1 Интегральные теоремы о больших уклонениях

1.1 Большие уклонения

На прошлой лекции мы доказали локальную теорему о больших уклонениях: Отсюда несложно вывести так называемую теорему Петрова-Бахадура-Рао:

Теорема 1 (Петрова-Бахадура-Рао о больших уклонениях)**.** *Пусть X_i решетчаты, удовлетворяют условию Крамера и $\mathbf{E}X_1 = \mu$. Пусть $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})(1-e^{-h_{x/n}d})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right),\ n \to \infty,$$

если x принадлежит решетке распределения S_n, то есть $x \in an + d\mathbb{Z}$. При этом асимптотика равномерно по таким x.

Доказательство. В силу локальной теоремы при $r_n = [\sqrt[3]{n}]$

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+dr_n)) = (1+o(1)) \sum_{k=0}^{r_n-1} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x+dk)/n})} \exp\left(-\Lambda\left(x + \frac{dk}{n}\right)n\right).$$

При этом $\sigma(h_{(x+dk)/n}) - \sigma(h_{x/n}) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по k, поскольку σ и $h.$ непрерывны (внутри диапазона $(0, h^+)$ функция $\ln R$ бесконечно дифференцируема в силу соображений, изложенных на прошлой лекции), а $k/n \leq r_n/n = o(1)$,

$$\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{k}{n}\right)n = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n + k\Lambda'\left(\frac{x}{n}\theta\right) + O\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 n\right),$$

где последняя величина есть $o(1)$ для рассматриваемых k, поскольку $k/n \leq n^{1/3}$. При этом

$$\Lambda'(\theta) = (\theta h_\theta - \ln R(h_\theta))' = h_\theta + \theta(h_\theta)' - m(h_\theta)(h_\theta)' = h_\theta,$$
$$\Lambda''(\theta) = (h_\theta)' = (m^{-1}(\theta))' = \frac{1}{m'(m^{-1}(\theta))} = \frac{1}{\sigma^2(h_\theta)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+r_n)) = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n} \sum_{k=0}^{r_n-1} e^{-dh_{x/n}k} = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)\left(1-e^{-dh_{x/n}}\right)} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

Остается заметить, что

$$\mathbf{P}(S_n \geq x + r_n) \leq R(h_{x/n})^n e^{-h_{x/n}(x+r_n)} = e^{-\Lambda(x/n)n} e^{-h_{x/n}\sqrt[3]{n}} = o(1)\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

□

Теорема 2 (Петрова-Бахадура-Рао о малых уклонениях)**.** *Пусть X_i решетчаты, удовлетворяют условию Крамера и $\mathbf{E}X_1 = \mu$. Пусть $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (m^-, \mu)$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})(1 - e^{h_{x/n}d})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right), \; n \to \infty,$$

если x принадлежит решетке распределения S_n, то есть $x \in an + d\mathbb{Z}$. При этом асимптотика равномерна по указанным x.

Отметим еще одну интересную теорему, которую мы докажем в следующий раз:

Теорема 3 (Бартфаи)**.**

1. *Пусть выполнены условия локальной теоремы. Тогда*
$$\frac{\mathbf{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m | S_n = x)}{\mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} = i_1) \cdots \mathbf{P}(X_m^{(h_{x/n})} = i_m)} \to 1$$
равномерно по $x/n \in [m^-, m^+]$, $x \in an + d\mathbb{Z}$.

2. *Пусть выполнены условия теоремы Петрова о больших уклонениях (малых уклонениях). Тогда*
$$\frac{\mathbf{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m | S_n \geq x)}{\mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} = i_1) \cdots \mathbf{P}(X_m^{(h_{x/n})} = i_m)} \to 1$$
равномерно по $x/n \in (\mu, m^+)$ (в случае малых уклонений (m^-, μ)), $x \in an + d\mathbb{Z}$.

Данную теорему мы докажем на следующей лекции.