5 Интегральные теоремы о больших уклонениях

5.1 Умеренные уклонения

Мы доказали следующую теорему

Теорема 1. *Пусть X_i решетчаты, $R(h) < \infty$ при некотором $h \in [0, h^+)$. Пусть $x \in [n^{1/2+\delta}, n^{1-1/k}]$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \geq \mu n + x) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/(2n)} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right),\ n \to \infty.$$

Заметим, что этот результат можо сформулировать в той же форме, что теорема Петрова, поскольку

$$\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n = \sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}} + o(1),\ n \to \infty,\ \frac{\sigma\sqrt{n}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\sigma h_{x/n}},$$

поскольку из разложения в форме Тейлора

$$h_{x/n} \sim \frac{x}{n}\frac{1}{\sigma^2}.$$

Поэтому по существу мы можем просто считать, что теорема Петрова остается верной не только при $x > \theta n$, $\theta > \mu$, но и при $x > \mu n + n^{1/2+\delta}$.

Мы сформулировали наши результаты для решетчатого случая. Однако, как мы уже замечали ранее, можно формулировать локальные теоремы и в других случаях.

1) В частности в абсолютно-непрерывном случае:

Теорема 2. *Пусть X_i абсолютно-непрерывны, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\int_{\mathbb{R}} |\psi_X(t)|^k dt < \infty$. Тогда*

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 1. Условие интегрируемости х.ф. в каком-то виде необходимо, но может быть дано в других формах — ограниченности плотности S_k при каком-то k или интегрируемости плотности S_k в квадрате.

Доказывать указанную теорему мы не будем (это будет сделано в курсе дополнительных глав теории вероятностей), но отметим, что и в этом случае справедливо замечание к теореме Гнеденко о равномерности по семейству распределений $X^{(h)}$:

Замечание 2. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b,c]$, семейство абсолютно непрерывных случайных величин, у которых существует такое k, что $\psi(t)$ интегрируема в k степени (или плотность S_k ограничена или плотность S_k интегрируема в квадрате) причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(\theta) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b,c]$, $|t| < \delta$
$$\left|\psi(t) - 1 - it\mathbf{E}X^{(h)} + \frac{t^2}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2\right| < \varepsilon t^2.$$

Тогда
$$f_{S_n^{(h)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty,$$
где $o(1)$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$ и $h \in [b,c]$.

Как и прежде, если $R(h) < \infty$ при $h \in (h^-, h^+)$, то условия замечания выполнены для сопряженных величин $X^{(h)}$ с плотностью
$$f_{X^{(h)}}(x) = e^{hx}R(h)^{-1}f_X(x)$$
по h из любого компакта в (h^-, h^+). Тогда можно проделать аналогичный трюк с сопряжением
$$f_{S_n^{(h)}}(x) = f_{S_n}(x)e^{hx}R(h)^{-n},$$
откуда
$$f_{S_n}(x) = R(h)^n e^{-hx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом, при $x/n \in (m^-, m^+)$ мы можем взять $h = h_{x/n}$ и получить отсюда

$$f_{S_n}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)$$

2) В общем нерешетчатом случае справедлива интегро-локальная теорема Стоуна:

Теорема 3. *Пусть X_i имеют нерешетчатое распределение, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2 > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n \to 0$ — некоторая последовательность.

Замечание 3. Можно утверждать что есть такая последовательность $\widetilde{\Delta}_n \to 0$, что при всех $\Delta_n > \widetilde{\Delta}_n$

Доказывать указанную теорему мы не будем (возможно это будет сделано в курсе дополнительных глав теории вероятностей), но отметим, что и в этом случае справедливо замечание о равномерности по семейству распределений $X^{(h)}$:

Замечание 4. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство абсолютно непрерывных случайных величин, у которых существует такое k, что $\psi(t)$ интегрируема в k степени (или плотность S_k ограничена или плотность S_k интегрируема в квадрате) причем при каждом h величины $X_1^{(h)}$,...,$X_n^{(h)}$,... — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h\in[b,c]} \sigma(h) \le \sup_{h\in[b,c]} \sigma(\theta) < \infty$.

2. При любом $\delta > 0$ справедливое неравенство $\sup_{h\in[b,c]} \sup_{s\in[\delta,\pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,

3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b, c]$, $|t| < \delta$

$$\left|\psi(t) - 1 - it\mathbf{E}X^{(h)} + \frac{t^2}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2\right| < \varepsilon t^2.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o()$ равномерно мало по $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n \to 0$ — некоторая последовательность.

Как и прежде, если $R(h) < \infty$ при $h \in (h^-, h^+)$, то условия замечания выполнены для сопряженных величин $X^{(h)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(X^{(h)} \in A) = \int_A e^{hx} R(h)^{-1} \mathbf{P}(X \in dx)$$

по h из любого компакта в (h^-, h^+). Тогда можно проделать аналогичный трюк с сопряжением

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x, x+\Delta_n)) = \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) e^{hx} R(h)^{-n},$$

откуда

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = R(h)^n e^{-hx} \left(\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} e^{-\frac{(x-m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом, при $x/n \in (m^-, m^+)$ мы можем взять $h = h_{x/n}$ и получить отсюда

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right)$$