Обзор задач для студентов

проф. Афанасьев В.И.

В теории вероятностей раздел, называемый "*предельные теоремы*" является одним из важнейших. И это связано, в первую очередь, с сутью этой науки, в которой основные закономерности проявляются в виде некоторых фактов, связанных с большим числом однотипных, но независимых случайных экспериментов. Так, и *закон больших чисел*, и *центральная предельная теорема*, которые изучаются в университетском курсе теории вероятностей, описывают закономерности, касающиеся большого числа случайных экспериментов.

В этом большом разделе "*предельные теоремы*" меня, в первую очередь, интересуют задачи, связанные с асимптотическим вероятностным анализом дискретных моделей. Таковыми являются, например, *случайные блуждания*, *ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона*, *марковские цепи*, которые вам предстоит изучать в курсе теории случайных процессов. С этими моделями Вы можете познакомиться по книге В. Феллера "Введение в теорию вероятностей и ее приложения", том 1.

В последние десятилетия усиленно изучаются "неоднородные" варианты этих моделей, в которых вероятностная структура моделей формируется некоторым случайным механизмом. В качестве примера этих новых моделей назовем *ветвящиеся процессы в случайной среде* и *случайные блуждания в случайной среде.* Указанные модели находят применение в биологии и физике.

Составной частью каждой предельной теоремы является некоторая случайная модель, которая называется *предельной.* Для описанных мною дискретных моделей в качестве предельных моделей выступают, например, *броуновское движение* – один из основных процессов, изучаемых в университете, и так называемые *условные броуновские движения*, которые строятся по броуновскому движению.

Таков круг моделей, которые я изучаю сам, и которые я предложу вам для изучения. А сейчас я сформулирую несколько задач, предложенных мною ученикам в последние годы.

а) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 - 1) = 1/2$. Положим $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbf{N}$ (эта последовательность называется *простым* случайным блужданием). Пусть

$$\alpha_n = \max\{i < n : S_i = 0\}, \qquad \beta_n = \min\{i \geq n : S_i = 0\}.$$

Промежуток $[\alpha_n, \beta_n]$ называется *экскурсией*, содержащей момент n. Установить предельную теорему для *протяженности* экскурсии, т.е. для случайной величины $\beta_n - \alpha_n$.

б) Играют две волейбольные команды одного класса, т.е. шансы выиграть очко при каждом розыгрыше у команд одинаковы. Победителем объявляется та команда, которая раньше наберет n очков. Какова вероятность того, что выиграет первая команда и при этом ее преимущество в течение всей игры не будет превышать δn очков, где $\delta \in (0, 1)$ (считаем, что n – большое число)?

в) На остров прибывает частица с материка, которая порождает некоторое случайное число частиц (возможно равное 0) в соответствии с геометрическим законом распределения, а сама при этом исчезает. Тем самым она порождает первое поколение. К этому поколению присоединиятся еще одна частица с материка. Все частицы первого поколения вместе с прибывшей порождают каждая свое потомство в соответствии с тем же законом распределения, причем частицы размножаются независимо друг от друга. Тем самым они порождают второе поколение. Процесс продолжается несколько поколений, а вот к поколениям с номерами $n, n+1, \ldots$ уже никто с материка не присоединяется. Обозначим Z_i численность i-го поколения. Введем *момент вырождения* процесса:

$$T^{(n)} = \min\{i \geq n : Z_i = 0\}.$$

Установить предельную теорему для момента вырождения.