Лекция 6

Теорема 1 (Хелли)**.** *Семейство $\mathcal{M}_c$ равномерно ограниченных мер ($\mu(\mathbb{R}) < c < \infty$ при всех $\mu \in \mathcal{M}_c$) ослабленно относительно компактно. То есть из любой последовательности мер μ_n можно выделить слабо (ослабленно) сходящуюся подпоследовательность.*

Пример. Рассмотрим последовательность мер μ_n, удовлетворяющую тождеству

$$\mu_n((-\infty, x]) = I_{x>n},\ x \in \mathbb{R}.$$

Для любого x верно

$$\mu_n((-\infty, x]) \to 0, n \to \infty,$$

то есть по определению μ_n ослабленно сходится к 0.

Меры μ_n не сходятся слабо к нулевой мере, так как $\mu_n(\mathbb{R})$ равны единице и не стремятся к 0, но имеет место ослабленная сходимость, так как для любого конечного отрезка $[a, b]$ последовательность $\mu_n([a, b])$ стремится к 0.

Доказательство. Пусть S — счетное всюду плотное подмножество прямой. Рассмотрим какую-то последовательность мер μ_n и функции $F_n = \mu_n((-\infty, x])$. Построим теперь подпоследовательность F_{n_k} ф.р., чьи значения в каждой из точек S сходятся к некоторому пределу (в разных точках пределы могут быть разными). Рассмотрим s_1 и выделим из последовательности F_n подпоследовательность $F_{n_{1,k}}$, значения которой в s_1 сходятся. Из этой последовательности выделим $F_{n_{2,k}}$, значения которой в s_2 сходятся и так далее. Тогда выбирая последовательность $F_{n_{k,k}}$, получим требуемую последовательность, сходящуюся в каждой точке s_i. Будем называть ее F_{n_k} для удобства обозначений.

Пусть $G_S(s_i) := \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(s_i)$. Как предел неубывающих эта функция неубывает, $\inf G_S(s) \geq 0$, $\sup G_S(s) < \infty$. Определим искомую функцию G соотношением

$$G(x) = \inf\{G_S(s), s \in S, s > x\}.$$

Лемма 1. *Функция G не убывает, непрерывна справа, $G(-\infty) \geq 0$, $G(\infty) < \infty$;*

Доказательство. То, что функция G не убывает, $G(-\infty) \geq 0$, $G(\infty) < \infty$, непосредственно следует из построения. Покажем, что G непрерывна справа методом от противного.

Предположим противное. Тогда $G(x_n) \to d + 0$, $x_n \to x + 0$, но $G(x) < d$ (иначе разрыв не может быть устроен, поскольку функция монотонно неубывающая). Но тогда в силу определения G найдется $s \in S$, $s > x$, такое что $G_S(s) < d$. Следовательно, при достаточно больших n, что$x < x_n < s$, выполнено неравенство

$$G(x) \leq G(x_n) \leq G(s) \leq G_S(s) < d.$$

Полученное неравенство противоречит тому, что $G(x_n) \to d + 0$. □

Покажем, что $F_{n_k}(x)$ сходится к $G(x)$ при любой x — точке непрерывности функции G.

Заметим, что если $s \in S$ таково, что $s > x$, то

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \le \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(s) = G_S(s).$$

При этом по определению $G(x) = \lim_{s\to x+} G_S(s)$, откуда

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \le G(x).$$

С другой стороны при любых $y < s < x$ верно соотношение

$$G(y) \le G_S(s) = \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(s) \le \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

Устремляя y к $x - 0$ и пользуясь тем, что x — точка непрерывности G, имеем

$$G(x) \le \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

В силу полученных соотношений $G(x) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x)$.

Функция $G(x)$ задает некоторую меру μ на прямой, причем

$$\mu_{n_k}((a,b]) = F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \to G(b) - G(a) = \mu((a,b]),$$

что и означает ослабленную сходимость. Теорема доказана. □

Безгранично делимые распределения

Определение 1. *Случйная величина X – безгранично делимая, если для любого натурального n существуют независимые одинаково распределённые $\{X_{n,i}\}_{i=1}^n$ такие, что по распределению*

$$X \overset{d}{=} X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}.$$

Примеры.

1. Пуассоновское распределение является безгранично делимым, так как если $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$, то
$$X \overset{d}{=} X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathrm{Poiss}(\lambda/n).$$

2. Нормальное распределение является безгранично делимым, так как если $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то
$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathcal{N}(a/n, \sigma^2/n).$$

3. Распределение Бернулли не является безгранично делимым. От противного, пусть $X = X_{2,1} + X_{2,2}$. Тогда $X_{2,1}$ почти наверное лежит в отрезке $[0, 1/2]$ и
$$\frac{1}{2} = \mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X_{2,1} = 0)^2, \quad \frac{1}{2} = \mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X_{2,1} = 1/2)^2,$$
откуда
$$\mathsf{P}(X_{2,1} = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathsf{P}(X_{2,1} = 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Но в сумме вероятности дизъюнктных событий больше 1.

4. Равномерное распределение не является безгранично делимым. От противного, пусть для любого n имеется представление
$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}.$$
Тогда $X_{n,1}$ почти наверное лежит в $[0, 1/n]$, а дисперсия этой величины равны $1/(12n)$. С другой стороны, $\mathsf{E}X_{n,1}^2$ ограничено $1/n^2$, поэтому
$$\mathsf{D}X_{n,1} = \mathsf{E}X_{n,1}^2 - \mathsf{E}^2 X_{n,1} \le \mathsf{E}X_{n,1}^2 \le \frac{1}{n^2}.$$
Для $n > 12$ получаем противоречие.

5. Гамма распределение является безгранично делимым, так как если $X \sim \mathrm{Gamma}(a, b)$, то
$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathrm{Gamma}(a/n, b).$$
Экспоненциальное распределение тоже является бесконечно делимым как частный случай гамма распределения.

Если X – безгранично делимая, то
$$F_X(x) = F_{X_{n,1}}(x) * \ldots * F_{X_{n,n}}(x),$$
и
$$\phi_X(t) = \phi_{X_{n,1}}(t) \cdots \phi_{X_{n,n}}(t) = \phi_n^n(t).$$
Поэтому введём другия определение.

Определение 2. *Характеристическая функция φ – безгранично делимая, если $\varphi = \varphi_n^n$ для какого-то натурального $n > 1$ и для какой-то характеристической функции φ_n.*

Определение 3. *Функция распределения F – безгранично делимая, если существует такое натуральное число n и функция распределения F_n такие, что*
$$F(x) = F_n(x) * \ldots * F_n(x)$$
— свёртка n функций распределений F_n.

Упражнение 1. *Если φ_X и φ_Y являются безгранично делимыми, то $\varphi_X \varphi_Y$ тоже безгранично делима.*

Преобразование Колмогорова и обобщённые пуассоновские величины

Определение 4. *Величина X с характеристческой функцией*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\},$$

где μ – конечная мера, называется обобщённой пуассоновской.

Лемма 2. *Указанная функция является характеристической функцией.*

Доказательство. Заметим, что функция $\varphi_j(t) := \exp(c_j(e^{itx_j}-1))$ является характеристической функцией случайной величины $x_j\mathrm{Poiss}(c_j)$, если $c_j > 0$. Для фиксированых n, M рассмотрим разбиение $\{a_j^{n,M}\}_{j=1}^n$ отрезка $[-M, M]$ с шагом, меньшим $4M/n$. Тогда для $c_j := \mu((a_j^{n,M}, a_{j+1}^{n,M}])$ и $x_j := a_j^{n,M}$ имеем

$$\psi_{n,M}(t) := \prod_{j=1}^n \varphi_j(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^n (e^{ita_j^{n,M}}-1)\mu((a_j^{n,M}, a_{j+1}^{n,M}])\right\}.$$

Устремим в этом равенстве n к бесконечности, получим

$$\psi_M(t) := \lim_{n\to\infty}\psi_{n,M}(t) = \exp\left\{\int_{-M}^{M}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\}.$$

Функция ψ_M непрерывна в 0, поэтому она является характеристической функцией как предел характеристических функций. Теперь устремим M к бесконечности, получим

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\} = \lim_{M\to\infty}\exp\left\{\int_{-M}^{M}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\}.$$

Функция φ_X является характеристической функцией по аналогичным соображениям. □

Лемма 3. *Указанная функция является безгранично делимой.*

Доказательство. Положим $\mu_n := \mu/n$, тогда

$$\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\} = \exp\left\{n\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu_n(dx)\right\} = \left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu_n(dx)\right\}\right)^n.$$

□

Определение 5. *Преобразованием Колмогорова* *конечной меры* μ *называется функция*

$$\varkappa(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) - \frac{t^2}{2}.$$

Упражнение 2. $\left| e^{it} - 1 - it - \ldots - \frac{(it)^n}{n!} \right| < \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 4. *Интеграл в определении* $\varkappa$ *определён, функция* $\varkappa$ *непрерывна и дважды дифференцируема.*

Доказательство. Положим

$$\widetilde{\varkappa}(t) := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx).$$

Из упражнения 2 получаем оценку

$$|\widetilde{\varkappa}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) \right| < \frac{t^2}{2} \mu([-\infty, +\infty]), \tag{1}$$

откуда следует, что интеграл существует и выражение $\varkappa(t)$ определено.

Вычислим приращение $\widetilde{\varkappa}$.

$$\widetilde{\varkappa}(t + \Delta t) - \widetilde{\varkappa}(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx}(e^{i\Delta tx} - 1) - i\Delta tx}{x^2} \mu(dx) = \\ \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx}(e^{i\Delta tx} - i\Delta tx - 1) + i\Delta tx(e^{itx} - 1)}{x^2} \mu(dx). \tag{2}$$

Из упражнения 2 получаем оценки

$$\left| \frac{e^{i\Delta tx} - i\Delta tx - 1}{x^2} \right| \le \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad \left| \frac{i\Delta tx(e^{itx} - 1)}{x^2} \right| \le t\Delta t.$$

Используя оценки получаем, что подынтегральная функция в выражении (2) ограничена. Тогда можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости при $\Delta t \to 0$ и получить

$$\widetilde{\varkappa}'(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) \mu(dx) = i \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx).$$

Так как $i(e^{itx} - 1)/x \to -t$ при $x \to 0$, то по аддитивности интеграла Лебега

$$\varkappa'(t) = i \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx) - t\mu(\{0\}) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx).$$

Аналогично доказывается, что существует вторая производная и

$$\varkappa''(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mu(dx).$$

$\square$

Лемма 5. *Функция* $\exp(\varkappa(t))$ *является безгранично делимой характеристической функцией.*

Доказательство. Представим $\varkappa(t)$ как сумму $\{\psi_j\}_{j=1}^{4}$, таких что

$$\psi_1(t) := -\frac{t^2}{2}\mu(\{0\}), \quad \psi_2(t) := \int_{0<|x|<\varepsilon} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\mu(dx),$$

$$\psi_3(t) := \int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{e^{itx}-1}{x^2}\mu(dx), \quad \psi_4(t) := it\int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{1}{x}\mu(dx).$$

Функция $\exp(\psi_1(t))$ является характеристической функцией нормального распределения, $\exp(\psi_4(t))$ является характеристической функцией констаны $C_\varepsilon := \int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{1}{x}\mu(dx)$. Рассмотрим меру

$$\nu_\varepsilon(A) := \int_{A\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{x^2}\mu(dx).$$

Тогда $\exp(\psi_3(t))$ является характеристической функцией обобщённого пуассоновского распределения с конечной мерой ν_ε. Для любого веществевнного t функция $\psi_2(t)$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$\exp(\varkappa(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \exp(\psi_1(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)),$$

и так как функция $\exp(\varkappa(t))$ непрерывна в 0, то она является характеристической функцией.

Для доказательства безграничной делимости введём функции

$$\psi_{j,n}(t) := \frac{\psi_j(t)}{n},\ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Экспоненты от функций $\psi_{1,n}(t)$, $\psi_{3,n}(t)$, $\psi_{4,n}(t)$ являются характеристическими функциями, и справедливо тождество

$$\exp(\varkappa(t)) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \exp(\psi_{1,n}(t) + \psi_{3,n}(t) + \psi_{4,n}(t))\right)^n$$

Так как предел является характеристической функцией, то характеристическая функция $\exp(\varkappa(t))$ является безгранично делимой. $\square$