1 Задачи А.В. Шкляева

Основные направления моих научных интересов связаны с предельными теоремами для случайных последовательностей — предельном поведение тех или иных. Большая часть моих интересов лежит в объединении двух больших областей: теории больших уклонений и теории ветвящихся процессов.

1.1 Ветвящиеся процессы

1.1.1 Процессы Гальтона-Ватсона

Классический процесс Гальтона-Ватсона устроен следующим образом: мы рассматриваем одну частицу, та дает случайное число потомков $Z_1 = X_{1,1}$ (возможно 0) и выбывает из процесса. Все ее потомки дают случайное число потомков $X_{2,1},\ldots,X_{2,X_{Z_1}}$ (независимо и с тем же распределением, что и ранее). После этого у нас получается $Z_2 = X_{2,1} + \cdots + X_{2,X_{Z_1}}$ частиц. Они дают новых потомков и так далее.

Этот процесс был введен еще в 19 веке, однако, бум изучения ветвящихся процессов пришелся на середину 20 века. С тех пор этот раздел активно развивается и приковывает к себе множество исследователей. Давайте сформулируем для примера несколько классических предельных результатов из этой области.

Будем обозначать X величину с распределением как у $X_{i,j}$ — числа потомков одной частицы.

Теорема 1. *Исключим из рассмотрения процесс в котором каждая частица всегда дает ровно одну частицу. Тогда если $EX \leq 1$, то процесс с вероятностью 1 рано или поздно выродится (то есть в нем останется 0 частиц). Если же $\mathbf{E}X > 1$, то с положительной вероятностью он никогда в своей истории не выродится.*

Теорема 2. *Пусть $EX^2 < \infty$, $\mu = EX > 1$. Тогда при почти всех ω*

$$\frac{Z_n(\omega)}{\mu^n} \to W(\omega),\ n \to \infty,$$

где W — некоторая случайная величина с $\mathbf{E}W = 1$.

Иначе говоря, если в среднем давать μ потомков, то процесс (если не выродится) будет расти экспонециально как μ^n.

Теорема 3. *Если $2B = EX^2 < 1$, $\mu = 1$, то*

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z_n}{Bn} \leq x \middle| Z_n > 0\right) \to 1 - \exp(-x), \quad \mathbf{P}(Z_n > 0) \sim \frac{1}{Bn}, \quad n \to \infty.$$

Иначе говоря, процесс с вероятностью порядка $1/(Bn)$ доживает до момента n, зато уж если доживает, то в нем порядка n частиц. Интересно также, что при этом предельное распределение числа частиц именно экспоненциальное независимо от распределения X.

Несмотря на то, что при фиксированных n распределение Z_n достаточно сложное и громоздкое, в пределе мы видим красивые и содержательные результаты

Более подробно о процессах Гальтона-Ватсона можно почитать в замечательных лекционных курсах В.А. Ватутина, выпущенных в рамках лекционных курсов НОЦ (книжка легально доступна в интернете).

1.1.2 Более общие модели

Можно ввести в процессах дополнительные свойства. Приведем несколько моделей, находящихся в области моих научных интересов

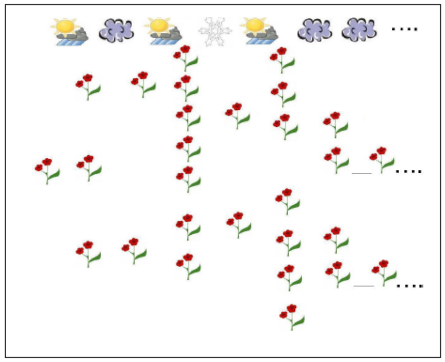
- Многотипные процессы. В этом случае есть несколько видов частиц, каждая из которых дает набор потомков разных видов. В этом случае математика процессов значительно осложняется тем, что вместо среднего числа частиц μ мы рассматриваем матрицу средних, где $\mu_{i,j}$ — среднее число потомков j-о типа у одной частицы i-о типа.

- Многополые процессы. В этом случае частицы делятся на мужские и женские. Каждый ход частицы разбиваются на пары, а затем пары производят потомков обоих полов.

- Процессы с Y-хромосомой. В этом случае мужские частицы обладают дополнительной характеристикой, которую передают мужским потомкам. Данная характеристика, например, делает мужские частицы более привлекательными, в связи с чем образуется борьба за женские частицы.

- Процессы в случайной среде. К любой из описанных форм можно добавить случайную среду – на каждом ходу разыгрывается случайная величина, определяющая закон размножения в этом поколении. Скажем, на картинке 1 изображена история размножения цветков в случайной среде, которая бывает солнечной, облачной и снежной. Эта модель крайне популярна последние 30 лет, важные продвижения были сделаны уже в 90х – 00х годах.

В указанных моделях также возникает достаточно интересная эволюция процессов.



1.2 Большие уклонения

Задача о больших уклонениях расширяет классическую картину, связанной с предельными теоремами. Так при бросании монеты вы можете следить за S_n – числом орлом при n бросаниях. Если монета имеет вероятность орла p, то классический закон больших чисел утверждает, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|S_n - np| > \varepsilon n) \to 0, n \to \infty.$$

Есть более сложный факт, уточняющий этот факт, который называется локальной теоремой Муавра-Лапласа

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(kn-np)^2}{2np(1-p)}\right), \ n \to \infty,$$

равномерно по $k - np = o(n^{2/3})$. Однако, вне указанного диапазона k данная формула неверна. Оказывается, что ее можно модифицировать, получив общий результат

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi k(n-k)}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n\right),$$

равномерно по $k/n \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Здесь $\Lambda(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$. Предыдущая теорема при этом — просто частный случай данной, использующий разложение функции Λ в окрестности точки p.

Почему этот результат имеет важное прикладное значение? Потому что вместо подсчета сложных биномальных коэффициентов, неудобно зависящих от k, мы можем оценивать вероятности такой простой функцией, гладко зависящей от k/n. С его помощью мы можем аппроксимировать вероятности $\mathbf{P}(S_n = k)$ и $\mathbf{P}(S_n \geq k)$ удобными асимптотическими формулами.

При этом дополнительное изящество результата достигается потому что монета, достигая уровня k, как будто "меняет" вероятность орла на k/n, действуя крайне похоже на монету с параметром k/n.

Бернуллиевское распределение здесь лишь простой частный случай широкой картины так называемых крамеровских распределений, в гораздо более общих случаях мы будем получать похожую картину.

Эта теория, теория больших уклонений для случайных блужданий достаточно хорошо изучена. С этой задачей тесно связаны другие, например, задача о больших и малых уклонениях ветвящихся процессов (когда и за счет чего процесс размножится слишком сильно или слишком слабо).

Впрочем, редкие события, которые мы рассматриваем, перестают быть редкими, если мы долго за ними наблюдаем.

1.2.1 Задача Эрдеша-Реньи

Представим себе, что мы бросаем симметричную монету m раз и ищем самую длинную серию из орлов. Какой она будет длины? Если назвать эту величину L_m, то оказывается, что при $m \to \infty$

$$\frac{L_n}{\ln m} \to 1$$

почти наверное. Можно рассматривать аналогичную задачу изучения статистики Эрдеша-Реньи $T_{n,m}$ — самого большого числа орлов среди n подряд идущих бросков

$$\mathbf{P}(T_{n,m} = x).$$

Тогда мы также можем описать асимптотику вероятностей при $x, n, m \to \infty$. Понятно, что если m имеет порядок $1/p_n$, где p_n – вероятность того, что за n бросков выпадет x орлов. Действительно, за порядка $1/p_n$ испытаний велики шансы, что случится хотя бы один исход вероятности p_n. В такой задаче мы работаем с большим количеством наблюдений и редкое событit в духе ”выпало n орлов за n бросков"перестает быть редким.

Более того, аналогичную задачу можно решать и для произвольных сумм независимых величин. В таком случае задача становится достаточно интересной.

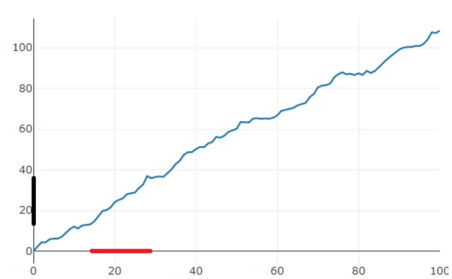
1.3 Непосредственные задачи

Задача 1 (Задача об эпидемии)**.** В самой простой версии эта задача ставится так — пусть в популяции n человек. В начале есть один больной, который затем заражает m случайных человек. Каждый из больных чихает на m случайных человек (возможно и на уже больных) и так далее. Все здоровые, на которых чихнули зараженные, заболевают, все зараженные наприобретают иммунитет. Какой численности достигнет количество зараженных до прекращения болезни (то есть в момент, когда все, на кого чихнут нынешние зараженные, либо больны, либо переболели) при $n \to \infty$?

Эта задача сталкивает нас с ветвящимися процессами, в которых размножение зависит от числа частиц в текущем поколении и от общего числа частиц. Даже в этой постановке задача довольно сложна и ответ в ней достаточно неожиданный. Однако, можно рассмотреть более содержательные и приближенные к реальности постановки, в частности, когда количество зараженных случайно и вероятность заболевания зависит от окружающей среды.

Рис. 1: На графике логарифма ветвящегося процесса мы находим окно данной ширины, на котором процесс больше всего прирос

Задача 2 (Задача Эрдеша-Реньи для ветвящихся процессов в случайной среде)**.**



Представим себе, что мы рассматриваем ветвящийся процесс в случайной среде на длинном промежутке длины m, для которого изучаем во сколько раз популяция увеличилась за меньшее число n ходов.

Если m достаточно велико по сравнению с n, то найдутся моменты, когда популяция увеличивалась особенно сильно. Какого же порядка будет этот максимальный взрыв? Ответ на этот вопрос позволяет нам представить масштабы вариации популяции в течении ее жизни. Родственная задача связана с поиском наиболее плодовитой частицы — сколько потомков даст сам плодородный производитель за n ходов.

Задача 3 (Задача о больших уклонениях для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона)**.** Как ни странно, анализ больших уклонений ветвящихся процессов без случайной среды сложнее чем при ее наличии. Случайная среда позволяет управлять процессом за счет удачных сред (так популяция комаров сильно размножится в какой-то местности скорее всего за счет удачной погоды), а вот обычный процесс должен размножаться за счет необычайно продуктивных производителей. В этой задаче для отдельных распределений ответ можно сформулировать в общем, однако, в наиболее интересном случае ответ неизвестен. Первичный анализ уже был проведен прежде, однако, более тонкая детализация поведения популяции пока отсутствует, известно лишь, что в случаях $EX \geq 1$ в первые поколения происходит взрывной рост, который затем сменяется достаточно пассивным поведением, а при $\mathbf{E}X < 1$ процесс некоторое время выжидает, а затем начинает стремительно расти.

Задача 4 (Задача об обобщенной урне Эренфестов)**.** Урной Эренфестов называют следующую простую модель: в урне в исходный момент лежит N белых и N черных шаров. Каждый раунд из урны выстаскивает шар наугад и перекрашивается в другой цвет. Мы следим за X_n — числом черных шаров в момент n.

Близкий к урнам Эренфеста процесс играет важную роль для распределения пациентов по врачам: если мы будем отправлять $N+1$ пациента к первому врачу с вероятностью i/N, а ко второму с вероятностью $(N-i)/N$, где i – текущее число клиентов у второго врача, то мы тем самым сбалансируем поток клиентов, не давая им перегрузить одного из врачей, при этом рандомизируя выбор для каждого пациента.

Предлагается рассматривать последовательность урн $X_{tN}^{(N)}$ — мы смотрим сколько в урне с N шарами каждого цвета шаров первого цвета в момент tN. Известно, что $\mathbf{P}(X_{tN}^{(N)}/\sqrt{N} \leq x)$ будет сходиться к нормальному распределению. Основная цель – получить аналогичный результат для обобщенной урны Эренфестов, в которой действуют дополнительные правила вытягивания шаров при отклонении от равновесия.