2 Локальная предельная теорема Гнеденко о больших уклонениях

На прошлой лекции мы доказали следующую теорему Гнеденко:

Теорема 1 (Гнеденко)**.** *Пусть X_i — н.о.р. решетчатые случайные величины со сдвигом a и шагом d, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n\sigma}} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

при $k \in an + d\mathbb{Z}$, $n \to \infty$, причем $o()$ равномерно мало по указанным k.

2.1 Условие Крамера

Предположим, что X_i — н.о.р. решетчатые со сдвигом a и шагом d,

$$R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty,\ h \in [h^-, h^+],$$

Это условие называют условием Крамера и оно для нас играет достаточно значимую роль. Оно означает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{hx_k}\mathbf{P}(X = x_k)$$

сходится, то есть $\mathbf{P}(X = x)$ убывает быстрее e^{h^+x} при $x \to +\infty$ и быстрее h^-x при $x \to \infty$.

Пример 1. Для $X_i \sim Bern(p)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = 1 - p + pe^h,$$

то есть конечна на всей прямой. Это логично, потому что вероятности больших отрицательных и положительных значений у распределения Бернулли нулевые, а значит убывают быстрее любой экспоненты.

Для $X_i \sim Poiss(\lambda)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{hk} = e^{\lambda(e^h - 1)}.$$

Опять же $R(h)$ конечна на всей прямой. Это вполне естественно, поскольку $k!$ растет быстрее любой экспоненты.

Для $X_i \sim Geom(p)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p e^{hk} = \frac{p}{1-(1-p)e^h}$$

сходится при $h < -\ln(1-p)$.

Для X с $\mathbf{P}(X = k) = C/(|k|+1)^2$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{hk} \frac{C}{(|k|+1)^2}$$

расходится при $h \neq 0$.

При этом функция $R(h)$ бесконечно дифференцируема внутри интервала (h^-, h^+). Действительно,

$$R'(h) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{\Delta h} \mathbf{E}(e^{(h+\Delta h)X} - e^{hX}) = \lim_{\Delta h \to 0} \mathbf{E} \left(e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \right).$$

Поскольку

$$e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \to X e^{hX}$$

п.н., то если мы сможем перейти к пределу под знаком математического ожидания, то получим выражение

$$R'(h) = \mathbf{E} X e^{hX}.$$

Для перехода к пределу воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. В силу формулы Тейлора

$$\left| e^{\Delta h X} - 1 \right| = \left| \Delta h X e^{\theta \Delta h} \right| \leq |\Delta h| |X| \max\left(e^{\Delta h}, 1 \right),$$

где $\theta \in [0, 1]$. Значит

$$\left| e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \right| \leq |X| \max\left(e^{(h+\Delta h)X}, e^{hX} \right) \leq |X| e^{hX} + |X| e^{(h+\Delta h)X}.$$

Величина в правой части имеет конечное математическое ожидание, что и требуется.

Мы будем требовать

$$\mathbf{E} X^2 e^{h^+ X} < \infty, \ \mathbf{E} X^2 e^{h^- X} < \infty.$$

Это условие слегка усиливает предыдущее.

Пример 2. Пусть

$$\mathbf{P}(X=k) = Ce^{-|k|}/(|k|+1)^2,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}e^{hX} = C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^2} e^{hk}e^{-|k|} < \infty$$

при $h \in [-1,1]$. При этом

$$\mathbf{E}X^2 e^X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{k-|k|}\frac{k^2}{(|k|+1)^2}$$

расходится, поскольку функция под знаком суммы не стремится к нулю при $k \to \infty$.

При этом новое условие гарантирует, что $R(h)$ дважды дифференцируема на границе отрезка $[h^-, h^+]$.

2.2 Параметры больших уклонений

При всех $h \in [h^-, h^+]$ рассмотрим н.о.р. $X_i^{(h)}$ с сопряженным распределением

$$\mathbf{P}\left(X_i^{(h)} = k\right) = R(h)^{-1}e^{hk}\mathbf{P}(X_i = k).$$

Тогда $X_i^{(h)}$ имеют конечные математическое ожидание и дисперсию

$$\mathbf{E}X^{(h)} = m(h) = (\ln R(h))', \quad \mathbf{D}X^{(h)} = \sigma^(h) = m'(h) = (\ln R(h))'', \quad h \in [h^-, h^+].$$

Функция $m(h)$ монотонно возрастает, поскольку $m'(h) > 0$. Ее значения меняются в пределах от

$$m^- = \lim_{h\to h^- +0} m(h), \quad m^+ = \lim_{h\to h^+ -0} m(h).$$

Значит при любом $\theta \in [m^-, m^+]$ (в случае, если m^- и m^+ бесконечны, то мы рассматриваем не включительно) найдется единственное h_θ, являющееся решением уравнения

$$m(h_\theta) = \theta.$$

Тогда по определению сопряженного распределения при любом $x/n \in [m^-, m^+]$

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{R(h_{x/n})^n} e^{-h_{x/n}x}\mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x).$$

Если применить к правой части теорему Гнеденко, то получим

$$\mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

К сожалению, мы не можем этого сделать, поскольку параметр $h_{x/n}$ (а значит и распределение наших величин) зависит от n, чего в теореме Гнеденко не позволялось. Зато мы сможем так сделать, если покажем, что соотношения

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{(x-m(h)n)^2/(2\sigma^2(h)n)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерны не только по $h \in [h^-, h^+]$. В таком случае

$$\sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{h\in[h^-,h^+]} \left| \mathbf{P}(S_n^{(h)} = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{(x-m(h)n)^2/(2\sigma^2(h)n)} \right| \to 0,$$

в частности,

$$\sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{(x-m(h_{x/n})n)^2/(2\sigma^2(h_{x/n})n)} \right| \to 0,$$

что нам и требуется.

2.3 Равномерная версия теоремы Гнеденко

Итак, нам нужна равномерность по h. В этом нам помогает замечание с прошлой лекции

Замечание 1. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство решетчатых случайных величин с одинаковым a, d, причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(\theta) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b,c]$, $|s| < \delta$

$$\left| \ln \psi_{\frac{X_1^{(h)} - \mu(h)}{\sigma(h)}}(s) + \frac{s^2}{2} \right| < \varepsilon.$$

Тогда при любом t и $|k - an| \le t\sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(k-\mu(h)n)^2}{2n\sigma(h)}} + o(n^{-1/2}),$$

причем $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым k и $h \in [b,c]$.

Лемма 2. *Для рассматриваемого случая сопряженных величин условия 1)-3) предыдущего замечания выполнены.*

Доказательство. Заметим, что

$$\psi_{X_1^{(h)}}(t) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{hx} dF(x) = \frac{R(it+h)}{R(h)}.$$

Посмотрим более внимательно на функцию $R(z)$ как функцию комплексного переменного.

Заметим, что $R(z)$ непрерывна на $Rez \in [h^-, h^+]$. Рассмотрим

$$R(z + \Delta z) - R(z) = \mathbf{E} e^{zX} \left(e^{\Delta z \cdot X} - 1 \right).$$

При этом

$$|e^{\Delta z X} - 1| \le 1 + e^{ReZX} \le 1 + e^{h^+ X} + e^{h^- X},$$

откуда применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости и $R(z+\Delta z) - R(z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Для доказательства 1) заметим, что функция $\sigma(h)$ непрерывна и неотрицательна при $h \in [h^-, h^+]$. Следовательно, она ограничена и остается доказать лишь то, что она ненулевая. Но если $\sigma(h)$ нулевая, то $X^{(h)}$ константа п.н. Но она принимает те же значения, что и X, а та константой не была.

Для доказательства 2) предположим противное. Тогда при некоторых $0 < \delta < M$ найдется набор $h_n \in [0, \tilde{h}]$, $t_n \in [\delta, \pi]$, таких что $\limsup_{n\to\infty} |R(h_n + it_n)/R(h_n)| = 1$. Выделим из h_n сходящуюся подпоследовательность, а из соответствующей подпоследовательности t_n — сходящуюся подпоследовательность, то есть $h_{n_k} \to h$, $t_{n_k} \to t$, $t \in [\delta, \pi]$, при $k \to \infty$. Но тогда $|R(h+it)/R(h)| = 1$

(здесь мы воспользовались непрерывностью $R(\cdot)$), то есть $|\psi_{X^{(h)}}(t)| = 1$. Но $X^{(h)}$ имеет ту же решетку, что и X:

$$P(X^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx} P(X \in dx).$$

Это, как мы помним, противоречит $|\psi_{X^{(h)}}(t)| = 1$. Мы пришли к противоречию, откуда b) справедливо.

Для доказательства 3) нам достаточно доказать, что первые три члена ряда Тейлора приближают $\psi_{X^{(h)}}(s)$ равномерно по h при $s \to 0$. То есть

$$\psi_{X^{(h)}}(s) = 1 + im(h)s - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2 s^2 + o(1)s^2,$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым h при $s \to 0$. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие последовательности $h_n \in [h^-, h^+]$ и $s_n \to 0$, что

$$\liminf_{n\to\infty} s_n^{-2} \left| \psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2 s_n^2 \right| > 0.$$

При этом

$$\psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2 s_n^2 = \mathbf{E}e^{h_n X}\left(e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2\right).$$

Величина

$$s_n^{-2}\left(e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ п.н. Опять же применим теорему Лебега, для чего заметим, что

$$\left| e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2 \right| \le |s_n X|^2$$

в силу неравенства

$$|e^{it} - 1 - it| \le \frac{t^2}{2},$$

справедливого при всех вещественных t. Значит,

$$s_n^{-2} \left| \psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2 s_n^2 \right| \to 0,$$

что противоречит нашему предположению. □

Из полученных соотношений вытекает следующая теорема

Теорема 3. *Пусть* X_i *— н.о.р. решетчатые с шагом* d *и сдвигом* a, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ *при* $h \in (0, h^+)$. *Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(x/n)n}, \ n \to \infty,$$

выполнено равномерно по $x/n \in [0, \theta_2]$, $\theta_2 \in (0, m^+)$, $x \in an + \mathbb{Z}d$.

Доказательство. По определению сопряженного распределения

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{R(h)^n} e^{-hx} \mathbf{P}(S_n^{(h)} \in dx) = \frac{(1 + o(1))}{R(h)^n} e^{-h_{x/n}x} \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x).$$

Для доказательства теоремы остается применить к последней вероятности локальную теорему. Равномерность полученной асимптотики по x вытекает из доказанной нами равномерности асимптотики в локальной теореме по x и h. □