13 Принципы больших уклонений

13.1 Теорема Крамера

Теорема 1 (Крамера)**.** *Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.*

Доказательство. Нам оставалось доказать что при любых $\delta > 0$, $x \in G$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \geq -\Lambda(x). \tag{1}$$

- Пусть $R(h) < \infty$ при всех $h \in \mathbb{R}$, распределение величины X сосредоточено на $[-a, a]$, причем не сосредоточено на $[0, a]$ или $[-a, 0]$.

- Пусть распределение не сосредоточено ни на $\mathbb{R}^+$, ни на $\mathbb{R}^-$. Фиксируем $M > 0$ и рассмотрим наши величины на отрезке $(-M, M)$, т.е. рассмотрим

  $$\mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) := \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)|X_i \in (-M,M), i \leq M) =$$
  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \leq M)\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-n}.$$

  Тогда

  $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \leq M)$$
  $$\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) - \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)).$$

  К мерам Q_n в силу пункта a) можно применить теорему и получить, что правая часть записанного тождества есть

  $$-\Lambda_M(0) + \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)) = -\ln \inf(\mathbf{E}(e^{hX_1}|X_1 \in (-M,M))) + \ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))$$

  При $M \to \infty$ второе слагаемое стремится к 0. Первое в силу предыдущей части сходится к величине не меньшей $\inf_h \ln R_M(h)$, где

  $$R_M(\widetilde{h}) = \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-1}\mathbf{E}e^{hX_1}I_{X_1\in(-M,M)} \to \mathbf{E}e^{hX_1} = R(h),\ M \to \infty.$$

  Если $I_M = \inf \ln R_M(h)$, $I^* = \limsup_{M\to\infty} I_M$, то

  $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \geq \lim_{M\to\infty}(\ln \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)) + \inf_h \ln R_M(h)) = I^*$$

Отстается убедиться, что $I^* = \inf \ln R(h)$. Заметим, что I^*

$$I^* = \lim_{M\to\infty} \inf_h \ln \mathbf{E}(\exp(hX_1); X_1 \in (-M, M)).$$

При каждом M рассмотрим множество таких h, что $\ln \mathbf{E}(\exp(hX_1); X_1 \in (-M, M)) \le I^*$. Эти множества замкнуты (в силу непрерывности), непусты (поскольку I^* — предел монотонной последовательности). Значит найдется t, лежащий в пересечении таких множеств по всем M, откуда

$$\ln R_M(t) \le I^*.$$

Но $\ln R_M(t) \to \ln R(t)$ по теореме о монотонной сходимости, откуда $I^* \le \Lambda(0)$, что и требовалось доказать.

- Пусть распределение сосредоточено на одной из полуосей (для удобства на положительной). Тогда $R(h)$ монотонно возрастает, а значит

$$\Lambda(0) = -\ln \inf_{h\in\mathbb{R}} R(h) = -\ln \lim_{h\to-\infty} R(h) = -\ln \mathbf{P}(X_1 = 0).$$

Но

$$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \ge \mathbf{P}(X_1 = 0)^n,$$

откуда вытекает требуемое.

$\square$

13.2 Теорема Гартнера-Эллиса

Принцип больших уклонений можно сформулировать и для значительно более общей модели. Пусть Z_1,...,Z_n — некоторые случайные векторы, $R_{Z_n}(\vec{h}) = \mathbf{E}\exp(\langle \vec{h}, Z_n\rangle)$. Предположим, что существует предел

$$\ln R(\vec{h}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln R_{Z_n}(n\vec{h}),$$

причем $R(\vec{h})$ конечна в окрестности нуля. Пусть $\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h})$.

Назовем функцию $\ln R$ существенно гладкой, если $\ln R(\vec{h})$ конечна на множестве D_R, внутренность которого D_R^{int} непуста, $\ln R$ дифференцируема в этом множестве, $|grad \ln r R(\vec{\theta})|$ сходится к бесконечности при $\vec{\theta} \to \vec{\theta}_0$, $\vec{\theta}_0$ на границе D_R^{int}. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 2 (Гартнер-Эллис)**.** . *Если* $\ln R$ *существенно гладкая, непрерывная снизу функция, то* $P(\vec{Z}_n \in A)$ *удовляет ПБУ с* $\Lambda(\vec{\theta})$.

Обсудим два значимых вопроса.

Замечание 1. Определенные выше функции обладают следующими свойствами:

1. Функция R выпуклая ф-ия, Λ выпуклая ф-ия роста.
2. Если найдется h: $grad \ln R(\vec{h}) = \vec{\theta}$, то $\Lambda(\vec{\theta}) = (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h})$.

Доказательство части 2) и второй половины 1) повторяет уже проведенные доказательства для теоремы Крамера. Выпуклость R следует из выпуклости R_{Z_n}.

Замечание 2. Можно заметить, что

$$\Lambda(\vec{\theta}) \le \liminf \Lambda_n(\vec{\theta}),$$

т.к.

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h}, \vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})) \le \liminf \sup_{\vec{h}}(\vec{h}, \vec{\theta}) - n^{-1} \ln R(\vec{h}n) = \liminf \Lambda_n(\vec{\theta}).$$

Может возникнуть подозрение, что $\Lambda(\vec{\theta}) = \lim \Lambda_n(\vec{\theta})$. Но это не так. Для примера можно рассмотреть $Z_n = 1/n$. Тогда $R_n(h) = e^{h/n}$, $R(h) = 1$, $\Lambda_n(\theta) = \infty$, $\Lambda(\theta) = \infty$, $\theta \neq 0$ и $\Lambda(0) = 0$.

Доказательство. 1) Получим оценку сверху, т.е. для любого замкнутого F покажем, что

$$\limsup \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \le -\inf_{\vec{\theta} \in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

1.1) Докажем оценку для компактного F. Для окрестности $U_\delta(\vec{\theta})$

$$\mathbf{P}(Z_n \in U_\delta(\vec{\theta})) \le \mathbf{E} e^{(\vec{h}n, \vec{Z}_n)} \exp\left(-\inf_{\vec{y} \in U_\delta(\vec{\theta})} (\vec{h}, y)\right) \le R_n(n\vec{h}) e^{-n(\vec{h}, \vec{x})} e^{\delta |\vec{h}| n}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ для каждого $\vec{\theta} \in F$ найдутся $\delta = \delta(\vec{\theta})$, $\vec{h}$, такие что $\delta |\vec{h}| < \varepsilon$, $\Lambda(\vec{\theta}) \le (\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln R(\vec{h}) + \varepsilon$. Для каждой точки $\vec{\theta} \in F$ рассмотрим $U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})$. Тогда мы имеем покрытие компакта F такими окрестностями, из которого можно выбрать конечное подпокрытие, центры окрестностей которого мы назовем $\vec{\theta}_i$, $i \leq N$. Имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_{\delta(\vec{\theta})}(\vec{\theta})) \leq 2\varepsilon - \Lambda(\vec{\theta}).$$

Рассмотрим покрытие компакта F открытыми шарами с центрами $\vec{\theta}_i$ и радиусами $\delta(\vec{\theta}_i)$. Выбирая из него конечное подпокрытие, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{Z}_n \in F) \leq 2\varepsilon - \inf_{\vec{\theta}\in F} \Lambda(\vec{\theta}).$$

Отсюда для компактного F имеем верхнюю оценку. $\square$