ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА

"Дополнительные главы теории случайных процессов",

2014–2015 уч.г., лектор Б.М. Гуревич

ч. 1 (вопр. 1 – 21), ч. 2 (вопр. 22 – 36)

1. Мартингалы с дискретным и непрерывным временем: определение и примеры. Выигрыш в справедливой игре с зависящей от времени предсказуемой ставкой как мартингал. Стратегия удвоения ставки. Последовательность локальных плотностей как мартингал.

2. Субмартингалы и супермартингалы. Разложение Дуба для субмартингалов. Квадратическая характеристика мартингала, применение к суммам независимых случайных величин.

3. Неравенство Дуба и неравенство Колмогорова-Дуба для максимума субмартингала с дискретным временем

4. Неравенство Дуба для максимума субмартингала с непрерывным временем.

5. Неравенство Дуба для среднего числа пересечений полосы субмартингалом с дискретным временем.

6. Сходимость субмартингала с ограниченным первым абсолютным моментом.

7. Эквивалентные определения равномерной интегрируемости семейства случайных величин.

8. Сходимость и замыкаемость справа равномерно интегрируемого субмартингала с дискретным временем.

9. Теорема П. Леви о сходимости условных математических ожиданий относительно монотонной последовательности σ-алгебр.

10. Потоки σ-алгебр и марковские моменты: примеры (момент первого достижения измеримого множества — для дискретного времени и замкнутого множества — для непрерывного времени).

11. Операции над марковскими моментами, приводящие к марковским моментам: максимум и минимум марковских моментов, предел возрастающей последовательности марковских моментов, функции марковского момента.

12. Мартингальные свойства мартингала, остановленного в марковский момент.

13. Теорема о свободном выборе для субмартингалов с дискретным временем.

14. Применимость теоремы о свободном выборе к равномерно интегрируемому субмартингалу.

15. Первое тождество Вальда для суммы случайного числа независимых случайных величин.

16. Второе тождество Вальда для суммы случайного числа независимых случайных величин.

17. Условия равенства математических ожиданий мартингала в неслучайный и в марковский моменты.

18. Применение мартингалов к задаче о разорении игрока: вычисление вероятностей разорения каждого из игроков и средней продолжительности игры.

19. Применение мартингалов к урновой схеме Пойа. Предельное распределение соответствующего мартингала.

20. Применение мартингалов к теории страхования. Модель Крамера-Лундберга в задаче о разорении страховой компании. Условие положительности среднего дохода компании.

21. Модель Крамера-Лундберга в задаче о разорении страховой компании. Доказательство того, что $Z_t := \exp[-rX_t - tg(r)]$ — мартингал относительно потока σ-алгебр $\mathcal{A}_t := \sigma(X_s, s \le t)$, где X_t — капитал страховой компании в момент t, $g(r) := \lambda \int_0^\infty (e^{rx} - 1)F(dx) - cr$, F — функция распределения размера страховых выплат, λ — параметр пуассоновского потока моментов страховых выплат, $r > 0$.

22. Винеровский процесс W_t. Асимптотическое поведение интегральных сумм $\sum_i W_{\theta_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ для различных вариантов выбора точек $\theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ $(\theta_i = t_i,\ t_{i+1},\ (t_i + t_{i+1})/2)$.

23. Определение стохастического интеграла Ито $\int_0^\infty f_t dW_t =: \mathcal{J}(f)$ на множестве H_0 простых квадратично интегрируемых случайных функций f, согласованных с фильтрацией $\{\mathcal{A}_t\}$. Корректность определения, линейность и изометричность отображения $f \mapsto \mathcal{J}(f)$, продолжение на пространство H_0^{cl} — замыкание H_0 в $L^2_\otimes$-метрике.

24. Свойства интеграла Ито на H_0^{cl}: 1) линейность, 2) сохранение скалярного произведения, 3) равенство $M(\mathcal{J}(f)|\mathcal{A}_s) = 0$ для функций f, удовлетворяющих условию $f_t \equiv 0$ при $t < s$, 4) равенство $M(\mathcal{J}(f)\mathcal{J}(\bar{g})|\mathcal{A}_s) = M\left(\int_s^t f_u \bar{g}_u du|\mathcal{A}_s\right)$, если $s < t$ и $f_u \equiv g_u \equiv 0$ при $u < s$.

25. Признаки интегрируемости в смысле Ито (формулировка): прогрессивная измеримость и согласованность с фильтрацией, соотношение между ними. Доказательство прогрессивной измеримости всякой согласованной с фильтрацией непрерывной справа случайной функции.

26. Интегрируемость по Ито всякой прогрессивно измеримой квадратично интегрируемой случайной функции.

27. Справедливость равенства $\mathcal{J}(f) = 0$ на множестве $\{\omega \in \Omega : f_t(\omega) = 0$ при всех $t > 0\}$ для всякой согласованной с фильтрацией случайной функции $f \in H_0^{cl}$.

28. Доказательство равенства $\int_0^\infty I_{[0,\tau)}(s) f_s dW_s = \xi_\tau$, где $\xi_t = \int_0^t f_s dW_s$, f — прогрессивно измеримая функция из H_0^{cl} и τ — ограниченный марковский момент.

29. Процесс $\xi_t := \int_0^t f_s dW_s$ для $f \in H_0^{cl}$ как мартингал с п.н. непрерывными реализациями (возможность выбора подходящего варианта интеграла при каждом t).

30. Определение интеграла Ито для измеримых согласованных с фильтрацией функций $f = f_t$, удовлетворяющих условию $\int_0^t f_s^2 ds < \infty$ п.н. при всех $t \in (0, \infty)$.

31. Стохастический дифференциал. Формула Ито, условия ее применимости. Примеры: степень винеровского процесса, стохастическая экспонента, вычисление математического ожидания гирсановской экспоненты в случае, когда определяющая ее функция ограниченна.

32. Верхняя оценка математического ожидания гирсановской экспоненты в случае, когда определяющая ее функция прогрессивно измерима и квадратично интегрируема.

33. Формула Ито в многомерном случае (формулировка, достаточные условия применимости). Пример применения: вычисление среднего времени достижения винеровским процессом границы шара $|x| \le R$ в пространстве произвольной размерности.

34. Стохастические дифференциальные уравнения. Сильные и слабые решения: формулировка теоремы существования, метод последовательных приближений.

35. Стохастические дифференциальные уравнения. Формулировка и доказательство теоремы единственности.

36. Стохастическое уравнение Ланжевена. Явный вид решения, условия, при которых оно является стационарным гауссовским процессом (процессом Орнштейна–Уленбека). См. [1], гл. 8, §§ 13,14

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. Теория случайных процессов, 2003.
2. А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов, 1975, 1996.
3. Л.Б. Коралов, Я.Г. Синай. Теория вероятностей и случайные процессы, 2013 (§ 13.7).
4. Н.В. Крылов. Введение в теорию случайных процессов, Ч.2. Изд. МГУ, 1986.
5. А.Н. Ширяев. Вероятность, 1989, 2004.