7 Некрамеровский случай

7.1 Теорема о больших уклонениях

На прошлой лекции мы начали доказывать следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что X_i — н.о.р. случайные величины, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ при $x \to \infty$ является правильно меняющейся с показателем $-\alpha$, $\alpha > 2$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim n\mathbf{P}(X_1 > x) = n\overline{F}(x)$$

при любой такой последовательности $x = x_n$, что $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$.

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали оценку снизу и при оценке сверху оценили

$$\mathbf{P}(S_n > x; \overline{B}),$$

где $B = \cap B_i$, $B_i = \{\xi < y\}$, $y = x/(1+\delta)$.

При этом при любом $h > 0$

$$\mathbf{P}(S_n > x; B) = \mathbf{E}\left(I_{S_n > x}; B\right) \le e^{-hx}\mathbf{E}\left(e^{hS_n}; B\right) = e^{-hx}\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right)^n$$

Докажем следующую Лемму 1.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 при некотором h выполнено неравенство*

$$P_1 = \exp\left(-hx + n\ln\left(\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right)\right)\right) \le \left(\frac{n\overline{F}(y)}{r}\right)^{r-\delta/2} \qquad (1)$$

при некотором $c > 0$ и любом $\delta > 0$.

Из леммы 1 будет следовать, что

$$\mathbf{P}(S_n > x; B) \le e^{1+\delta}(1+2\delta)^{-1-\delta/2}\left(n\overline{F}(y)\right)^{1+\delta/2} = o(n\overline{F}(y)) = o(n\overline{F}(x)),\ n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. Остается доказать лемму.

Доказательство. Для начала нам понадобится важное свойство м.м.ф.:

Лемма 2 (Интегральное представление Караматы)**.** *Пусть $L(x)$ — м.м.ф. Тогда найдутся t_0, $c(t) \to c$, $\varepsilon(t) \to 0$, т.ч. при $t > t_0$*

$$L(x) = c(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon(u)}{u} dy\right).$$

Доказательство. В действительности указанное представление является критерием того, что функция м.м.ф. Нам, впрочем, достаточно только сформулированной части этой теоремы. Кроме того, мы докажем теорему, предполагая интегрируемость $L(x)$ на любом отрезке. В оригинальном доказательстве это свойство доказано исходя из определения, но в нашем случае оно выполнено само собой, поскольку мы рассматриваем $L(x) = F(x)x^\alpha$, где F — ф.р. Указанная функция имеет не более чем счетное число разрывов и ограничена, поэтому проблемы с интегрируемость в нашем случае отсутствуют.

Заметим, что утверждение равносильно тому, что для $f(x) = \ln L(e^t)$ выполнено соотношение

$$f(t) = d(t) + \int_{t_0}^{t} \delta(v)dv,$$

где $d(t) \to d$, $\delta(t) \to 0$, $t \to \infty$.

При этом f обладает следующим свойством: $f(t+s) - f(t) \to 0$, $t \to \infty$, при любом s.

Заметим, что

$$f(t) = \int_0^1 f(t)dv = \int_0^1 (f(t) - f(t+v))dv + \int_t^{t+1} f(v)dv =$$
$$\int_0^1 (f(t) - f(t+v))dv + \int_{t_0}^{t} (f(v+1) - f(v))dv + \int_{t_0}^{t_0+1} f(v)dv.$$

Третий интеграл есть фиксированная константа. Второй интеграл представляет собой интеграл от функции $\delta(v) = f(v+1) - f(v)$, стремящейся к нулю на бесконечности. Для доказательства теоремы достаточно показать, что первый интеграл сходится к 0. Для этого покажем, что $f(t) - f(t+s)$ сходится к нулю равномерно по s.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $A_x = [x, x+2]$, $A_x^* = \{u \in I_x : |f(u) - f(x)| > \varepsilon\}$. С ростом x индикатор множества A_x^* поточечно стремится к нулю в силу условия на f, откуда стремится к нулю и мера множества $A^*(x)$. Рассмотрим $A_x \cap A_{x+s}$, $s \in [0,1]$. Это множество имеет меру не меньше 1, а значит при достаточно большом x в нем найдется точка u, не лежащая ни в A^*x, ни в A^*_{x+s}, то есть такая, что

$$|f(u) - f(x)| \le \varepsilon, \quad |f(u) - f(x+s)| \le \varepsilon,$$

откуда $|f(x+s) - f(x)| < 2\varepsilon$. Эта оценка не зависит от s, а зависит только от x, что и означает равномерность. $\square$

Лемма 3. *Если L — м.м.ф., то при любом $\delta > 0$ и достаточно большом x_0 при $x > x_0$ справедливо соотношение*

$$x^{-\delta} < L(x) < x^{\delta}.$$

Доказательство. В силу полученного представления

$$L(x) = c(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right) < c(x)\exp\left(0.5\delta\int_{x_0}^{x}t^{-1}dt\right) \leq 2cx^{\delta/2}$$

при достаточно больших x_0, x. Аналогичным образом доказывается нижняя оценка. □

Лемма 4. *Если L — м.м.ф., то при любом $\delta > 0$ и $x_0 > 1$ найдется такое t_0, что при $t > t_0$, $x > x_0$*

$$x^{-\delta} < \frac{L(xt)}{L(t)} < x^{\delta}.$$

Доказательство. В силу представления Карамата

$$\frac{L(xt)}{L(t)} = \frac{c(xt)}{c(t)}\exp\left(\int_{t}^{xt}\frac{\varepsilon(t)}{t}\right).$$

При этом

$$\int_{t}^{xt}\frac{\varepsilon(t)}{t} \leq \frac{\delta}{2}(\ln(xt) - \ln t) = \frac{\delta}{2}\ln x$$

при достаточно больших t, $c(xt)/c(t) < x_0^{\delta/2}$ при достаточно больших x_0, поскольку $c(t)$, $c(xt)$ стремятся к .

Следовательно

$$\frac{L(xt)}{L(t)} \leq x^{\delta}.$$

Оценка снизу доказывается аналогично. □

Отсюда, в частности, вытекает соотношение

$$n\overline{F}(x) = nx^{-\alpha}L(x) < nx^{\delta-\alpha}$$

при достаточно больших x. Но $x > \sqrt{n}$, а $\alpha - \delta > 2$ при достаточно маленьком δ, откуда имеем требуемое.

1) Будем подбирать h таким образом, что $hy \to \infty$, $h \to 0$. Тогда

$$\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right) \le \exp\left(d_1 h^2 + d_2 \overline{F}\left(\frac{1}{h}\right) + \overline{F}(y) e^{hy}(1 + \varphi(hy))\right),$$

где $\varphi(s) = o(1)$, $s \to \infty$.

Действительно,

$$\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right) = \int_{-\infty}^{y} e^{hz} dF(z) = \int_{-\infty}^{\alpha/h} e^{hz} dF(z) + \int_{\alpha/h}^{y} e^{hz} dF(z).$$

Первый интеграл при любом $\beta > 0$ оценивается сверху величиной

$$\int_{-\infty}^{\beta/h} dF(z) + h \int_{-\infty}^{\beta/h} z dF(z) + \frac{1}{2} h^2 e^{\beta} \int_{-\infty}^{\beta/h} z^2 dF(z) \le 1 + h^2 e^{\beta}/2 < 1 + d_1 h^2.$$

при некотором d_1. Второй интеграл представим в виде

$$-\int_{-\beta/h}^{y} e^{hz} d\overline{F}(z) = -\overline{F}(z) e^{hz}|_{\beta/h}^{y} + h \int_{\beta/h}^{y} \overline{F}(z) e^{hz} dz \le e^{\beta} \overline{F}(\beta/h) + h \int_{\beta/h}^{y} \overline{F}(z) e^{hz} dz.$$

Первое слагаемое при $h \to 0$ эквивалентно

$$d\overline{F}\left(\frac{1}{h}\right),$$

а значит мажорируется $d_2 \overline{F}(1/h)$ при некотором $d_2 > 0$. Для оценки второго представим его в виде

$$e^{hy} \overline{F}(y) \int_{0}^{\infty} e^{-u} \frac{\overline{F}(y - u/h)}{\overline{F}(y)} I_{u \le yh - \beta} du$$

При этом $\overline{F}(y - u/h)/\overline{F}(y) \to 1$ при любом фиксированном u и $hy \to \infty$, поскольку

$$\limsup_{y \to \infty} \frac{\overline{F}(y - u/h)}{\overline{F}(y)} \le \limsup_{y \to \infty} \frac{\overline{F}((1 - \varepsilon) y)}{\overline{F}(y)} = (1 - \varepsilon)^{-\alpha}$$

при любом $\varepsilon > 0$, откуда предел равен 1.

Перейдем к пределу под знаком интеграла. Для этого докажем, что выполнены условия теоремы о мажорируемой сходимости. Воспользуемся тем, что

$$\overline{F}(z) \le \overline{F}(y) \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha + \delta} \le \overline{F}(y) \exp\left((\alpha + \delta) \frac{(y - z)}{z}\right) \le \overline{F}(y) \exp\left(\frac{(\alpha + \delta)}{\beta} (y - z) h\right).$$

Следовательно, при $\beta = 2(\alpha + \delta)$ имеем

$$\int_0^\infty e^{-u} \frac{\overline{F}(y - u/h)}{\overline{F}(y)} I_{u \le yh - \beta} du \le \int_0^\infty e^{-u+u/2} du \le 2.$$

Значит,

$$h \int_{\beta/h}^{y} \overline{F}(z) e^{hz} dz = (1 + \varphi(hy)) \overline{F}(y) e^{hy}.$$

Собирая полученные оценки имеем

$$\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right) \le \left(1 + d_1 h^2 + d_2 \overline{F}\left(\frac{1}{h}\right) + \overline{F}(y) e^{hy} (1 + \varphi(hy))\right).$$

Но $1 + u \le e^u$ при любом $u \in \mathbb{R}$.

Вторая часть леммы будет доказана на следующей лекции. $\square$

$\square$