

Спецкурс "Большие отклонения"

Шкляев А.В.

13 октября 2015 г.

Принцип больших уклонений

Итак, ближайшее время мы с вами будем заниматься общей теорией больших уклонений. Начнем с того, что сформулируем такую известную лемму:

Лемма 5.1. (Александрова). Следующие условия равносильны:

- 1) $P_n \xrightarrow{d} P, n \rightarrow \infty$,
- 2) $P_n(A) \rightarrow P(A)$ при любых A : $P(\partial A) = 0$,
- 3) $\limsup P_n(F) \leq P(F)$ при всех замкнутых F ,
- 4) $\liminf P_n(G) \geq P(G)$ при всех открытых G .
- 5) $P(A_{int}) \leq \liminf P_n(A) \leq \limsup P_n(A) \leq P(\dot{A})$, где A_{int} — внутренность множества A , \dot{A} — его замыкание.

Пример 1. Давайте предположим, что мы рассматриваем меры P_n с плотностями вида

$$C_n(x)e^{-\Lambda(x)n}$$

при каком-то $C_n(x)$, т.ч. $\ln C_n(x) = o(n)$ равномерно по x . Тогда для любого множества A конечной меры

$$\frac{\ln P_n(A)}{n} = \frac{\ln \left(\int_A C_n(x) e^{-\Lambda(x)n} dx \right)}{n} = o(1) + \ln \left(\int_A e^{-\Lambda(x)n} dx \right)^{1/n}.$$

Если $\Lambda(x)$ достигает существенного инфимума c (то есть $\inf_{\mathbb{R} \setminus B} \Lambda(x) = c$ при любом множестве B нулевой меры), то множество $B_\delta = \{x : \Lambda(x) \leq c + \delta\}$ имеет положительную меру и

$$e^{-c} \lambda(A) \geq \int_{B_\delta} e^{-\Lambda(x)n} dx \geq e^{-(c+\delta)n} \lambda(B_\delta \cap A),$$

где λ — мера Лебега. Отсюда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln P_n(A)}{n} \geq -c - \delta, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln P_n(A)}{n} \leq -c.$$

В силу произвольности δ

$$\frac{\ln P_n(A)}{n} \rightarrow c, \quad n \rightarrow \infty.$$

Перейдем к общему определению. В общем случае, назовем функцию $f(x)$ полунепрерывной снизу (сверху) в точке, если

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0), \quad (\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)).$$

Соответственно, полунепрерывность на множестве есть полунепрерывность в каждой точке множества. Это условие равносильно тому, что $f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнутое множество при любом a .

Примером непрерывной сверху функции является $[x]$, непрерывной снизу $\{x\}$.

Назовем функцией роста $\Lambda(x)$ неотрицательную полунепрерывную снизу функцию.

Будем говорить, что последовательность мер P_n удовлетворяет ПБУ (принципу больших уклонений) с функцией роста Λ , если

$$-\inf_{x \in A_{int}} \Lambda(x) \leq \liminf \frac{\ln P_n(A)}{n} \leq \limsup \frac{\ln P_n(A)}{n} \leq -\inf_{x \in \dot{A}} \Lambda(x).$$

Что же это означает? Фактически, мы получаем оценки

$$\exp(-(1+\delta) \inf_{x \in \Gamma_{int}} \Lambda(x)n) \leq P_n(\Gamma) \leq \exp(-(1-\delta) \inf_{x \in \dot{\Gamma}} \Lambda(x)n)$$

при любом наперед взятом δ и достаточно больших n .

Нетрудно заметить, что справедливо следующая эквивалентная формулировка 1) Для любого замкнутого F

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(F) \leq -\inf_{x \in F} \Lambda(x).$$

2) Для любого открытого G

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(G) \geq -\inf_{x \in G} \Lambda(x).$$

Действительно, тогда ПБУ будет следовать из этих утверждения для A_{int} и \dot{A} .

С одной стороны, ПБУ похож на утверждения наподобие теоремы Крамера, доказанной нами на первой лекции. С другой стороны, здесь речь идет о вероятностях попадания в произвольные множества, да и не требуется никаких ограничений на рассматриваемые X . Давайте рассмотрим величину X и рассмотрим функцию $\Lambda(\theta) = \sup_h (h\theta - \ln R(h))$.

Давайте посмотрим на нее на некоторых примерах.

Пример 3. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда $R(h) = e^{h^2/2}$,

$$\Lambda(\theta) = \sup(h\theta - \ln R(h)).$$

Функция $h\theta - \ln R(h)$ дифференцируема на всей прямой, при этом $(h\theta - \ln R(h))' = \theta - h$. Значит, $\Lambda(\theta) = \theta^2/2$, как и в теореме Петрова, но уже на всей прямой, включая 0.

Пример 4. Пусть $X_i \sim \text{Cauchy}$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h \neq 0$, $R(h) = 1$ при $h = 0$. Значит $\Lambda(\theta) = 0$.

Пример 5. Пусть $X_i \sim \exp(\lambda)$, $f_{X_1}(x) = e^{-\lambda x} \lambda I_{x>0}$.

$$R(h) = \int_0^\infty e^{hx} e^{-\lambda x} \lambda dx,$$

т.е. $\frac{\lambda}{\lambda-h}$ при $h < \lambda$ и ∞ при $h \geq \lambda$. Тогда

$$\Lambda(\theta) = \sup_{h < \lambda} (h\theta - \ln R(h)).$$

Получаем, что т.к. $\theta - (\ln R(h))' = \theta - 1/(\lambda - h)$, то при $\theta > 0$ $\Lambda(\theta) = \theta\lambda - 1 - \ln \lambda\theta$, а при $\theta \leq 0$ $\Lambda(\theta) = \infty$.

Давайте изучим функцию Λ :

Лемма 5.2. 1) $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.

2) Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$. Если $R(\tilde{h}) < \infty$ при некотором $\tilde{h} > 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно минус бесконечное) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает. Аналогично при $R(\tilde{h}) > -\infty$ при некотором $\tilde{h} < 0$, то существует $\mu = EX$ (возможно бесконечное) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$.

3) Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = EX_1 e^{hX_1}$, $\Lambda'(\theta) = y$, где $\Lambda(\theta) = y\theta - \ln R(y)$.

Доказательство.

1) Надо доказать, что $\ln R(h_1 t_1 + h_2 t_2) \leq \ln R(h_1) t_1 + \ln R(h_2) t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.

Но

$$R(h_1 t_1 + h_2 t_2) = E(e^{h_1 X_1})^{t_1} (e^{h_2 X_1})^{t_2} \leq (E e^{h_1 X_1})^{t_1} (E e^{h_2 X_1})^{t_2}$$

в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравенства

$$\sup_h (h\theta_1 t_1 + h\theta_2 t_2 - \ln R(h\theta_1 t_1) - \ln R(h\theta_2 t_2)) \leq t_1 \sup_h h\theta_1 - \ln R(h\theta_1) + t_2 \sup_h h\theta_2 - \ln R(h\theta_2).$$

То, что Λ функция роста прямо следует из определения.

2) В силу неравенства Йенсена $\ln R(h) \leq hEX_1$, откуда вытекает существование EX и $\Lambda(\mu) = 0$. Докажем монотонность. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \leq h\mu - \ln R(h) \leq 0$, т.е. супремум достигается на положительных h , а значит Λ монотонно возрастает по θ . Аналогично при $\theta < \mu$.

3) Эта часть легко выводится путем смены производной и интеграла, поскольку в рассматриваемой области все интегралы сходятся.

Теперь давайте покажем, что теорема Крамера верна в следующей формулировке:

Теорема 5.1. (Крамера, настоящая формулировка) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = Ee^{hX}$ (это математическое ожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $P(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h (hx - \ln R(h))$.

Эта формулировка может показаться удивительной — ведь мы не накладываем на блуждание никаких условий. А как же величины с неэкспоненциальными хвостами? Ответ прост, если хвосты, скажем, степенные, то $\Lambda(x)$ окажется равной 0 (т.к. при $h \neq 0$ выражение под супремумом есть $-\infty$) и мы просто заявим, что $\ln P(S_n \in A)/n \rightarrow \infty$, т.е. эти вероятности убывают медленнее чем экспоненциально.

Если предположить, что условие Крамера все же выполняется на $(0, h^+)$ и положить m^+ также как и раньше, то окажется, что при $x \in (\mu, m^+)$ $\Lambda(x)$ осталось той же, что и раньше, как мы видим из Леммы. Поэтому ничего критического не произошло и эта версия теоремы Крамера не противоречит предыдущей.