1 Локальная предельная теорема Гнеденко

1.1 Локальная предельная теорема

Теорема 1 (Гнеденко)**.** *Пусть X_i — н.о.р. решетчатые случайные величины с a и шагом d, $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

при $k \in an + d\mathbb{Z}$, $n \to \infty$, причем $o()$ равномерно мало по указанным k.

Замечание 1. Заметим, что из теоремы вытекает, что при $|k - an| \le t\sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d + o(1)}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}},$$

причем $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым k. Действительно, в силу теоремы

$$\frac{\mathbf{P}(S_n = k)}{\frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}}} = 1 + \frac{o\,(1)}{e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}}} \to 1,\ n \to \infty,$$

равномерность по k вытекает из ограниченности снизу знаменателя в последнем слагаемом.

Доказательство. Будем считать, что $a = 0$, $d = 1$, в противном случае перейдем от величин X_i к $(X_i - a)/d$.

Будем доказывать теорему на основе формулы обращения для дискретного случая

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \psi^n_{X_1}(t) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{n}}} \psi^n_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt.$$

Положим $x = \frac{k-\mu n}{\sqrt{n}\sigma}$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-it\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}} \psi^n_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \psi^n_{\frac{X_1 - a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

При этом

$$\left| \int_{\delta\sigma\sqrt{n} < |t| < \pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \psi^n_{\frac{X_1 - a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt \right| \le \pi\sigma\sqrt{n} q^n,$$

где $\sup_{\delta < |s| < \pi} |\psi_{X_1}(s)| = q$. Заметим, что если $\psi_{X_1}(s_0) = e^{is_0 b}$, то $\psi_{X_1 - b}(s_0) = 1$, откуда

$$\mathbf{P}\left(X_1 \in \left\{b + \frac{2\pi k}{s_0},\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right) = 1.$$

Тогда шаг X_1 будет $\frac{2\pi}{s_0}$, что, в сочетании с решетчатостью и $d = 1$ дает $s_0 > 2\pi$. Это противоречит $\delta < s < \pi$, то есть $q < 1$ и оцениваемый интеграл экспоненциально мал по n.

В этом месте мы остановились во время лекции

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{|t| \le \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно по x стремится к 0 при $n \to \infty$, поскольку

$$\int_{|t| > \delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dx = o(1).$$

Тем самым, для доказательства требуемой формулы, нам достаточно показать, что при достаточно малых δ
$$\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\left(\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-t^2/2}\right)dt=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$
Для этого требуется оценить
$$\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\left|e^{n\left(\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2n}\right)}-1\right|dt.$$
При любом $\varepsilon>0$ и достаточно малом δ при $|s|<\delta$ верно неравенство
$$\left|\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}(s)+\frac{s^2}{2}\right|<\varepsilon s^2.$$
Тогда оцениваемый интеграл не превосходит
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\max\left(e^{\varepsilon t^2}-1, 1-e^{-\varepsilon t^2}\right)dt<\varepsilon_1$$
при любом $\varepsilon_1>0$ и достаточно малых $\varepsilon>0$. □

1.2 Большие уклонения

Теорема Гнеденко подробно характеризует поведение S_n в $O(\sqrt{n})$ окрестности среднего, но оставляет открытым вопрос о том, как ведут себя $\mathbf{P}(S_n=k)$ при более удаленных k, давая лишь оценку $o(n^{-1/2})$.

Чтобы научиться работать с k, удаленными от μn, нам понадобится такая идея:
$$\mathbf{P}(S_n=k)=\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}\mathbf{P}(X_1=k_1)\ldots\mathbf{P}(X_n=k_n)=$$
$$\frac{e^{-hk}}{(\mathbf{E}e^{hX})^n}\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}\mathbf{P}\left(X_1^{(h)}=k_1\right)\ldots\mathbf{P}\left(X_n^{(h)}=k_n\right)=e^{-hk}R(h)^n\mathbf{P}(S_n^{(h)}=k),$$
где $R(h)=\mathbf{E}e^{hX}$,
$$\mathbf{P}(X_1^{(h)}=k)=\frac{e^{hk}}{R(h)}\mathbf{P}(X_1=k).$$
Такое распределение называют сопряженным. Мы хотим подобрать параметр h так, что
$$\mathbf{E}X_1^{(h)}=\frac{k}{n},$$
тогда теорема Гнеденко станет работать хорошо и
$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)}=k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\mathbf{D}X_1^{(h)}}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
Значит,
$$\mathbf{P}(S_n=k)=\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n\mathbf{D}X_1^{(h)}}}e^{-hk}R(h)^n.$$
Но прежде чем мы зададимся вопросами чему равны среднее и дисперсия такого распределения, отметим, что в наших рассуждения есть неаккуратность. Поскольку мы хотим получить соотношение

$\mathbf{E}X_1^{(h)} = k/n$, параметр h будет зависеть от n. Но тогда при каждом n у X_i будет свое распределение, а в исходной теореме Гнеденко такого не позволялось. Поэтому нам понадобится равномерность о-малого в теореме Гнеденко по всем h.

Для этого отметим следующее свойство проведенных нами в доказательстве теоремы Гнеденко оценок.

Замечание 2. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство решетчатых случайных величин с одинаковым a, d, причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(\theta) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b, c]$, $|s| < \delta$
$$\left| \ln \psi_{\frac{X_1^{(h)} - \mu(h)}{\sigma(h)}}(s) + \frac{s^2}{2} \right| < \varepsilon.$$

Тогда при любом t и $|k - an| \le t\sqrt{n}$
$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(k-\mu(h)n)^2}{2n\sigma(h)}} + o(n^{-1/2}),$$
причем $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым k и $h \in [b, c]$.