

1 Задачи М.В. Козлова

Основные интересы М.В. Козлова лежат в области теории случайных блужданий, ветвящихся процессов, предельных теорем, больших уклонений. Ряд сотрудников кафедры (В.И. Афанасьев, М.Б. Лагутин, А.В. Шкляев, Д.В. Дмитрущенко) являются учениками М.В. и работают в близких тематиках.

Основные задачи, предлагаемые для студентов этого года, связаны с простым случайным блужданием, хотя среди неназванных вариантов есть задачи о ветвящихся процессах Гальтона-Ватсона.

1.1 Случайное блуждание

Простым симметричным случайным блужданием называют случайную последовательность $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где X_i независимы и с равной вероятностью $p = 1/2$ принимают значения 1 и -1.

Эта модель описывает бросания симметричной монеты: наш выигрыш, если за орла мы получаем монету, а за решку платим монету.

Можно рассматривать несимметричную монету, когда $p \neq 1/2$.

Несмотря на простоту, данная модель играет важную роль и зачастую результаты для нее могут быть перенесены на более общие задачи и модели. При этом сама модель позволяет комбинаторное исследование.

1.2 Примеры возникающих задач от простых к сложным

1. Исследовать для симметричного блуждания первое возвращение в ноль $\mathbf{P}(S_i > 0, k \leq n-1, S_n = 0)$;
2. Исследовать для несимметричного блуждания с $p < 1/2$ асимптотику $\mathbf{P}(T_m > n)$, где T_m – время достижения уровня m , где $m, n \rightarrow \infty$. Это соответствует задаче "с какой вероятностью более слабый игрок сможет достигнуть хорошего положительного результата и за какое время".
3. Исследовать $\mathbf{P}(S_n > tn)$, где $t > 0$, где $p \leq 1/2$. Какие шансы более слабого игрока получить огромный выигрыш за долгое время.
4. Исследовать блуждание с $p < 1/2$, которому запрещено опускаться ниже нуля, а в нуле оно задерживается на случайное время.
5. Представим себя два связанных случайных блуждания с разными вероятностями. Представим, что ты начнешь перемещаться по прямой, в случайные моменты переключая режим с одного блуждания на второй. Описать предельное поведение последовательности в этом случае.
6. Тот же вопрос для случайного блуждания в изменяющейся среде, если в обоих случайных блужданиях в каждой точке вероятность перехода разная.
7. Исследовать двумерное случайное блуждание, которое блуждает не только по горизонтали, но и по вертикали, причем поведение на верхних горизонталях одно, а на нижних другое.