается, что пример выше довольно точно описывает суть происходящего.

Определение 1. Назовем медленно меняющейся функцией положительную функцию $L(x)$, удовлетворяющую свойству

$$\lim_{y\to\infty} \frac{L(xy)}{L(y)} = 1.$$

Определение 2. Назовем правильно меняющейся функцией с показателем α положительную функцию $R(x)$, удовлетворяющую свойству

$$\lim_{y\to\infty} \frac{R(xy)}{R(y)} = x^{\alpha}.$$

Если R правильно меняется с показателем α, то $R(x) \sim x^{\alpha}L(x)$, $x \to \infty$.

Пример 2. Функции $\ln x$, $\ln\ln x$ медленно меняются, а $x^2 \ln x$ – правильно меняется с показателем 2. Функция $\exp(\ln^2 x)$ не относится ни к одному из классов.

Теорема 1. *Предположим, что X_i — н.о.р. случайные величины, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ при $x \to \infty$ является правильно меняющейся с показателем $-\alpha$, $\alpha > 2$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$.*

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim n\mathbf{P}(X_1 > x) = n\overline{F}(x)$$

при любой такой последовательности $x = x_n$, что $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$.

Нетрудно видеть что для произвольных $\mathbf{E}X_1$ и $\mathbf{D}X_1$ ответ поменяется лишь заменой x на $x - \mu n$ под знаком $\overline{F}(x)$.

Фактически большое уклонение в этом случае происходит по другой схеме: один из шагов (выбираемый наугад, откуда и появляется множитель n) превышает $x - \mu(n-1)$, а остальные ведут себя как их и обязывает среднее.

Интегро-локальные или локальные теоремы в данном случае менее удобны, поскольку требуют дополнительных условий.