

На прошлой лекции мы доказали следующую теорему Гнеденко:

Теорема 1 (Гнеденко). Пусть X_i — н.о.р. решетчатые случайные величины со сдвигом a и шагом d , $\mathbf{E}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n\sigma}} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

при $k \in an + d\mathbb{Z}$, $n \rightarrow \infty$, причем $o()$ равномерно мало по указанным k .

Предположим, что X_i — н.о.р. решетчатые со сдвигом a и шагом d ,

$$R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty, \quad h \in [h^-, h^+],$$

Это условие называют условием Крамера и оно для нас играет достаточно значимую роль. Оно означает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{hx_k} \mathbf{P}(X = x_k)$$

сходится, то есть $\mathbf{P}(X = x)$ убывает быстрее e^{h^+x} при $x \rightarrow +\infty$ и быстрее h^-x при $x \rightarrow \infty$.

Пример 1. Для $X_i \sim \text{Bern}(p)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = 1 - p + pe^h,$$

то есть конечна на всей прямой. Это логично, потому что вероятности больших отрицательных и положительных значений у распределения Бернулли нулевые, а значит убывают быстрее любой экспоненты.

Для $X_i \sim \text{Poiss}(\lambda)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{hk} = e^{\lambda(e^h - 1)}.$$

Опять же $R(h)$ конечна на всей прямой. Это вполне естественно, поскольку $k!$ растет быстрее любой экспоненты.

Для $X_i \sim \text{Geom}(p)$ функция $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p e^{hk} = \frac{p}{1 - (1-p)e^h}$$

сходится при $h < -\ln(1-p)$.

Для X с $\mathbf{P}(X = k) = C/(|k| + 1)^2$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{hk} \frac{C}{(|k| + 1)^2}$$

расходится при $h \neq 0$.

При этом функция $R(h)$ бесконечно дифференцируема внутри интервала (h^-, h^+) . Действительно,

$$R'(h) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\mathbf{E}} (e^{(h+\Delta h)X} - e^{hX}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \mathbf{E} \left(e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \right).$$

Поскольку

$$e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \rightarrow X e^{hX}$$

п.н., то если мы сможем перейти к пределу под знаком математического ожидания, то получим выражение

$$R'(h) = \mathbf{E} X e^{hX}.$$

Для перехода к пределу воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. В силу формулы Тейлора

$$|e^{\Delta h X} - 1| = |\Delta h X e^{\theta \Delta h X}| \leq |\Delta h| |X| \max(e^{\Delta h}, 1),$$

где $\theta \in [0, 1]$. Значит

$$\left| e^{hX} \frac{e^{\Delta h X} - 1}{\Delta h} \right| \leq |X| \max(e^{(h+\Delta h)X}, e^{hX}) \leq |X| e^{hX} + |X| e^{(h+\Delta h)X}.$$

Величина в правой части имеет конечное математическое ожидание, что и требуется.

Мы будем требовать

$$\mathbf{E} X^2 e^{h^+ X} < \infty, \quad \mathbf{E} X^2 e^{h^- X} < \infty.$$

Это условие слегка усиливает предыдущее.

Пример 2. Пусть

$$\mathbf{P}(X = k) = Ce^{-|k|}/(|k| + 1)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}e^{hX} = C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|k| + 1)^2} e^{hk} e^{-|k|} < \infty$$

при $h \in [-1, 1]$. При этом

$$\mathbf{E}X^2 e^{hX} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k-|k|} \frac{k^2}{(|k| + 1)^2}$$

расходится, поскольку функция под знаком суммы не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

При этом новое условие гарантирует, что $R(h)$ дважды дифференцируема на границе отрезка $[h^-, h^+]$.

При всех $h \in [h^-, h^+]$ рассмотрим н.о.р. $X_i^{(h)}$ с сопряженным распределением

$$\mathbf{P}\left(X_i^{(h)} = k\right) = R(h)^{-1} e^{hk} \mathbf{P}(X_i = k).$$

Тогда $X_i^{(h)}$ имеют конечные математическое ожидание и дисперсию

$$\mathbf{E}X^{(h)} = m(h) = (\ln R(h))', \quad \mathbf{D}X^{(h)} = \sigma^2(h) = m''(h) = (\ln R(h))'', \quad h \in [h^-, h^+].$$

Функция $m(h)$ монотонно возрастает, поскольку $m'(h) > 0$. Ее значения меняются в пределах от

$$m^- = \lim_{h \rightarrow h^-+0} m(h), \quad m^+ = \lim_{h \rightarrow h^+-0} m(h).$$

Значит при любом $\theta \in [m^-, m^+]$ (в случае, если m^- и m^+ бесконечны, то мы рассматриваем не включительно) найдется единственное h_θ , являющееся решением уравнения

$$m(h_\theta) = \theta.$$

Тогда по определению сопряженного распределения при любом $x/n \in [m^-, m^+]$

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{R(h_{x/n})^n} e^{-h_{x/n}x} \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x).$$

Если применить к правой части теорему Гнеденко, то получим

$$\mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(h_{x/n})}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

К сожалению, мы не можем этого сделать, поскольку параметр $h_{x/n}$ (а значит и распределение наших величин) зависит от n , чего в теореме Гнеденко не позволялось. Зато мы сможем так сделать, если покажем, что соотношения

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(h)}} e^{(x-m(h)n)^2/(2\sigma^2(h)n)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерны не только по $h \in [h^-, h^+]$. В таком случае

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{h \in [h^-, h^+]} \left| \mathbf{P}(S_n^{(h)} = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(h)}} e^{(x-m(h)n)^2/(2\sigma^2(h)n)} \right| \rightarrow 0,$$

в частности,

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbf{P}(S_n^{(h_{x/n})} = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(h_{x/n})}} e^{(x-m(h_{x/n})n)^2/(2\sigma^2(h_{x/n})n)} \right| \rightarrow 0,$$

что нам и требуется.

Итак, нам нужна равномерность по h . В этом нам помогает замечание с прошлой лекции

Замечание 1. Если $X_i^{(h)}$, $h \in [b, c]$, семейство решетчатых случайных величин с одинаковым a , d , причем при каждом h величины $X_1^{(h)}, \dots, X_n^{(h)}, \dots$ — н.о.р. с $\mathbf{E}X_1^{(h)} = \mu(h)$, $\mathbf{D}X_i^{(h)} = \sigma^2(h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия $0 < \inf_{h \in [b, c]} \sigma(h) \leq \sup_{h \in [b, c]} \sigma(h) < \infty$.
2. При любом $\delta > 0$ справедливо неравенство $\sup_{h \in [b, c]} \sup_{s \in [\delta, \pi]} |\psi_{X_1^{(h)}}(s)| = q < 1$,
3. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $h \in [b, c]$, $|s| < \delta$

$$\left| \ln \psi_{\frac{X_1^{(h)} - \mu(h)}{\sigma(h)}}(s) + \frac{s^2}{2} \right| < \varepsilon.$$

Тогда при любом t и $|k - an| \leq t\sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(h)}} e^{-\frac{(k-\mu(h)n)^2}{2n\sigma(h)}} + o(n^{-1/2}),$$

причем $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым k и $h \in [b, c]$.

Лемма 2. Для рассматриваемого случая сопряженных величин условия 1)-3) предыдущего замечания выполнены.

Доказательство. Заметим, что

$$\psi_{X_1^{(h)}}(t) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{hx} dF(x) = \frac{R(it + h)}{R(h)}.$$

Посмотрим более внимательно на функцию $R(z)$ как функцию комплексного переменного.

Заметим, что $R(z)$ непрерывна на $\operatorname{Re}z \in [h^-, h^+]$. Рассмотрим

$$R(z + \Delta z) - R(z) = \mathbf{E}e^{zX} (e^{\Delta z \cdot X} - 1).$$

При этом

$$|e^{\Delta z X} - 1| \leq 1 + e^{\operatorname{Re}zX} \leq 1 + e^{h^+X} + e^{h^-X},$$

откуда применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости и $R(z + \Delta z) - R(z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

1. Для доказательства 1) заметим, что функция $\sigma(h)$ непрерывна и неотрицательна при $h \in [h^-, h^+]$. Следовательно, она ограничена и остается доказать лишь то, что она ненулевая. Но если $\sigma(h)$ нулевая, то $X^{(h)}$ константа п.н. Но она принимает те же значения, что и X , а та константой не была.
2. Для доказательства 2) предположим противное. Тогда при некоторых $0 < \delta < M$ найдется набор $h_n \in [0, \tilde{h}]$, $t_n \in [\delta, \pi]$, таких что $\limsup_{n \rightarrow \infty} |R(h_n + it_n)/R(h_n)| = 1$. Выделим из h_n сходящуюся подпоследовательность, а из соответствующей подпоследовательности t_n — сходящуюся подпоследовательность, то есть $h_{n_k} \rightarrow h$, $t_{n_k} \rightarrow t$, $t \in [\delta, \pi]$, при $k \rightarrow \infty$. Но тогда $|R(h + it)/R(h)| = 1$ (здесь мы воспользовались непрерывностью $R(\cdot)$), то есть $|\psi_{X^{(h)}}(t)| = 1$. Но $X^{(h)}$ имеет ту же решетку, что и X :

$$P(X^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx} P(X \in dx).$$

Это, как мы помним, противоречит $|\psi_{X^{(h)}}(t)| = 1$. Мы пришли к противоречию, откуда б) справедливо.

3. Для доказательства 3) нам достаточно доказать, что первые три члена ряда Тейлора приближают $\psi_{X^{(h)}}(s)$ равномерно по h при $s \rightarrow 0$. То есть

$$\psi_{X^{(h)}}(s) = 1 + im(h)s - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2s^2 + o(1)s^2,$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым h при $s \rightarrow 0$. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие последовательности $h_n \in [h^-, h^+]$ и $s_n \rightarrow 0$, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \left| \psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2s_n^2 \right| > 0.$$

При этом

$$\psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2s_n^2 = \mathbf{E}e^{h_n X} \left(e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2 \right).$$

Величина

$$s_n^{-2} \left(e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2 \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ п.н. Опять же применим теорему Лебега, для чего заметим, что

$$\left| e^{is_n X} - 1 - is_n X - \frac{(is_n)^2}{2}X^2 \right| \leq |s_n X|^2$$

в силу неравенства

$$|e^{it} - 1 - it| \leq \frac{t^2}{2},$$

справедливого при всех вещественных t . Значит, величина

$$s_n^{-2} \left| \psi_{X^{(h_n)}}(s_n) - 1 - im(h_n)s_n - \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^{(h)})^2s_n^2 \right| \rightarrow 0,$$

что противоречит нашему предположению.

□