

12 Теорема Крамера

Лемма 1. 1. $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.

2. Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$.

3. Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = -\infty$). Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} < 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = +\infty$).

4. $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает, $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$ (в бесконечном случае это соотношение понимается как предельное).

5. Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = \mathbf{E}X_1 e^{hX_1}$. При этом если супремум в определении $\Lambda(\theta)$ достигается во внутренней точке h , то $(\ln R)'(h) = \theta$.

Доказательство. 1. Надо доказать, что $\ln R(h_1 t_1 + h_2 t_2) \leq \ln R(h_1) t_1 + \ln R(h_2) t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.

Но

$$R(h_1 t_1 + h_2 t_2) = \mathbf{E} (e^{h_1 X_1})^{t_1} (e^{h_2 X_1})^{t_2} \leq (\mathbf{E} e^{h_1 X_1})^{t_1} (\mathbf{E} e^{h_2 X_1})^{t_2}$$

в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравенства

$$\sup_h (h\theta_1 t_1 + h\theta_2 t_2 - \ln R(h\theta_1 t_1) - \ln R(h\theta_2 t_2)) \leq t_1 \sup_h (h\theta_1 - \ln R(h\theta_1)) + t_2 \sup_h (h\theta_2 - \ln R(h\theta_2)).$$

То, что Λ неотрицательна прямо следует из определения. Покажем, что она полунепрерывна снизу

$$\Lambda(\tilde{\theta}) = \sup_h (\tilde{\theta} h - \ln R(h)) \leq \tilde{\theta} \tilde{h} - \ln R(\tilde{h}) + \varepsilon = \lim_{\theta \rightarrow \tilde{\theta}} (\theta \tilde{h} - \ln R(\tilde{h})) + \varepsilon \leq \lim_{\theta \rightarrow \tilde{\theta}} \sup_h (\theta h - \ln R(h)) + \varepsilon.$$

Следовательно, $\Lambda(\tilde{\theta}) \leq \liminf_{\theta \rightarrow \tilde{\theta}} \Lambda(\theta)$, что и т.д.

2. Утверждение очевидно вытекает из того, что $\theta h - \ln R(h) = -\infty$ при $h \neq 0$.

3. Пусть $X^+ = \max(X, 0)$. В силу неравенства Йенсена $\mathbf{E} \exp(hX^+) \geq \exp(h\mathbf{E}X^+)$, откуда вытекает неравенство

$$\mathbf{E}X^+ \leq \frac{1}{h} \mathbf{E} \exp(hX^+) \leq \frac{1}{h} (1 + \mathbf{E} \exp(hX^+)) < \infty,$$

откуда $\mathbf{E}X^+$ конечно. Аналогично доказывается то, что конечно $\mathbf{E}X^-$.

4. В силу неравенства Иенсена $\mathbf{E}Xh \leq \ln R(h)$. Отсюда несложно доказывается $\Lambda(\mu) = 0$, поскольку $\mu h - \ln R(h) \leq 0$.

Докажем монотонность. Пусть μ конечно. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \leq h\mu - \ln R(h) \leq 0$, т.е. супремум достигается на положительных h , откуда выражение под знаком \sup в определении Λ монотонно возрастает по θ . Аналогично при $\theta < \mu$.

Пусть $\mu = -\infty$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h < 0$, а значит супремум в $\Lambda(\theta)$ можно рассматривать при $h \geq 0$.

$$\Lambda(\theta_1) = \sup_{h \geq 0} (\theta_1 h - \ln R(h)) \leq \sup_{h \geq 0} (\theta_2 h - \ln R(h))$$

при $\theta_1 \leq \theta_2$, откуда Λ неубывает. Аналогично в противном случае. Отметим, что если μ не существует (ни конечного, ни бесконечного), то $R(h) = \infty$ при всех $h \neq 0$, откуда $\Lambda(\theta) = 0$.

5. Дифференцируемость и выражение для Λ мы уже получали раньше перед рассмотрением локальной теоремы Гнеденко. □

Теперь давайте покажем, что справедлива следующая теорема Крамера

Теорема 1. (Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h (hx - \ln R(h))$.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа: 1) Докажем, что для любого замкнутого F

$$\limsup \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in F) \leq - \inf_{\theta \in F} \Lambda(\theta).$$

Если $D_R = \{0\}$, то утверждение очевидно в силу того, что $\ln \mathbf{P}(S_n \in F) \leq 0$, а $\Lambda = 0$ в силу Леммы 5.2. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда найдется $x \in D_R$, $x \neq 0$. При этом существует μ (возможно бесконечное).

Кроме того, если $\inf_{\theta \in F} \Lambda(\theta) = I_F = 0$, то утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай $I_F > 0$.

Если $\mu = -\infty$, то функция Λ в силу Леммы 5.2 возрастает на всей прямой. При этом

$$\mathbf{P}(X_1 \geq x) \leq \inf_{h \geq 0} \mathbf{E} e^{h(X_1 - x)} = \inf_h e^{-(hx - \ln R(h))} = e^{-\Lambda(x)},$$

т.е. $\Lambda(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$. А раз $I_F > 0$, то $\inf F = a > -\infty$.

Остается заметить, что тогда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \leq \mathbf{P}(S_n \geq an) \leq \inf_h \exp(-(ah - \ln R(h))n) = \exp(-\Lambda(a)n),$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается $\mu = \infty$.

И, наконец, если μ конечно, то F не должно содержать μ (иначе $I_F = 0$, т.к. $\Lambda(\mu) = 0$). Значит в силу замкнутости, $\inf\{x > \mu, x \in F\} = x^+ > \mu$, $\sup\{x < \mu, x \in F\} = x^- < \mu$. Отсюда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \leq \mathbf{P}(S_n \geq x^+n) + \mathbf{P}(S_n \leq x^-n) \leq \exp(-\Lambda(x^+)n) + \exp(-\Lambda(x^-)n) \leq 2 \exp(-I_F n),$$

откуда прямо следует верхняя граница.

2) Докажем нижний принцип больших уклонений: для всех открытых G

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \geq -\inf_{x \in G} \Lambda(x). \quad (1)$$

Покажем, что достаточно доказать что при любых $\delta > 0$, $x \in G$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \geq -\Lambda(x). \quad (2)$$

Действительно, если $I = \inf_{x \in G} \Lambda(x)$, то при любом ε найдется $y \in G : \Lambda(y) \leq I + \varepsilon$. При этом при некотором $\delta > 0$ справедливо соотношение $U_\delta(y) \in G$. Тогда из (2) следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(y)) \geq -\Lambda(y) \geq -I - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε , имеем (1). □

Остальную часть доказательства рассмотрим на следующей лекции.