8 Некрамеровский случай

8.1 Теорема о больших уклонениях: окончание

Продолжаем доказывать следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что X_i — н.о.р. случайные величины, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ при $x \to \infty$ является правильно меняющейся с показателем $-\alpha$, $\alpha > 2$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim n\mathbf{P}(X_1 > x) = n\overline{F}(x)$$

при любой такой последовательности $x = x_n$, что $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$.

Доказательство. Для доказательства остается доказать следующую лемму

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 при некотором h выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}(S_n > x; B) \le \left(\frac{n\overline{F}(y)}{r}\right)^{r-\delta/2} \tag{1}$$

при некотором $c > 0$ и любом $\delta > 0$.

Доказательство. Мы доказали, что при $h \to 0$, $hy \to \infty$ выполнено соотношение

$$\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right) \le \exp\left(d_1 h^2 + d_2 \overline{F}\left(\frac{1}{h}\right) + \overline{F}(y) e^{hy}(1 + \varphi(hy))\right),$$

где $\varphi(s) = o(1)$, $s \to \infty$. Оценим полученную правую часть:

$$\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right) \le \exp\left(d_1 h^2 + d_2 \overline{F}\left(\frac{1}{h}\right) + \overline{F}(y) e^{hy}(1 + \varphi(hy))\right),$$

где $\varphi(s) = o(1)$, $s \to \infty$. Тогда

$$P_1 \le \exp\left(-hx + nd_1 h^2 + n\overline{F}(y) e^{hy}(1 + \varphi(hy)) + d_2 n\overline{F}\left(\frac{1}{h}\right)\right)$$

Главная часть

$$-hx + n\overline{F}(y)e^{hy}$$

будет минимальной при $hy = \ln r - \ln(n\overline{F}(y)) = t$. При этом

$$P_1 \le \exp\left(-rt + nd_1 t^2 y^{-2} + r(1 + \varphi(t)) + d_2 n\overline{F}\left(\frac{y}{t}\right)\right).$$

Величина t стремится к бесконечности, $r(1+\varphi(t))$ стремится к r, откуда для доказательства Леммы достаточно показать, что

$$n\overline{F}\left(\frac{y}{t}\right) \to 0,\ n\to\infty,\ nt^2y^{-2} < \delta t/2$$

при достаточно больших t, n. Первое из утверждений вытекает из

$$n\overline{F}\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{o(1)n\overline{F}(y)}{|t|^{-\alpha-\delta}} = o(1)n\overline{F}(y)|\ln(n\overline{F}(y))|^{\alpha+\delta} = o(1).$$

Второе утверждение вытекает из соотношения

$$nty^{-2} = ny^{-2}(\ln r - \ln(n\overline{F}(y))) = ny^{-2}(\ln r - \ln n + \ln y^{\alpha} - \ln L(y)) = o(1),\ n\to\infty,$$

где мы воспользовались тем, что $y = x/r$, $x^2/(n\ln n) \to \infty$, $\ln L(y) < \ln y$ при достаточно большом y. Лемма доказана. $\square$

$\square$

8.2 Интегральная теорема за границей крамеровской зоны

Будем говорить, что распределение принадлежит классу $\mathcal{ER}$, если

$$\overline{F}(x) = e^{-h^+x_n}x_n^{-\alpha}L(x_n),\ n\to\infty,$$

где $\alpha > 3$, $L(x_n)$ — м.м.ф. В этом случае величина X удовлетворяет условию Крамера на $[0,h^+]$, более того $m^+ = \mathbf{E}X^{(h^+)} < +\infty$.

Действительно,

$$\int_0^{\infty} ue^{h^+u}d\overline{F}(u) = ue^{h^+u}\overline{F}(u)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} e^{h^+u}(1+h^+u)\overline{F}(u).$$

Соответствующий интеграл по $(-\infty,0)$ мажорируется единицей, откуда

$$\mathbf{E}e^{h^+X}X < \infty.$$

Следоваельно, конечно и $m^+ = R(h^+)^{-1}\mathbf{E}e^{h^+X}X$.

Мы хотим узнать как устроена асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x_n)$, $x_n > m^+n$?

Оказывается, что выполнена следующая теорема

Теорема 2. *Если распределение принадлежит классу $\mathcal{ER}$, то*

$$\mathbf{P}(S_n > x_n) \sim \frac{1}{R(h^+)} e^{-\Lambda(m^+)n} n\overline{F}(x_n),\ n \to \infty,$$

где $(x_n - m^+ n)/\sqrt{n \ln n} \to \infty$, $n \to \infty$.

Теорема получается использованием асимптотики для сопряженного блуждания $S_n^{(h^+)}$, но требует более точных оценок, чем полученные нами. В связи с этим теорему мы оставим без доказательства.