6 Интегральные теоремы о больших уклонениях

6.1 Теорема Бартфаи

Для определенности рассмотрим решетчатый случай.

Теорема 1. *Пусть* X_i *— н.о.р.,* $\mathbf{E}X^2e^{h^+X} < \infty$, $\mathbf{E}X^2e^{h^-X} < \infty$, $h^- \le 0 \le h^+$, $\mathbf{E}X = \mu$. *Тогда при любых* m, $k_1, \dots, k_m$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m | S_n = x) = (1 + o(1))\mathbf{P}(X_1^{(h_{x/n})} = k_1) \cdots \mathbf{P}(X_m^{(h_{x/n})} = k_m).$$

выполнено равномерно по $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset [m^-, m^+]$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m, S_n = x) = \mathbf{P}(X_1 = k_1) \cdots \mathbf{P}(X_m = k_m)\mathbf{P}(S_{n-m} = x - k_1 - \dots - k_m),$$

откуда в силу теоремы

$$\mathbf{P}(S_{n-m} = x - k_1 - \dots - k_m) = \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi(n-m)}\sigma(h_{x-(k_1+\dots+k_m)/(n-m)})} \times \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x - k_1 - \dots - k_m}{n-m}\right)(n-m)\right).$$

Строго говоря, у нас может возникнуть проблема, если $(x-k_1-\dots-k_m)/(n-m)$ окажется больше m^+ или меньше m^-. Об этом поговорим в конце доказательства.

При этом

$$\sigma(h_{x-(k_1+\dots+k_m)/(n-m)} = \sigma(h_{x/n}) + o(1),$$

$$\Lambda\left(\frac{x - k_1 - \dots - k_m}{n-m}\right)(n-m) = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)h - h_{x/n}(k_1 + \dots + k_m) + m \ln R(h_{x/n}) + o(1).$$

в силу формулы Тейлора и определения Λ. Значит,

$$\mathbf{P}(S_{n-m} = x - k_1 - \dots - k_m) = \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n) R(h_{x/n})^{-m} e^{h_{x/n}(k_1+\dots+k_m)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m | S_n = x) = (1+o(1))\mathbf{P}(X_1 = k_1) \cdots \mathbf{P}(X_m = k_m) e^{h_{x/n}(k_1+\dots+k_m)} R(h_{x/n})^{-m} = \mathbf{P}(X$$

Что же делать, если аргумент оказался слегка (на $o(\sqrt{n})$) за пределами диапазона $[m_-, m_+]$? Мы можем слегка "недосопрячь" распределение. Пусть скажем, $x/n = m^+ + r_n$, $r_n = o(\sqrt{n})$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = x) = e^{-h^+x}R(h^+)^n\mathbf{P}(S_n^{(h^+)} = x) = (1 + o(1))e^{-\Lambda(h^+)n}e^{-h^+r_n}e^{-\frac{r_n^2}{2\sigma(h^+)n}}$$

Отсюда получаем тот же результат теми же рассуждениями. □

Таким образом, в нашем крамеровском случае, чтобы сумма достигла уровня x, величины X_i асимптотически должны вести себя как независимые величины с средним x/n. Правда, это так пока мы рассматриваем конечное или достаточно медленно растущее количество X_i. Скажем, у всего набора $X_1, \ldots, X_n$ будет определенная зависимость, но об этом мы поговорим во втором семестре.

6.2 Теорема о больших уклонениях

Определение 1. Назовем медленно меняющейся функцией положительную функцию $L(x)$, удовлетворяющую свойству

$$\lim_{y\to\infty} \frac{L(xy)}{L(y)} = 1.$$

Определение 2. Назовем правильно меняющейся функцией с показателем α положительную функцию $R(x)$, удовлетворяющую свойству

$$\lim_{y\to\infty} \frac{R(xy)}{R(y)} = x^\alpha.$$

Если R правильно меняется с показателем α, то $R(x) \sim x^\alpha L(x)$, $x \to \infty$.

Предположим, что X_i — н.о.р. случайные величины, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ при $x \to \infty$ является правильно меняющейся с показателем $-\alpha$, $\alpha > 2$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Теорема 2. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim n\mathbf{P}(X_1 > x) = n\overline{F}(x)$$

при любой такой последовательности $x = x_n$, что $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$.

Доказательство. Доказательство заключается в построении оценки сверху и оценки снизу. Нам понадобится утверждение о том, что $\overline{F}(x) = o(1/n)$, $n \to \infty$. Мы покажем это на следующей лекции

1) Оценку сверху разобьем на несколько частей. Фиксируем $y = x/r$, положим $B_j = \{X_i < y\}$, $B = \cup_{j \le n} B_j$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n > x) = \mathbf{P}(S_n > x, B) + \mathbf{P}(S_n > x, \overline{B}).$$

В первом случае

$$\mathbf{P}(S_n > x; B) \le e^{-hx}\mathbf{E}\left(e^{hS_n}; B\right) = \exp\left(-hx + n\ln\left(\mathbf{E}\left(e^{hX_1}; X_1 < y\right)\right)\right), \tag{1}$$

Мы покажем, что правая часть (1) может быть сделана меньше

$$e^r\left(\frac{n\overline{F}}{r}\right)^{r-\delta} \tag{2}$$

при некотором $c > 0$ и любом $\delta > 0$.

Полагая $r = 1 + 2\delta$, получаем при любом δ оценку сверху

$$\mathbf{P}(S_n > x; B) \le c(n\overline{F})^{1+\delta}$$

при некотором $\delta > 0$. Правая часть есть $o(n\overline{F})$.

Для оценки $\mathbf{P}(S_n > x, \overline{B})$ сверху воспользуемся тем, что

$$\mathbf{P}(S_n > x, \overline{B}) \le \mathbf{P}(\overline{B}) \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i > y) = n\overline{F}(x/r).$$

При $n \to \infty$ величина x стремится к бесконечности, откуда

$$\frac{\overline{F}(x/r)}{\overline{F}} \to \frac{1}{r^\alpha} = \frac{1}{(1+2\delta)^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} \le \frac{1}{(1+2\delta)^\alpha}.$$

В силу произвольности δ имеем требуемую оценку.

2) Оценка снизу значительно более проста: положим $y = x + t\sqrt{n-1}$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge \mathbf{P}(\cup_{i=1}^n\{X_i > y, S_n > x) \ge \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i > y, S_{n-1} > x - y) -$$
$$\sum_{i\ne j}\mathbf{P}(X_i > y, X_j > y) = n\overline{F}(y)\mathbf{P}(S_{n-1} > -t\sqrt{n-1}) - (n\overline{F}(y))^2.$$

Вероятность $\mathbf{P}(S_{n-1} > -t\sqrt{n-1})$ стремится к $\Phi(-t)$, величина $n\overline{F}(y) = o(1)$. При этом

$$\frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(x(1-\delta)}{\overline{F}(x)} \to (1-\delta)^{-\alpha}$$

при любом $\delta > 0$ и достаточно больших n. Значит

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} \to \frac{1}{(1-\delta)^{\alpha}}\Phi(-t)$$

В силу произвольности δ, t, имеем требуемое.

Остается доказать следующую лемму:

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 правая часть (1) оценивается сверху величиной (2).*

$\square$