4 Нерешетчатый случай

4.1 Абсолютно-непрерывный случай

Полученные нами результаты можно перевести в локальную форму в абсолютно-непрерывном случае в терминах плотностей. Для этого потребуется следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X_i таковы, что существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\int_{\mathbb{R}} |\psi_X(t)|^k dt < \infty$. Тогда*

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 1. Условие интегрируемости х.ф. в каком-то виде необходимо, но может быть дано в других формах — ограниченности плотности S_k при каком-то k или интегрируемости плотности S_k в квадрате.

Доказывать указанную теорему мы не будем (это будет сделано в курсе дополнительных глав теории вероятностей), но отметим, что и в этом случае справедливо замечание к теореме Гнеденко о равномерности по семейству распределений $X^{(h)}$:

Замечание 2. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство абсолютно непрерывных случайных величин, у которых существует такое k, что $\psi(t)$ интегрируема в k степени (или плотность S_k ограничена или плотность S_k интегрируема в квадрате) причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(h) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b, c]$, $|t| < \delta$

$$\left|\psi(t) - 1 - it\mathbf{E}X^{(h)} + \frac{t^2}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2\right| < \varepsilon t^2.$$

Тогда
$$f_{S_n^{(h)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty,$$
где $o(1)$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$ и $h \in [b, c]$.

Отсюда можно получить следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть X_i н.о.р. величины, причем при некотором $k > 0$*
$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_X(t+ih)|^k \, dt < +\infty,\ h \in [h^-, h^+],$$
$R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$, $\mathbf{E}e^{h^+X}X^2 < +\infty$, $\mathbf{E}e^{h^-X}X^2 < +\infty$. Тогда
$$f_{S_n}(x) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right),$$
тогда $o(1)$ равномерно мало по $x/n \in [m^-, m^+]$. Здесь как и прежде $m(h) = (\ln R(h))'$, $\sigma(h) = m'(h)$, h_θ определяется соотношением $m(h_\theta) = \theta$, $m^- = \lim_{h\to h^-+0} m(h)$, $m^+ = \lim_{h\to h^+-0} m(h)$,
$$\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Доказательство. Как и прежде, если $R(h) < \infty$ при $h \in (h^-, h^+)$, то условия замечания выполнены для сопряженных величин $X^{(h)}$ с плотностью
$$f_{X^{(h)}}(x) = e^{hx} R(h)^{-1} f_X(x)$$
по h из любого компакта в (h^-, h^+). Тогда можно проделать аналогичный трюк с сопряжением
$$f_{S_n^{(h)}}(x) = f_{S_n}(x) e^{hx} R(h)^{-n},$$
откуда
$$f_{S_n}(x) = R(h)^n e^{-hx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
Таким образом, при $x/n \in (m^-, m^+)$ мы можем взять $h = h_{x/n}$ и получить отсюда
$$f_{S_n}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)$$
□

4.2 Интегро-локальные теоремы

В общем нерешетчатом случае справедлива интегро-локальная теорема Стоуна:

Теорема 3. *Пусть X_i имеют нерешетчатое распределение, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2 > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n \to 0$ — некоторая последовательность.

Замечание 3. Можно утверждать что есть такая последовательность $\widetilde{\Delta}_n \to 0$, что при всех $\Delta_n > \widetilde{\Delta}_n$

Доказывать указанную теорему мы не будем (желающие могут посмотреть, например, учебник А.А. Боровкова "Теория вероятностей" изданий после 2009 года), но отметим, что и в этом случае справедливо замечание о равномерности по семейству распределений $X^{(h)}$:

Замечание 4. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство абсолютно непрерывных случайных величин, у которых существует такое k, что $\psi(t)$ интегрируема в k степени (или плотность S_k ограничена или плотность S_k интегрируема в квадрате) причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(\theta) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b, c]$, $|t| < \delta$

$$\left|\psi(t) - 1 - it\mathbf{E}X^{(h)} + \frac{t^2}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2\right| < \varepsilon t^2.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n \to 0$ — некоторая последовательность, стремящаяся к нулю.

Теорема 4. *Пусть X_i н.о.р., $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$, $h \in [h^-, h^+]$, $\mathbf{E}e^{h^+X}X^2 < +\infty$, $\mathbf{E}e^{h^-X}X^2 < +\infty$. Тогда при некоторой последовательности $\Delta_n \to 0$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{(1+o(1))\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right), \; n \to \infty,$$

где $o(1)$ равномерно мало по $x/n \in [m^-, m^+]$.

Доказательство. Как и прежде, если $R(h) < \infty$ при $h \in [h^-, h^+]$, то условия последнего замечания выполнены для сопряженных величин $X^{(h)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(X^{(h)} \in A) = \int_A e^{hx} R(h)^{-1} \mathbf{P}(X \in dx)$$

по h из любого компакта в (h^-, h^+). Тогда можно проделать аналогичный трюк с сопряжением

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x, x+\Delta_n)) = (1+o(1))\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n))e^{hx}R(h)^{-n},$$

откуда

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = R(h)^n e^{-hx}\left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом, при $x/n \in (m^-, m^+)$ мы можем взять $h = h_{x/n}$ и получить отсюда

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).$$

$\square$