1 Интегральные теоремы о больших уклонениях

1.1 Большие уклонения

На прошлой лекции мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть X_i — н.о.р. решетчатые с шагом d и сдвигом a, $\mathbf{E}X_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in (0, h^+)$. Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(x/n)n},\ n \to \infty,$$

выполнено равномерно по $x/n \in [0, \theta_2]$, $\theta_2 \in (0, m^+)$, $x \in an + \mathbb{Z}d$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что по определению сопряженного распределения

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{R(h)^n} e^{-hx} \mathbf{P}(S_n^{(h)} \in dx) = \frac{(1 + o(1))}{R(h)^n} e^{-h_{x/n}x} \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x).$$

Для доказательства теоремы остается применить к последней вероятности локальную теорему. Равномерность полученной асимптотики по x вытекает из доказанной нами равномерности асимптотики в локальной теореме по x и h. □

Отсюда несложно вывести так называемую теорему Петрова-Бахадура-Рао:

Теорема 2. *Пусть X_i решетчаты, удовлетворяют условию Крамера и $\mathbf{E}X_1 = \mu$. Пусть $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})(1 - e^{-h_{x/n}d})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right),\ n \to \infty,$$

если x принадлежит решетке распределения S_n, то есть $x \in an + d\mathbb{Z}$.

Доказательство. В силу локальной теоремы при $r_n = [\sqrt[3]{n}]$

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + dr_n)) = (1 + o(1)) \sum_{k=0}^{r_n - 1} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{(x+dk)/n})} \exp\left(-\Lambda\left(x + \frac{dk}{n}\right)n\right).$$

При этом $\sigma(h_{(x+dk)/n}) - \sigma(h_{x/n}) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по k, поскольку σ и h. непрерывны, а $k/n \leq r_n/n = o(1)$,

$$\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{k}{n}\right)n = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n + k\Lambda'\left(\frac{x}{n}\theta\right) + O\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 n\right),$$

где последняя величина есть $o(1)$ для рассматриваемых k, поскольку $k/n \le n^{1/3}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+r_n)) = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(\frac{x}{n})n} \sum_{k=0}^{r_n-1} e^{-dh_{x/n}k} = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)\left(1-e^{-dh_{x/n}}\right)} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

Остается заметить, что

$$\mathbf{P}(S_n \ge x + r_n) \le R(h_{x/n})^n e^{-h_{x/n}(x+r_n)} = e^{-\Lambda(x/n)n} e^{-h_{x/n}\sqrt[3]{n}} = o(1)\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda(x/n)n}.$$

□

1.2 Умеренные уклонения

Пусть X_i решетчаты, $R(h) < \infty$ при некотором $h \in [0, h^+)$. Какова асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n \ge \mu n + x)$$

при $x = o(n)$, $xn^{-1/2} \to \infty$?

Теорема 3. *Пусть $x \in [n^{1/2+\delta}, n^{1-1/k}]$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \ge \mu n + x) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/(2n)} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right),\ n \to \infty.$$

Замечание 1. Если бы ЦПТ давала бы верную асимптотику при $xn^{-1/2} \to \infty$, то

$$\mathbf{P}(S_n \ge \mu n + x) \sim 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}\right).$$

Однако, мы видим, что это лишь часть асимптотики, при $k \ge 3$ результат будет значительно отличаться. Тем самым, ЦПТ работает в наших условиях до $x = o(n^{2/3})$, а при x имеющих порядок $n^{2/3}$ и выше она будет давать неточную асимптотику.

Доказательство. Для удобства предположим, что $n^{(k-1)/k} < x < n^{k/(k+1)}$ при некотором $k \ge 3$. Случай $x \in [n^{1/2+\delta}, n^{2/3}]$ рассматривается аналогично. Тогда

$$\Lambda(x/n) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)\frac{x}{n} + \Lambda''(0)\frac{x^2}{2n} + ... + \Lambda^{(k)}(0)\frac{x^k}{n^k k!} + O\left(\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\right).$$

Следовательно, при $x \in an + d\mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n = x) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda(0)n - \Lambda'(0)x - \Lambda''(0)\frac{x^2}{2n} - \cdots - \Lambda^{(k)}(0)\frac{x^k}{n^{k-1}k!}\right).$$

Выпишем первые три члена асимптотики, для этого найдем $\Lambda'(\theta)$ и $\Lambda''(\theta)$:

$$\Lambda'(\theta) = (\theta h_\theta - \ln R(h_\theta))' = h_\theta + \theta(h_\theta)' - m(h_\theta)(h_\theta)' = h_\theta,$$
$$\Lambda''(\theta) = (h_\theta)' = (m^{-1}(\theta))' = \frac{1}{m'(m^{-1}(\theta))} = \frac{1}{\sigma^2(h_\theta)}.$$

Тем самым, при рассматриваемых x

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n = x) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right).$$

Рассмотрим $n^{(k-1)/k} \leq x < n^{k/(k+1)-\delta}$ при некотором $\delta > 0$. Тогда при $r_n = n^{1/k-\delta}$

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = \sum_{i=0}^{r_n-1} \mathbf{P}(S_n = x + id) + \mathbf{P}(S_n \geq x + dr_n). \tag{1}$$

Рассмотрим первую сумму в правой части (1). Тогда при $y < dr_n$ справедливо соотношение

$$(x+y)^i = x^i + yx^{i-1}(1+y/x)^{i-1} = x^i + o(n^{i-1}),\ i > 2,\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + o(n),$$

поскольку

$$yx^{i-1} < n^{k(i-1)/(k+1)-\delta(i-1)} r_n < n^{i-1} n^{1/k-2/(k+1)} n^{-\delta i} = o(n^{i-1}),$$

откуда

$$\mathbf{P}(S_n = x + jd) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{j=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^j}{j!\ n^{j-1}}\right) e^{-\frac{xjd}{\sigma^2 n}}.$$

Следовательно, сумма в правой части (1) эквивалентна

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right) \frac{1}{1 - e^{-(xd)/(\sigma^2 n)}} \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right)$$

При этом в силу неравенства Маркова

$$\mathbf{P}(S_n \geq x + dr_n) \leq \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{r_n}{n}\right)n\right).$$

При этом из приведенных выше соображений

$$\Lambda\left(\frac{x}{n} + \frac{r_n d}{n}\right)n = \frac{x^2}{2\sigma^2 n} + \sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}} + \frac{x r_n d}{2\sigma^2}.$$

Поскольку $xr_n > n^\delta$,

$$\mathbf{P}(S_n \geq x + dr_n) = o(1)\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} \exp\left(-\sum_{i=3}^{k} \frac{\Lambda^{(i)}(0)x^i}{i!\ n^{i-1}}\right).$$

$\square$