Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра математической статистики и случайных процессов

Дополнительные главы теории вероятностей, вторая часть

Москва, 2020

Оглавление

Глава 1

Сходимость основных объектов

1.1 Сходимость распределений и характеристических функций

В этом разделе мы рассмотрим слабую сходимость, её связь со сходимостью характеристических функций. При определённых условиях мы докажем теорему обращения для характеристических функций.

1.1.1 Решётчатый случай

Определение 1.1.1. Распределение случайной величины ξ называется решётчатым, если существуют числа a и $T > 0$ такие, что ξ лежит на решётке $a + T\mathbb{Z}$ почти наверное.

В дальнейшем ради простоты изложения мы будем рассматривать случай $a = 0, T = 1$. При этом распределение ξ будет задаваться набором вероятностей $p_k := \mathsf{P}(\xi = k)$, а характеристическая функция имеет более простой вид:

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mathsf{P}_{\xi}(dx) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{itk} p_k. \tag{1.1}$$

Напомним, что вероятности атомов также выражаются через обратное преобразование Фурье

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk}\varphi(t)dt. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1.1 (единственности)**.** *Между классами решётчатых распределений и характеристических функций существует взаимооднозначное соответствие.*

Доказательство. С одной стороны, по определению (1.1) набору вероятностей сопоставляется характеристическая функция. С другой стороны, в силу соотношения (1.2) характеристической функции сопоставляется набор вероятностей. □

В общем случае, слабую сходимость ξ_n к ξ мы определяли как сходимость функций распределения $F_n(x)$ к $F(x)$ для любой точки непрерывности F. В нашем частном случае это определение эквивалентно тому, что $p_k^{(n)}$ стремятся к p_k для любого k.

Теорема 1.1.2 (непрерывности)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $p_k^{(n)}$ *стремятся к* p_k *для любого* k*;*
2. $\varphi_n(t)$ *стремится к* $\varphi(t)$ *для любого вещественного* t*.*

Пусть условие 1 верно. Оценим разность характеристических функций. Зафиксируем положительный ε. Тогда

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \leqslant \left|\sum_{|k|<N} e^{itk}(p_k^{(n)}-p_k)\right| + \sum_{|k|\geqslant N} p_k^{(n)} + \sum_{|k|\geqslant N} p_k \leqslant \\ \sum_{|k|<N} |p_k^{(n)}-p_k| + \sum_{|k|\geqslant N} p_k^{(n)} + \sum_{|k|\geqslant N} p_k, \quad (1.3)$$

где $N=N(\varepsilon)$ можно выбрать таким, что третье слагаемое (1.3) будет меньше ε. Существует $M=M(\varepsilon)$ такой, что для любых $n>M$

$$\sum_{|k|<N} |p_k^{(n)}-p_k| < \varepsilon.$$

Собирая все наши оценки, имеем

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \leqslant \sum_{|k|<N} |p_k^{(n)}-p_k| + 1 - \sum_{|k|<N} p_k^{(n)} + \sum_{|k|\geqslant N} p_k \leqslant \\ 2\sum_{|k|<N} |p_k^{(n)}-p_k| + 1 - \sum_{|k|<N} p_k + \sum_{|k|\geqslant N} p_k = 2\sum_{|k|<N} |p_k^{(n)}-p_k| + 2\sum_{|k|\geqslant N} p_k \leqslant 4\varepsilon.$$

Поэтому выполнено условие 2.

Предположим, что теперь верно 2. Запишем разность вероятностей атомов

$$p_k^{(n)} - p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk}(\varphi_n(t)-\varphi(t))dt.$$

Подынтегральная функция ограничена числом 2, поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл сходится к 0 при $n\to\infty$.

Упражнение 1.1.1. *Докажите, что сходимость характеристических функций в теореме 1.1.2 непрерывности является равномерной.*

Упражнение 1.1.2. *Пользуясь теоремой 1.1.2 непрерывности докажите предельную теорему Пуассона.*

1.1.2 Общий случай

Лемма 1.1.1. *Пусть* $\{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$, P *– вероятностные меры. Если для любых* $a < b$ *таких, что* $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$*, верно*

$$\mathsf{P}_n([a,b]) \to \mathsf{P}([a,b]),\ n \to \infty,$$

то P_n *слабо сходится к* P.

Доказательство. Пусть $a < b$ – точки непрерывности $F(x) = \mathsf{P}((-\infty, x])$, что в силу непрерывности вероятностной меры эквивалентно условию $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$. В силу аддитивности вероятностной меры имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, b]) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, a)) + \mathsf{P}([a,b]), \tag{1.4}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, b]) \geqslant \mathsf{P}([a,b]). \tag{1.5}$$

Для любой c – точки непрерывности F, $c > a$, имеем

$$\mathsf{P}_n((-\infty, a)) + \mathsf{P}_n([a,c]) \leqslant 1, \quad \mathsf{P}_n((-\infty, a)) \leqslant 1 - \mathsf{P}_n([a,c]),$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, a)) \leqslant 1 - \mathsf{P}([a,c]). \tag{1.6}$$

Левая часть неравенства (1.6) не зависит от c, поэтому в правой можно перейти к пределу по $c \to +\infty$ (такую последовательность $c = c_n$ можно выбрать, так как точек разрывов монотонной F не более чем счётно), откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, a)) \leqslant 1 - \mathsf{P}([a, +\infty)) = \mathsf{P}((-\infty, a)).$$

Устремив a к $-\infty$, получим из неравенств (1.4) и (1.5)

$$\mathsf{P}((-\infty, b]) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, b]) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n((-\infty, b]) \leqslant \mathsf{P}((-\infty, b]).$$

Заключаем, что в любой точке b непрерывности функции распределения F последовательность $F_n(b)$ стремится к $F(b)$. $\square$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$, P – *вероятностные меры. Следующие условия эквивалентны:*

1. P_n *слабо сходится к* P*;*
2. *для любых* $a < b$ *таких, что* $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$, *верно*

$$\mathsf{P}_n([a,b]) \to \mathsf{P}([a,b]),\ n \to \infty.$$

Теорема 1.1.3. *Пусть последовательность вероятностных мер* P_n *слабо сходится к* P, *и* f – *непрерывная ограниченная функция. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}(dx),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $x_0 < x_N$ такие, что $\mathsf{P}(\{x_0\}) = \mathsf{P}(\{x_N\}) = 0$. Тогда разность интегралов из утверждения теоремы 1.1.3 оценивается как

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}_n(dx) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}(dx)\right| \leqslant \left|\int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}_n(dx) - \int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}(dx)\right| + \int_{\mathbb{R}\setminus(x_0,x_N]} |f(x)|\mathsf{P}_n(dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus(x_0,x_N]} |f(x)|\mathsf{P}(dx). \quad (1.7)$$

В силу ограниченности f и непрерывности вероятностной меры можно выбрать x_0 настолько малым, а x_N настолько большим, что третий интеграл в оценке (1.7) будут меньше ε. Так как имеет место слабая сходимость вероятностных мер, то существует M_1 такой, что для любых $n > M_1$ будет справедливо

$$\mathsf{P}_n(\mathbb{R} \setminus (x_0, x_N]) \leqslant \mathsf{P}(\mathbb{R} \setminus (x_0, x_N]) + \varepsilon,$$

поэтому второй интеграл в оценке (1.7) оценится как

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(x_0,x_N]} |f(x)|\mathsf{P}_n(dx) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}\setminus(x_0,x_N]} \mathsf{P}_n(dx) = \sup_{\mathbb{R}} |f| \mathsf{P}_n(\mathbb{R} \setminus (x_0, x_N]) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f| + \varepsilon.$$

Для первого интеграла воспользуемся методом трёх ε. Пусть $\mathbb{T} = \{x_0, \dots, x_N\}$ – разбиение промежутка $(x_0, x_N]$ точками непрерывности функции $F(x) := \mathsf{P}((-\infty, x])$. Положим $\Delta_i := (x_{i-1}, x_i]$. Тогда имеем

$$\left|\int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}_n(dx) - \int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}(dx)\right| \leqslant \left|\int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}_n(dx) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathsf{P}_n(\Delta_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathsf{P}_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathsf{P}(\Delta_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathsf{P}(\Delta_i) - \int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}(dx)\right|. \quad (1.8)$$

Оценим третий интеграл (аналогично оценится первый). Функция f непрерывна на числовой прямой, а значит равномерно непрерывна на $(x_0, x_N]$ и можно выделить такое разбиение $\mathbb{T}$, что колебание на каждом промежтке Δ_i будет не больше ε.

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathsf{P}(\Delta_i) - \int_{(x_0,x_N]} f(x)\mathsf{P}(dx)\right| = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Delta_i} |f(x) - f(x_i)|\mathsf{P}(dx) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N}\int_{\Delta_i} \mathsf{P}(dx) =$$
$$= \varepsilon \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i\right) \leqslant \varepsilon.$$

Для оценки второго слагаемого оценки (1.8) в силу слабой сходимости мер можно указать такой M_2, что для любого $n > M_2$ для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ будет верно

$$|\mathsf{P}_n(\Delta_i) - \mathsf{P}(\Delta_i)| \leqslant \varepsilon/N,$$

откуда для всех $n > \max\{M_1, M_2\}$, используя оценку (1.8), имеем в оценке (1.7)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}_n(dx) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}(dx)\right| \leqslant \varepsilon + \sup_{\mathbb{R}}|f|\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sup_{\mathbb{R}}|f|\varepsilon + \varepsilon = (4 + 2\sup_{\mathbb{R}}|f|)\varepsilon.$$

□

Следствие 1.1.2. *Если последовательность вероятностных мер P_n слабо сходится к P, то для любой точки t последовательность значений характеристических функций $\varphi_n(t)$ сремится к значению характеристической функции $\varphi(t)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим $f_t(x) := e^{itx}$. Это ограниченная непрерывная функция при фиксированном t. По теореме 1.1.3

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x)\mathsf{P}(dx) = \varphi(t),\ n \to \infty.$$

□

Теорема 1.1.4. *Пусть $\mathsf{P}, \{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вероятностные меры на числовой прямой. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

1. *P_n слабо сходятся к P;*

2. *для любой непрерывной ограниченной функции f имеет место сходимость*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{P}(dx),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Мы уже доказали, что из условия (1) слабой сходимости следует условие (2) сходимостей интегралов.

Докажем обратную импликацию. Начнём с доказательства того, что для любых точек $a < b$ таких, что $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$ имеет место сходимость

$$\mathsf{P}_n([a,b]) \to \mathsf{P}([a,b]),\ n \to \infty.$$

Индикатор отрезка не является непрерывной функцией, но его можно сгладить как показано на рисунке.

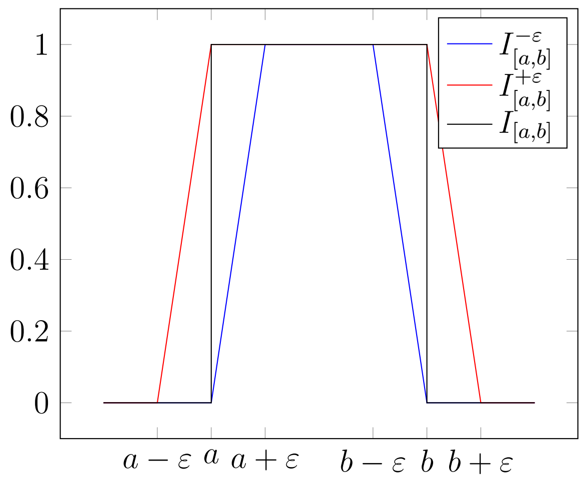

Рис. 1.1: Функции, приближающие индикатор отрезка

Для построенных функций имеем соотношение

$$I^{-\varepsilon}_{[a,b]} \leqslant I_{[a,b]} \leqslant I^{+\varepsilon}_{[a,b]}. \tag{1.9}$$

Так как $I^{-\varepsilon}_{[a,b]}$ и $I^{+\varepsilon}_{[a,b]}$ непрерывны и ограничены, то они удовлетворяют условию (2) и соответственно

$$J_n^{-\varepsilon} := \int_{-\infty}^{+\infty} I^{-\varepsilon}_{[a,b]}(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} I^{-\varepsilon}_{[a,b]}(x)\mathsf{P}(dx) =: J^{-\varepsilon},\ n \to \infty;$$

$$J_n^{+\varepsilon} := \int_{-\infty}^{+\infty} I^{+\varepsilon}_{[a,b]}(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} I^{+\varepsilon}_{[a,b]}(x)\mathsf{P}(dx) =: J^{+\varepsilon},\ n \to \infty.$$

Из соотношения (1.9) получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}_n([a,b]) \geqslant J^{-\varepsilon},\ \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n([a,b]) \leqslant J^{+\varepsilon}. \tag{1.10}$$

Так как $\mathsf{P}_n([a,b])$ не зависят от ε, то можем в оценке (1.10) устремить ε к нулю. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интегралы $J^{-\varepsilon}$ и $J^{+\varepsilon}$ стремятся к $\mathsf{P}([a,b])$, что вместе с оценкой (1.10) даёт

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n([a,b]) = \mathsf{P}([a,b]).$$

По замечанию из прошлой лекции, сходимость $\mathsf{P}_n([a,b])$ для всяких точек $a<b$ таких, что $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$ эквивалентна слабой. □

Теорема 1.1.5. *Пусть имеется абсолютно непрерывное распределение* P *с непрерывной плотностью* f*, непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестноти точки* x*. Тогда для характеристической функции* φ *такой, что* $\|\varphi\|_{L_1} < \infty$*, верно*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Расписывая характеристическую функцию по определению и используя теорему Фубини [2, с. 202-203], получаем

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-itx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}f(u)dudt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{it(u-x)}dt\right)f(u)du. \tag{1.11}$$

Подынтегральное выражение (1.11) вычисляется явно как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{it(u-x)}dt = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(N(u-x))}{u-x},$$

поэтому, сделав замену $v := u - x$, приходим к

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(N(u-x))}{u-x}f(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(Nv)}{v}f(v+x)du.$$

В курсе математического анализа [1, с. 504] доказвалось, что

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(Nv)}{v}dv.$$

Как мы видим, интеграл от $\sin(Nv)/v$ по числовой прямой конечен и не зависит от N. При N стремящимся к бесконечности интеграл по дополнению к $(-\delta,\delta)$ стремится к 0, а в окрестности нуля $(-\delta,\delta)$ функция становится неограниченно большой. Это соображение мы будем использовать для дальнейших рассуждений.

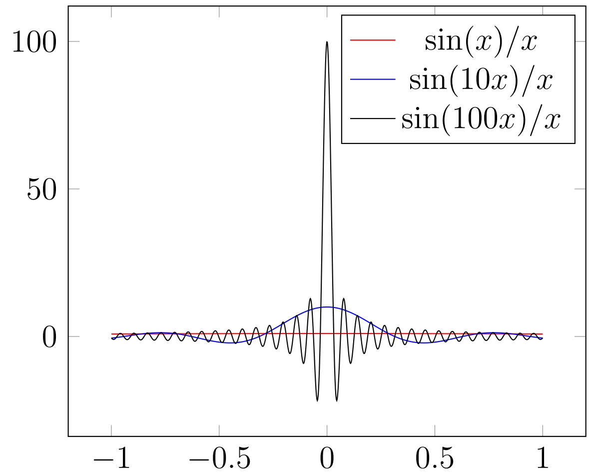

Рис. 1.2: Колебание функции $\sin(Nx)/x$ около нуля

Для положительного δ разобьём числовую прямую на три части: $A_1^\delta := (-\delta, \delta)$, $A_2^\delta := (-\infty, -1/\delta) \cup (1/\delta, \infty)$ и $A_3^\delta := [-1/\delta, -\delta] \cup [\delta, 1/\delta]$.

В силу ограниченности функции f, непрерывности вероятностной меры и ограниченности $\sin(Nv)/v$ вне окрестности нуля можно выбрать такой положительный $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, что для любого $0 < \delta < \delta_0$ будет верно

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{A_2^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v)dv \right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.12}$$

В окрестности нуля A_1^δ рассмотрим разность

$$\int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v)dv - \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x)dv = \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} (f(x+v) - f(x))dv. \tag{1.13}$$

Так как функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x, то существует такой положительный δ_1, что для любого $\delta < \delta_1$ функция f является непрерывно дифференцируемой в A_1^δ. По теореме Лагранжа существует такая точка $\xi(v)$, лежащая между x и $x+v$, что

$$f(x+v) - f(x) = f'(\xi(v))v.$$

Так как $\xi(v) \in (x-v, x+v)$, то при $v \to 0$ по теореме о зажатой сходимости $\xi(v)$ стремится к x и по непрерывности производной $f'(\xi(v))$ стремится к $f'(x)$. Поэтому существует положительный $\delta_2 < \delta_1$ такой, что для любого $|v| < \delta_1$ верно

$$|f'(\xi(v)) - f'(x)| < 1,$$

откуда для $\delta < \delta_2$ в силу ограниченности функции синуса единицей, получаем

$$\left| \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} (f(x+v) - f(x)) dv \right| \leqslant \left| \int_{A_1^\delta} \sin(Nv) f'(\xi(v)) dv \right| \leqslant 2(|f'(x)| + 1)\delta. \qquad (1.14)$$

Вычитаемое в равенстве (1.13) имеет простую асимптотику, так как сделав замену $\tau := Nv$ приходим к

$$f(x) \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} dv = f(x) \int_{A_1^{N\delta}} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau = \pi f(x) - 2f(x) \int_{N\delta}^{\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau, \qquad (1.15)$$

где вычитаемое стремится к нулю при $N\delta \to \infty$. Используя оцену (1.14) и равенство (1.15), имеем для $\delta < \delta_2$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v) dv - f(x) \right| \leqslant \left| \frac{1}{\pi} \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v) dv - \frac{f(x)}{\pi} \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} dv \right| +$$
$$+ \left| \frac{f(x)}{\pi} \int_{A_1^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} dv - f(x) \right| \leqslant 2 \frac{|f'(x)| + 1}{\pi} \delta + 2 \frac{|f(x)|}{\pi} \left| \int_{N\delta}^{\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau \right|. \qquad (1.16)$$

Остался интеграл по A_3^δ. По лемме Римана [1, с. 627-628] для любого δ имеет место сходимость

$$\int_{A_3^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v) dv \to 0, \; N \to \infty.$$

Итак, пусть теперь $\delta := \min\{\delta_0, \delta_2, \varepsilon\}/2$. Тогда существует N_0 такой, что для любого $N > N_0$ имеем

$$\left| \int_{N\delta}^{\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau \right| < \varepsilon, \; \left| \int_{A_3^\delta} \frac{\sin(Nv)}{v} f(x+v) dv \right| < \varepsilon. \qquad (1.17)$$

Собирая вместе оценки (1.12), (1.16), (1.17), получаем для $N > N_0 = N_0(\varepsilon)$

$$|f_N(x) - f(x)| \leqslant \left(1 + \frac{|f'(x)| + 1}{\pi} + 2 \frac{|f(x)|}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \varepsilon.$$

Поэтому $f_N(x)$ стремится к $f(x)$ при $N \to \infty$. А по определению несобственного интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-itx} \varphi(t) dt = \lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x).$$

□

Замечание 1.1.1. Формула обращения для плотности остаётся верной, если плотность является кусочно непрерывно-дифференцируемой непрерывной функцией.

Доказательство. В тех точках, где f непрерывно дифференцируема, утверждение верно. Пусть в x_0 плотность не дифференцируема. В силу кусочной гладкости существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в проколотой окрестности $U'(x_0)$ плотность непрерывно дифференцируема. Тогда для x из $U'(x_0)$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \tag{1.18}$$

Устремим x к x_0, тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть равенства (1.18) стремится к $1/(2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx_0} \varphi(t) dt$, а левая по непрерывности к $f(x_0)$. $\square$

1.2 Сглаживание функции распределения

В этом разделе мы опишем характеристическую функцию с компактным носителем, с помощью её построим апроксимацию произвольной функции распределения абсолютно-непрерывными, сформулируем аналог Равенства Парсеваля.

1.2.1 Характеристическая функция с компактным носителем

Упражнение 1.2.1. *X_1, X_2 – независимые одинаково распределённые $R[-1/2, 1/2]$. Тогда функция*

$$\omega(x) = (1 - |x|) I_{[-1,1]}(x)$$

является плотностью суммы $X_1 + X_2$, а характеристическая функция имеет вид

$$v(t) = \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2.$$

Доказательство. Функция ω является плотностью некоторой случайной величины ζ. По определению характеристической функции имеем

$$v_0(t) = \mathsf{E} e^{it\zeta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \omega(x) dx = \int_{-1}^{1} e^{itx} (1 - |x|) dx.$$

Мнимая часть подынтегральной функции нечётна, поэтому интеграла её по симметричному отрезку равен нулю. Действительная часть чётна, поэтому

$$v_0(t) = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(tx) dx = \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2.$$

С другой стороны, по свойству характеристической функции суммы независимых случайных величин имеем

$$v(t) = \varphi_{X_1}^2(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} I_{[-1/2,1/2]}(x) dx \right)^2 = \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2 = v_0(t).$$

Комплексно значная функция

$$v(z) := \left(\frac{\sin(z/2)}{z/2}\right)^2$$

на комплексной плоскости голоморфа везде кроме 0, где её можно доопределить по непрерывности единицей. Поэтому функция $v(z)$ является голоморфной, и как следствие вещественно-значная функция $v(x)$ бесконечно дифференцируема.

Так как v мажорируется функцией $4/t^2$, то интеграл функции $|v|$ по числовой прямой конечен, откуда в силу замечания 1.1.1 об обратимости характеристической функции для случайной величны с кусочно-гладкой плотностью функция ω существует единственное распределение, имеющее данную характеристическую функцию v, поэтому функция ω является плотностью $X_1 + X_2$. □

Замечание 1.2.1. Функция ω является характеристической функцией некоторой случайной величины η с плотностью $v/(2\pi)$.

Доказательство. Так как $1 = e^{-i0x}$, то используя обратное преобразование Фурье получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)dx = \omega(0) = 1.$$

Функция $v/(2\pi)$ является бесконечно гладкой, и её интеграл по числовой прямой равен 1. Поэтому существует случайная величина η такая, что функция $v/(2\pi)$ является плотностью этой случайной величины. Тогда имеем

$$\mathsf{E}e^{it\eta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}v(x)dx = \omega(-t) = \omega(t).$$

□

1.2.2 Приближение последовательностью с абсолютно непрерывными распределениями

Как мы знаем, распределение может не являться абсолютно непрерывным. Но для абсолютно непрерывных распределений легче формулируются и доказываются некоторые утверждения. В этом разделе мы докажем, что произвольная случайная величина приближается случайными величинами с абсолютно непрерывным распределением.

Утверждение 1.2.1. *Пусть F – функция распределения случайной величины X, функция g является кусочно-гладкой плотностью случайной величины η, не зависящей от X. Если характеристические функции случайных величин η и $Y := X + \eta$ из $L_1(\mathbb{R})$, то Y обладает плотностью h и имеет место равенство*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)dF(x). \tag{1.19}$$

Доказательство. Случайная величина Y имеет характеристическую функцию

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(y)\varphi_\eta(y).$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье для функции φ_Y

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity}\varphi_Y(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity}\varphi_X(y)\varphi_\eta(y)dy =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity}\varphi_\eta(y)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}dF(x)dy.$$

Используя теорему Фубини и теорему обращения характеристической функции, получаем

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\overline{i(t-x)y}}\varphi_\eta(y)dy\right)dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g(t-x)}dF(x).$$

Так как g вещественно-значная, то комплексное сопряжение можно снять. Проверим, что h является плотностью случайной величины Y. Для функции распределения H случайной величины Y имеем

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z-x)dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} g(y)dydF(x).$$

Произведя замену $t := x + y$, приходим к

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)dF(x)dt = \int_{-\infty}^{z} h(t)dt.$$

Поэтому функция h является плотностью, и для неё верна формула (1.19). □

Дальше нам понадобится факт того, что малые отклонения случайных величин по мере вызывают малые отклонения функции распределения.

Лемма 1.2.1 (Слуцкого). *Пусть η_T стремится к нулю по вероятности при $T \to \infty$. Тогда для любой точки x непрерывности функции $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) =: F(x)$.*

$$\mathsf{P}(\xi + \eta_T \leqslant x) \to F(x),\ T \to \infty.$$

Доказательство. Пусть x является точкой непрерывности функции F. Можно сформировать последовательность положительных $\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что для любого m точки $x - \delta_m$ и $x + \delta_m$ были бы точками непрерывности F. Тогда

$$\limsup_{T\to\infty}\mathsf{P}(\xi + \eta_T \leqslant x) = \limsup_{T\to\infty}\mathsf{P}(\xi + \eta_T \leqslant x, \eta_T > -\delta_m) \leqslant \mathsf{P}(\xi \leqslant x + \delta_m). \tag{1.20}$$

Левая часть выражения (1.20) не зависит от m, поэтому устремим m к бесконечности и по непрерывности F в точке x получим, что

$$\limsup_{T\to\infty}\mathsf{P}(\xi + \eta_T \leqslant x) \leqslant F(x).$$

Аналогично

$$\liminf_{T\to\infty} \mathsf{P}(\xi+\eta_T \leqslant x) = \liminf_{T\to\infty} \mathsf{P}(\xi+\eta_T \leqslant x, -\eta_T < \delta_m) \geqslant \mathsf{P}(\xi \geqslant x-\delta_m),$$

и при $m \to \infty$ имеем

$$\liminf_{T\to\infty} \mathsf{P}(\xi+\eta_T \leqslant x) \geqslant F(x).$$

По критерию существования предела приходим к

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{P}(\xi+\eta_T \leqslant x) = F(x).$$

□

Теперь у нас готовы все инструменты для доказательства утверждения, сформулированного в начале раздела.

Теорема 1.2.1. *Пусть F – функция распределения случайной величины X. Тогда существует последовательность случайных величин $\{X_T\}_{T=1}^{\infty}$ такая, что X_T слабо сходятся к X и распределение X_T абсолютно непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность случайных величин $X_T := X+\eta/T$, где η – случайная величина из замечания 1.2.1, обладающая плотностью

$$f_\eta(x) = \frac{v(x)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$$

и характеристической функцией с компактным носителем

$$\varphi_\eta(t) = \omega(t) = (1-|t|)I_{[-1,1]}(t).$$

Так как характеристическая функция X_T является произведением харатеристических функций X и η/T, то она имеет компактный носитель и лежит в $L_1(\mathbb{R})$. По утверждению 1.2.1 случайные величины X_T имеют абсолютно непрерывные распределения. Для произвольного положительного ε верно

$$\mathsf{P}(\eta/T > \varepsilon) = \mathsf{P}(\eta > \varepsilon T) \to 0,\ T\to\infty;$$

$$\mathsf{P}(\eta/T < -\varepsilon) = \mathsf{P}(\eta < -\varepsilon T) \to 0,\ T\to\infty,$$

поэтому η/T стремится к нулю по вероятности. По лемме Слуцкого 1.2.1 имеем

$$X_T \to X,\ T\to\infty.$$

□

Утверждение 1.2.2. *Пусть случайная величина X обладает характеристической функцией φ из $L_1(\mathbb{R})$. Тогда распределение абсолютно непрерывно и обладает существенно ограниченной плотностью f.*

Доказательство. Как было доказано в последней теореме предыдущей лекции, для функции распределения F имеет место тождество

$$F(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}\varphi(t)\omega_T(t)dtdu,$$

где

$$\omega_T(t) := (1 - |Tx|)I_{[-T,T]}(x).$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt$ меньше бесконечности, то по теореме Лебега можно переставить предел с интегралом, и тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}\varphi(t)dtdu.$$

Поэтому функция распределения абсолютно непрерывна и для почти всех x верно

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt. \tag{1.21}$$

В заключение заметим, что из представления плотности (1.21) следует

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt,$$

почти для всех x, то есть f существенно ограничена. □

1.2.3 Равенство Парсеваля

При доказательстве последней теоремы из прошлой лекции для случайных величин X с характеристической функцией φ и η с плотностью $v/(2\pi)$ и характеристической функцией ω мы получили равенство для плотности f_T случайной величины $X + \eta/T$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\omega_T(t)\varphi(t)dt = f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_T(x-y)dF(y), \tag{1.22}$$

где

$$v_T(z) := Tv(Tz) = T\left(\frac{\sin(Tz/2)}{Tz/2}\right)^2, \quad \omega_T(t) := \omega(t/T) = (1 - |Tx|)I_{[-T,T]}(x).$$

В выражении (1.22) распишем ω_T, v_T и преобразуем тождество к

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\frac{1}{T}\omega(t/T)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi v(T(x-y))dF(y). \tag{1.23}$$

Под левым интегралом в выражении (1.23) стоит плотность $\omega(x/T)/T$ случайной величины Z, а под правым интегралом стоит характеристическая функция $2\pi v(Tt)$ случайной величины Z. Это соотношение является частным случаем следующего утверждения.

Упражнение 1.2.2 (Равенство Парсеваля)**.** *Пусть дана случайная величина X, обладающая характеристической функцией φ. Пусть также дана случайная величина Y, обладающая функцией распределения G и характеристической функцией γ. Тогда имеет место тождество*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dG(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x-y)dF(y).$$

1.3 Сходимость конечных мер

В предыдущий разделах мы изучали вероятностные меры, то есть меры μ такие, что мера всего пространства равна единице. Здесь мы откажемся от данного условия и докажем ряд фактов, связанных со сходимостью таких мер.

1.3.1 Виды сходимостей, плотность мер

В данном разделе мы будем обсуждать меры μ на числовой прямой такие, что $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Такие меры мы будем называть *конечными*.

Вероятностная мера тоже является конечной с $\mathsf{P}(\mathbb{R}) = 1$. От любой конечной меры можно перейти к вероятностной следующим образом

$$\mathsf{P}(dx) := \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})}. \tag{1.24}$$

Попробуем применить теорию вероятностных мер к конечным мерам.

Положим

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mu(dx).$$

После нормировки функция $\varphi(t)/\mu(\mathbb{R})$ становится характеристической функцией для вероятностной меры, заданной соотношением (1.24). Причём по определению функции φ имеем тождество $\varphi(0) = \mu(\mathbb{R})$.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что последовательность конечных мер μ_n слабо сходится к конечной мере μ, если для любой ограниченной непрерывной функции f имеет место сходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mu(dx),\ n \to \infty.$$

Обозначение: $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Заметим, что для функции $f := 1$ последовательность $\mu_n(\mathbb{R})$ стремится слабо к $\mu(\mathbb{R})$

Упражнение 1.3.1. *Если* μ_n *стремится слабо к* μ*, то для любых* a *и* b *таких, что* $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ *имеем*

$$\mu_n([a,b]) \to \mu([a,b]),\ n \to \infty.$$

Указание: *перейти к вероятностной мере* $\mu_n(dx)/\mu_n(\mathbb{R})$.

Упражнение 1.3.2. *Пусть для любых* a *и* b *таких, что* $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, $\mu_n([a,b])$ *стремится к* $\mu([a,b])$ *и* $\mu_n(\mathbb{R})$ *стремится к* $\mu(\mathbb{R})$*. Тогда имеет место слабая сходимость мер* μ_n *к* μ. Указание: *перейти к вероятностной мере* $\mu_n(dx)/\mu_n(\mathbb{R})$.

Упражнение 1.3.3. *Пусть имеет место слабая сходимость мер* μ_n *к* μ*. Тогда для любых* a *и* b *таких, что* $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$*, и функции* f*, непрерывной на* $[a,b]$*, верно*

$$\int_a^b f(x)\mu_n(dx) \to \int_a^b f(x)\mu(dx),\ n \to \infty.$$

Определение 1.3.2. Последвательность μ_n плотна, если для любого положительного ε существуют такие числа $A < B$, что для любого натурального n имеет место неравенство

$$\mu_n(\overline{[A,B]}) < \varepsilon.$$

Упражнение 1.3.4. *Последовательность* μ_n *плотна, если для любого положительного* ε *существуют* N_ε, $A < B$ *такие, что для* $n > N_\varepsilon$

$$\mu_n(\overline{[A,B]}) < \varepsilon.$$

Указание: *воспользоваться непрерывностью конечных мер.*

Упражнение 1.3.5. *Если последовательность мер* μ_n *слабо сходится к* μ*, то последовательность* μ_n *плотна.*

Определение 1.3.3. Пусть последовательность μ_n равномерна ограничена ($\mu_n(\mathbb{R}) < C < \infty$). Тогда будем называть сходимость ослабленной, если для любых a и b таких, что $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, верно

$$\mu_n([a,b]) \to \mu([a,b]),\ n \to \infty.$$

Обозначение: $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Упражнение 1.3.6. *Если последовательность мер* μ_n *ослабленно стремится к* μ *и* μ_n *плотна, то последовательность мер* μ_n *слабо стремится к* μ. Указание: *для* $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ *имеет место сходимость* $\mu_n(\overline{[a,b]})$ *к* $\mu(\overline{[a,b]})$.

Упражнение 1.3.7. *Если последовательность мер* μ_n *ослабленно стремится к* μ*, то для* a *и* b *таких, что* $\mu(a) = \mu(b) = 0$*, для любой непрерывной функции* f *верно*

$$\int_a^b f(x)\mu_n(dx) \to \int_a^b f(x)\mu(dx),\ n \to \infty.$$

Указание: *предел произведения равен произведению пределов.*

Теорема 1.3.1. *Последовательность мер μ_n ослабленно сходится к μ тогда и только тогда, когда для любой финитной непрерывной функции g имеет место сходимость*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mu(dx),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Необходимость получается из предыдущего упражнения 1.3.7.

Достаточность получается аналогично теореме 1.1.4, сформулированной для вероятностных мер. □

1.3.2 Относительная компактность

Определение 1.3.4. Множество

$$M := \{\mu \mid \mu(\mathbb{R}) < \infty\}$$

называется относительно компактным слабо (ослабленно), если из любой последовательности $\mu_n \in M$ можно выделить сходящуюся слабо (ослабленно) подпоследовательность.

Определение 1.3.5. Будем говорить, что последовательность конечных мер μ_n слабо (ослабленно) относительно компактно, если из любой подпоследовательности $\mu_{n_k} \in M$ можно выделить сходящуюся подподпоследовательность $\mu_{n_{k_l}}$.

Теорема 1.3.2. *Если последовательность мер μ_n слабо (ослабленно) относительно компактно и все сходящиеся подпоследовательности имеют одинаковый предел μ, то*

$$\mu_n(dx) \to \mu(dx),\ n \to \infty$$

слабо (ослабленно).

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует непрерывная ограниченная функция h такая, что неверно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu(dx) =: a,\ n \to \infty.$$

Положим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu_n(dx) =: a_n.$$

Далее докажем чисто числовой факт. Рассмотрим множество частичных пределов последовательньсти $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если последовательность неограничена сверху, то можно выделить подпоследовательность, уходящую к бесконечности, и тогда из неё нельзя будет выделить сходящейся подпоследовательности. Поэтому последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Значит существуют нижний и верхние частичные пределы

$$m := \varliminf_{n\to\infty} a_n, \quad M := \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Как мы знаем, можно выделить подпоследовательности $\underline{a}_{n_k}$ и $\overline{a}_{n_k}$ исходной последовательности такие, что каждая из них имеет своим пределом нижний и верхний пределы соответственно. По слабой (ослабленной) компактности существуют подподпоследовательности $\underline{a}_{n_{k_m}}$ и $\overline{a}_{n_{k_m}}$, сходящиеся к a. Но пределы этих подпоследовательностей должны равняться m и M, откуда

$$m = a = M.$$

Из этого равенства следует существование предела последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и равенство его числу a, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu(dx) =: a,\, n \to \infty,$$

что противоречит исходному предположению. $\square$

Теорема 1.3.3 (Хелли)**.** *Семейство $\mathcal{M}_c$ равномерно ограниченных мер ($\mu(\mathbb{R}) < c < \infty$ при всех $\mu \in \mathcal{M}_c$) ослабленно относительно компактно. То есть из любой последовательности мер μ_n можно выделить слабо (ослабленно) сходящуюся подпоследовательность.*

Пример. Рассмотрим последовательность мер μ_n, удовлетворяющую тождеству

$$\mu_n((-\infty, x]) = I_{x>n},\, x \in \mathbb{R}.$$

Для любого x верно

$$\mu_n((-\infty, x]) \to 0, n \to \infty,$$

то есть по определению μ_n ослабленно сходится к 0.

Меры μ_n не сходятся слабо к нулевой мере, так как $\mu_n(\mathbb{R})$ равны единице и не стремятся к 0, но имеет место ослабленная сходимость, так как для любого конечного отрезка $[a, b]$ последовательность $\mu_n([a, b])$ стремится к 0.

Доказательство. Пусть S — счетное всюду плотное подмножество прямой. Рассмотрим какую-то последовательность мер μ_n и функции $F_n(x) = \mu_n((-\infty, x])$. Построим теперь подпоследовательность F_{n_k} ф.р., чьи значения в каждой из точек S сходятся к некоторому пределу (в разных точках пределы могут быть разными). Рассмотрим s_1 и выделим из последовательности F_n подпоследовательность $F_{n_{1,k}}$, значения которой в s_1 сходятся. Из этой последовательности выделим $F_{n_{2,k}}$, значения которой в s_2 сходятся и так далее. Тогда выбирая последовательность $F_{n_{k,k}}$, получим требуемую последовательность, сходящуюся в каждой точке s_i. Будем называть ее F_{n_k} для удобства обозначений.

Пусть $G_S(s_i) := \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(s_i)$. Как предел неубывающих эта функция неубывает, $\inf G_S(s) \geq 0$, $\sup G_S(s) < \infty$. Определим искомую функцию G соотношением

$$G(x) = \inf\{G_S(s), s \in S, s > x\}.$$

Лемма 1.3.1. *Функция G не убывает, непрерывна справа, $G(-\infty) \geq 0$, $G(\infty) < \infty$.*

Доказательство. То, что функция G не убывает, $G(-\infty) \geq 0$, $G(\infty) < \infty$, непосредственно следует из построения. Покажем, что G непрерывна справа методом от противного.

Предположим противное. Тогда $G(x_n) \to d$, $x_n \to x+0$, но $G(x) < d$ (иначе разрыв не может быть устроен, поскольку функция монотонно неубывающая). Но тогда в силу определения G найдется $s \in S$, $s > x$, такое что $G_S(s) < d$. Следовательно, при достаточно больших n, что$x < x_n < s$, выполнено неравенство

$$G(x) \leq G(x_n) \leq G(s) \leq G_S(s) < d.$$

Полученное неравенство противоречит тому, что $G(x_n) \to d$. □

Покажем, что $F_{n_k}(x)$ сходится к $G(x)$ при любой x — точке непрерывности функции G.

Заметим, что если $s \in S$ таково, что $s > x$, то

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(s) = G_S(s).$$

При этом по определению $G(x) = \lim_{s\to x+} G_S(s)$, откуда

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq G(x).$$

С другой стороны при любых $y < s < x$ верно соотношение

$$G(y) \leq G_S(s) = \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(s) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

Устремляя y к $x-0$ и пользуясь тем, что x — точка непрерывности G, имеем

$$G(x) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x).$$

В силу полученных соотношений $G(x) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x)$.

Функция $G(x)$ задает некоторую меру μ на прямой, причем

$$\mu_{n_k}((a,b]) = F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \to G(b) - G(a) = \mu((a,b]),$$

что и означает ослабленную сходимость. Теорема доказана. □

Глава 2

Безгранично делимые распределения

2.1 Определение и примеры

Определение 2.1.1. Случайная величина X – безгранично делимая, если для любого натурального n существуют независимые одинаково распределённые $\{X_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ такие, что
$$X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}.$$

Примеры.

1. Пуассоновское распределение является безгранично делимым, так как если случайная величина X распределена как $\mathrm{Poiss}(\lambda)$, то
$$X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathrm{Poiss}(\lambda/n).$$

2. Нормальное распределение является безгранично делимым, так как если случайная величина X распределена как $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то
$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathcal{N}(a/n, \sigma^2/n).$$

3. Распределение Бернулли не является безгранично делимым. От противного, пусть $X = X_{2,1} + X_{2,2}$. Тогда $X_{2,1}$ почти наверное лежит в отрезке $[0, 1/2]$ и
$$\frac{1}{2} = \mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X_{2,1} = 0)^2, \quad \frac{1}{2} = \mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X_{2,1} = 1/2)^2,$$
откуда
$$\mathsf{P}(X_{2,1} = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathsf{P}(X_{2,1} = 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Но в сумме вероятности дизъюнктных событий больше 1.

4. Равномерное распределение не является безгранично делимым. От противного, пусть для любого n имеется представление

$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}.$$

Тогда $X_{n,1}$ почти наверное лежит в $[0, 1/n]$, а дисперсия этой величины равны $1/(12n)$. С другой стороны, $\mathsf{E}X_{n,1}^2$ ограничено $1/n^2$, поэтому

$$\mathsf{D}X_{n,1} = \mathsf{E}X_{n,1}^2 - \mathsf{E}^2 X_{n,1} \leqslant \mathsf{E}X_{n,1}^2 \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Для $n > 12$ получаем противоречие.

5. Гамма распределение является безгранично делимым, так как если случайная величина X распределена как $\mathrm{Gamma}(a, b)$, то

$$X = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},\ X_{n,i} \sim \mathrm{Gamma}(a/n, b).$$

Экспоненциальное распределение тоже является бесконечно делимым как частный случай гамма распределения.

Если X – безгранично делимая, то

$$F_X(x) = F_{X_{n,1}}(x) * \ldots * F_{X_{n,n}}(x),$$

и

$$\phi_X(t) = \phi_{X_{n,1}}(t) \cdots \phi_{X_{n,n}}(t) = \phi_n^n(t).$$

Поэтому введём другия определение.

Определение 2.1.2. Характеристическая функция φ – безгранично делимая, если $\varphi = \varphi_n^n$ для какого-то натурального $n > 1$ и для какой-то характеристической функции φ_n.

Определение 2.1.3. Функция распределения F – безгранично делимая, если существует такое натуральное число n и функция распределения F_n такие, что

$$F(x) = F_n(x) * \ldots * F_n(x)$$

— свёртка n функций распределений F_n.

Упражнение 2.1.1. *Если φ_X и φ_Y являются безгранично делимыми, то $\varphi_X \varphi_Y$ тоже безгранично делима.*

2.2 Преобразование Колмогорова и обобщённые пуассоновские величины

В этом разделе мы установим соответствие между безгранично делимыми распределениями с конечными дисперсиями и преобразованием Колмогорова.

2.2.1 Безграничная делимость обобщённых пуассоновских

Определение 2.2.1. Величина X с характеристческой функцией

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\},$$

где μ – конечная мера, называется обобщённой пуассоновской.

Лемма 2.2.1. *Указанная функция является характеристической функцией.*

Доказательство. Заметим, что функция $\varphi_j(t) := \exp(c_j(e^{itx_j}-1))$ является характеристической функцией случайной величины $x_j\mathrm{Poiss}(c_j)$, если $c_j > 0$. Для фиксированых n, M рассмотрим разбиение $\{a_j^{n,M}\}_{j=1}^n$ отрезка $[-M, M]$ с шагом, меньшим $4M/n$. Тогда для $c_j := \mu((a_j^{n,M}, a_{j+1}^{n,M}])$ и $x_j := a_j^{n,M}$ имеем

$$\psi_{n,M}(t) := \prod_{j=1}^n \varphi_j(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^n (e^{ita_j^{n,M}}-1)\mu((a_j^{n,M}, a_{j+1}^{n,M}])\right\}.$$

Устремим в этом равенстве n к бесконечности, получим

$$\psi_M(t) := \lim_{n\to\infty}\psi_{n,M}(t) = \exp\left\{\int_{-M}^{M}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\}.$$

Функция ψ_M непрерывна в 0, поэтому она является характеристической функцией как предел характеристических функций. Теперь устремим M к бесконечности, получим

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\} = \lim_{M\to\infty}\exp\left\{\int_{-M}^{M}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\}.$$

Функция φ_X является характеристической функцией по аналогичным соображениям. □

Лемма 2.2.2. *Указанная функция является безгранично делимой.*

Доказательство. Положим $\mu_n := \mu/n$, тогда

$$\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu(dx)\right\} = \exp\left\{n\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu_n(dx)\right\} = \left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\mu_n(dx)\right\}\right)^n.$$

□

2.2.2 Безграничная делимость преобразования Колмогорова

Определение 2.2.2. Преобразованием Колмогорова конечной меры μ называется функция

$$\varkappa(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) - \frac{t^2}{2}.$$

Упражнение 2.2.1. $\left| e^{it} - 1 - it - \ldots - \frac{(it)^n}{n!} \right| < \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.2.3. *Интеграл в определении $\varkappa$ определён, функция $\varkappa$ непрерывна и дважды дифференцируема.*

Доказательство. Положим

$$\widetilde{\varkappa}(t) := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx).$$

Из упражнения 2.2.1 получаем оценку

$$|\widetilde{\varkappa}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) \right| < \frac{t^2}{2} \mu([-\infty, +\infty]), \tag{2.1}$$

откуда следует, что интеграл существует и выражение $\varkappa(t)$ определено.

Вычислим приращение $\widetilde{\varkappa}$.

$$\widetilde{\varkappa}(t + \Delta t) - \widetilde{\varkappa}(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx}(e^{i\Delta tx} - 1) - i\Delta tx}{x^2} \mu(dx) =$$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx}(e^{i\Delta tx} - i\Delta tx - 1) + i\Delta tx(e^{itx} - 1)}{x^2} \mu(dx). \tag{2.2}$$

Из упражнения 2.2.1 получаем оценки

$$\left| \frac{e^{i\Delta tx} - i\Delta tx - 1}{x^2} \right| \leqslant \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad \left| \frac{i\Delta tx(e^{itx} - 1)}{x^2} \right| \leqslant t\Delta t.$$

Используя оценки получаем, что подынтегральная функция в выражении (2.2) ограничена. Тогда можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости при $\Delta t \to 0$ и получить

$$\widetilde{\varkappa}'(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) \mu(dx) = i \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx).$$

Так как $i(e^{itx} - 1)/x \to -t$ при $x \to 0$, то по аддитивности интеграла Лебега

$$\varkappa'(t) = i \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx) - t\mu(\{0\}) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{x} \mu(dx).$$

Аналогично доказывается, что существует вторая производная и

$$\varkappa''(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mu(dx).$$

□

Лемма 2.2.4. *Функция* $\exp(\varkappa(t))$ *является безгранично делимой характеристической функцией.*

Доказательство. Представим $\varkappa(t)$ как сумму $\{\psi_j\}_{j=1}^4$, таких что

$$\psi_1(t) := -\frac{t^2}{2}\mu(\{0\}), \quad \psi_2(t) := \int_{0<|x|<\varepsilon} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\mu(dx),$$

$$\psi_3(t) := \int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{e^{itx}-1}{x^2}\mu(dx), \quad \psi_4(t) := it\int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{1}{x}\mu(dx).$$

Функция $\exp(\psi_1(t))$ является характеристической функцией нормального распределения, $\exp(\psi_4(t))$ является характеристической функцией констаны $C_\varepsilon := \int_{\varepsilon<|x|<\infty} \frac{1}{x}\mu(dx)$. Рассмотрим меру

$$\nu_\varepsilon(A) := \int_{A\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{x^2}\mu(dx).$$

Тогда $\exp(\psi_3(t))$ является характеристической функцией обобщённого пуассоновского распределения с конечной мерой ν_ε. Для любого веществениного t функция $\psi_2(t)$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$\exp(\varkappa(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\exp(\psi_1(t)+\psi_3(t)+\psi_4(t)),$$

и так как функция $\exp(\varkappa(t))$ непрерывна в 0, то она является характеристической функцией.

Для доказательства безграничной делимости введём функции

$$\psi_{j,n}(t) := \frac{\psi_j(t)}{n},\ j \in \{1,2,3,4\}.$$

Экспоненты от функций $\psi_{1,n}(t)$, $\psi_{3,n}(t)$, $\psi_{4,n}(t)$ являются характеристическими функциями, и справедливо тождество

$$\exp(\varkappa(t)) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\exp(\psi_{1,n}(t)+\psi_{3,n}(t)+\psi_{4,n}(t))\right)^n$$

Так как предел является характеристической функцией, то характеристическая функция $\exp(\varkappa(t))$ является безгранично делимой. □

Теорема 2.2.1. *Единственность и непрерывность преобразования Колмогорова*

1. *Если для любых t имеет место равенство $\varkappa_1(t) = \varkappa_2(t)$, то соответствующие меры равны.*

2. *Если μ_n сходятся ослабленно к μ, то $\varkappa_n$ стремятся к $\varkappa$ при всех t.*

3. *Если $\varkappa_n(t)$ стремится к $g(t)$ при всех t, где μ_n – ограничены в совокупности, то $g = \varkappa$ и μ_n сходится к μ ослабленно.*

Доказательство. Если для любых t имеет место равенство $\varkappa_1(t) = \varkappa_2(t)$, то для любых t верно

$$-\psi_1(t) = \varkappa_1''(t) = \varkappa_2''(t) = -\psi_2(t).$$

По теореме единственности для характеристической функции $\mu_1 = \mu_2$.

Пусть

$$\varkappa_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) = \varkappa(t),\ n \to \infty.$$

В силу теоремы 1.3.1 ослабленная сходимость интегралов от непрерывных ограниченных функций, стремящихся к нулю на бесконечности, влечёт сходимость интегралов, то проверим, что функция $f_t(x) = (e^{itx} - 1 - itx)/(x^2)$ именно такая. Из упражнения предыдущей лекции следует, что $|f(x)| \leqslant t^2/2$, в нуле доопределима, поэтому непрерывна. Заметим, что

$$|f_t(x)| = \left| \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right| \leqslant \frac{|e^{itx}| + 1 + |tx|}{x^2} = \frac{2 + |tx|}{x^2},$$

поэтому $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Из ослабленной сходимости следует, что $\varkappa_n(t)$ стремится к $\varkappa(t)$ для любого t.

Пусть $\varkappa_n(t)$ стремится к $g(t)$ при всех t, где μ_n – ограничены в совокупности. Рассмотрим произвольную подпоследовательность μ_{n_k}. По теореме Хелли можно выделить ослабленно сходящуюся последовательность мер $\mu_{n_{k_l}}$. тогда по предыдущему пункту последовательность $\varkappa_{n_{k_l}}(t)$ стремится к $\varkappa(t) = g(t)$ при $k \to \infty$. Поэтому из любой подпоследовательности мер μ_{n_k} можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_{k_l}}$, и предел единственнен в силу первого пункта. Поэтому и вся последовательность $\varkappa_n(t)$ сходится к $g(t)$. $\square$

2.2.3 Приближение безгранично делимого распределения обобщёнными пуассоновскими

Лемма 2.2.5. *Характеристическая функция безгранично делимого закона нигде не обращается в ноль.*

Доказательство. Пусть ψ_X – характеристическая функция безгранично делимого закона. Тогда для некоторого натурального n существует ψ_n – характеристическая функция такая, что для любого t выполнено

$$\psi_X(t) = \psi_n^n(t).$$

Заметим, что характеристическая функция случайной величины $-X$ тоже является безгранично делимой, так как

$$\psi_{-X}(t) = \psi_X(-t) = \psi_n^n(t) = \overline{\psi_X(t)} = \overline{\psi_n(t)}^n.$$

Пусть $Y \sim -X$, X и Y независимы. Тогда функция $|\psi_X(t)|^2$ является характеристической функцией для $X+Y$, так как

$$|\psi_X(t)|^2 = \psi_X(t)\overline{\psi_X(t)} = \psi_X(t)\psi_{-X}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(t).$$

Эта характеристическая функция является безгранично делимой, так как

$$|\psi_X(t)|^2 = \psi_X(t)\psi_{-X}(t) = \psi_n^n(t)\overline{\psi_n(t)}^n = |\psi_n(t)|^{2n}.$$

Тогда

$$|\psi_n(t)| = |\psi_X(t)|^{1/n} \to \begin{cases} 1, & \psi_X \neq 0; \\ 0, & \psi_X = 0; \end{cases} \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

При этом так как $\psi_X(t)$ – характеристическая функция, то $\psi(0) = 1$ и в некоторой окрестности нуля $\psi(t) \neq 0$. Поэтому в этой окрестности $|\psi_n(t)|^2 \to 1$ при $n \to \infty$.

Характеристическая функция $|\psi_n(t)|^2$ сходится к непрерывной в нуле функции, поэтому предел является характеристической функцией и предел является непрерывной функцией. Значит, предел непрерывен, поэтом он не только в малой окрестности нуля равен единице, но и всюду. Поэтому, в силу равенства (2.3) характеристическая функция $\psi_X(t)$ не обращается в ноль. □

Лемма 2.2.6. *Пусть $\gamma(t) = e^{i\theta_0(t)}$ – непрерывная функция на отрезке $[-M, M]$, $\gamma(0) = 1$. Тогда существует единственная непрерывная функция θ такая, что $e^{i\theta_0(t)} = e^{i\theta(t)}$ и $\theta(0) = 0$.*

Доказательство. Построим открыто-закмнутое подмножество $\mathcal{M}$ отрезка $[0, M]$. Точка t будет принадлежать множеству $\mathcal{M}$, если построена непрерывная функция θ из формулировки леммы на отрезке $[-t, t]$. Это множество непусто, так как в силу непрерывности γ существует окрестность $U_\delta(0)$ такая, что для любого $\tau \in U_\delta(0)$ верно $\gamma(\tau) \neq -1$, и тогда функция $\theta(t) = \ln(\gamma(t))$ ($\ln$ – главная ветвь логарифма) является искомой на $[-\delta/2, \delta/2]$.

Это множество открыто, так как если $t \in \mathcal{M}$, то по непрерывности γ существует окрестность $U_{\delta_t}(t)$ такая, что для любого $\tau \in U_{\delta_t}(t)$ верно $\gamma(\tau) \neq \gamma(t)$. Тогда для любого натурального k функция

$$\widetilde{\theta}(\tau) = \ln|\gamma(t)| + i\widetilde{\arg}(\gamma(t)),\ \widetilde{\arg} \in (\arg(\gamma(t)) + 2\pi k - \pi, \arg(\gamma(t)) + 2\pi k + \pi).$$

является искомой на $U_{\delta_t}(t)$. Тогда выберем k таким, чтобы функции θ и $\widetilde{\theta}$ совпали при $\tau = t$. Тогда они совпадут и при $\tau \in U_{\delta_t}(t)$, то есть функция θ продолжается на $U_{\delta_t}(t)$. Аналогично для $\tau = -t$.

Множество $\mathcal{M}$ является замкнутым. По определению $\mathcal{M}$ является промежутком, содержащим 0, поэтому если $\mathcal{M}$ не является замкнутым, то оно не содержит свою правую границу t. Рассмотрим функцию $\widetilde{\theta}$, определённую в доказательстве открытости. Тогда, определив k так, чтобы θ и $\widetilde{\theta}$ совпали при $\tau = t - \delta/2$, получим, что они совпали и при $\tau < t - \delta/2$, а значит, функция θ продолжается на $U_{\delta_t}(t)$. Аналогично для $\tau = -t$. Поэтому точка t принадлежит $\mathcal{M}$.

По теореме об открыто-замкнутом подмножестве получаем, что $\mathcal{M} = [-M, M]$.

Такая θ единственная, так как если существует другая функция θ_1, удовлетворяющая условию леммы, то $(\theta - \theta_1)(\tau)$ является непрерывной функцией, равной нулю при $\tau = t$ и принимающей значения в множестве $\{2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ на связном множестве. Следовательно, $(\theta - \theta_1)(\tau) \equiv 0$. □

Лемма 2.2.7. *В представлении $\psi(t) = \psi_n^n(t)$ безгранично делимого распределения $\psi_n(t)$ выбирается однозначно.*

Доказательство. В силу леммы 2.2.5 функция ψ не обращается в ноль. Следовательно, функция ψ_n тоже не обращается в ноль. В силу непрерывности характеристических функций по лемме 2.2.6 представимы как

$$\psi_n(t) = \rho_n(t)e^{i\theta_n(t)}, \quad \psi(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}.$$

Так как $e^{ni\theta_n(t)} = e^{i\theta(t)}$, то

$$\theta(t) = n\theta_n(t) + 2\pi k_n(t),\ k_n(t) \in \mathbb{Z}.$$

Функции θ_n и θ являются непрерывными, поэтому $k_n(t) = (\theta(t) - n\theta_n(t))/2\pi$ является непрерывной, принимающей целочисленные значения, равной нулю при $t = 0$. Поэтому $k_n \equiv 0$. Следовательно, $\theta_n(t) = \theta(t)/n$, $\rho_n(t) = \sqrt[n]{\rho(t)}$, то есть ψ_n определяется однозначно. □

Теорема 2.2.2 (Де Финетти). *Пусть $\psi_X(t)$ – характеристическая функция безгранично делимого закона. Тогда существует последовательность обобщённых пуассоновских характеристических функций $\widehat{\psi}_n(t) = \exp\{\lambda_n(\widetilde{\psi}_n(t) - 1)\}$ таких, что для любого t последовательность $\widehat{\psi}_n(t)$ стремится к $\psi(t)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 2.2.7 имеет место представление

$$\psi_X(t) = \psi_n(t)^n = \left(\sqrt[n]{\rho(t)}\exp\left\{\frac{i\theta(t)}{n}\right\}\right)^n.$$

Тогда, раскладывая в ряд тейлора, получаем

$$\psi_n(t) = \exp\left\{\frac{\ln(\rho(t))}{n} + \frac{i\theta(t)}{n}\right\} = 1 + \frac{\ln(\rho(t)) + i\theta(t)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\exp\{n(\psi_n(t) - 1)\} = \psi_n^n(t)(1 + o(1)),\ n \to \infty.$$

Из последнего разложения получаем $\psi_X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{n(\psi_n(t) - 1)\}$. □

Теорема 2.2.3. *Пусть случайная величина X имеет нулевое математическое ожидание и конечную дисперсию, X – безгранично делима. Тогда $\psi_X(t) = \exp(\varkappa(t))$, где $\varkappa(t)$ – преобразование Колмогорова.*

Доказательство. Функции ψ_n из определения безграничной делимости ψ_X сопоставим функцию распределения F_n. У соответствующих X_n тоже нулевое среднее и конечная дисперсия. Поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} itx dF_n(x) = 0$, и

$$\psi_n(t) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \underbrace{x^2 dF_n(x)}_{=:\mu_n(dx)}.$$

В силу теоремы 2.2.2 характеристическая функция ψ является пределом $\exp(n(\psi_n(t) - 1))$. Положим $\varkappa_n(t) := n(\psi_n(t) - 1)$. Тогда

$$\varkappa_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} n\mu_n(dx), \quad \varkappa_n(t) \to \ln(\rho(t)) + i\theta(t),\ n \to \infty.$$

По теореме 2.2.1 непрерывности предел является преобразованием Колмогорова $\varkappa(t)$. Тогда

$$\exp\{\varkappa(t)\} = \exp\{\ln(\rho(t)) + i\theta(t)\} = \psi_X(t).$$

□

2.3 Схема серий с ограниченными дисперсиями

В этом разделе мы установим безграничную делимость предела в схеме серий с ограниченными дисперсиями, опишем методы нахождения распределения предела с помощью сходимости мер.

2.3.1 Определение и примеры

Определение 2.3.1. Пусть

$$\begin{gathered} X_{1,1} \\ X_{2,1},\ X_{2,2} \\ X_{3,1},\ X_{3,2},\ X_{3,3} \\ X_{4,1},\ X_{4,2},\ X_{4,3},\ X_{4,4} \\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots \end{gathered}$$

последовательность случайных величин, где в каждой строчке $X_{n,i}$ – независимы. Такая последовательность случайных величин называется схемой серий.

Положим $S_n := X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$. Нас будет интересовать вопрос того, сходится ли S_n по распределению, и к чему он может сходиться.

Примеры.

1. Пусть $X_{n,i} \sim \mathrm{Bern}(p_{n,i})$, $\sum_{i=1}^{n} p_{n,i} \to \lambda$, $\max_{i \leqslant n} p_{n,i} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме Пуассона S_n сходятся по распределению к $Z \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

2. Пусть X_i – независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым средним и дисперсией, равной σ^2. Тогда по ЦПТ для $X_{n,i} := X_i/\sqrt{n}$ получаем, что $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ сходится по распределению к $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

3. Пусть $X_{n,1} \sim F$, $X_{n,i} = 0, i \geqslant 2$. Тогда S_n сходится по распределению к $Z \sim F$.

Дабы сузить класс распределений, которые можно получить в пределе, наложим на модель некоторые условия.

Определение 2.3.2. Будем говорить, что модель схемы серий удовлетворяет условию равномерной безграничной малости(РБМ), если для любого положительного ε имеет место сходимость

$$\max_{i \leqslant n} \mathsf{P}(|X_{n,i}| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

Мы будем рассматривать нулевую серию с ограниченными дисперсиями, то есть

$$\mathsf{E}X_{n,i} = 0, \quad \mathsf{D}X_{n,i} =: \sigma^2_{n,i}, \quad \mathsf{D}S_n =: \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} < C < \infty, \quad \max_{i \leqslant n} \sigma^2_{n,i} \to 0,\ n \to \infty.$$

Такая модель удовлетворяет свойству РБМ, так как по неравенству Чебышёва

$$\mathsf{P}(|X_{n,i}| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2_{n,i}}{\varepsilon^2} \to 0,\ n \to \infty.$$

2.3.2 Безграничная делимость предела

Положим $\psi_{n,j}(t) := \mathsf{E}e^{itX_{n,j}}$.

Лемма 2.3.1. *При выполнении РБМ для любого t имеет место сходимость $\psi_{n,j}(t)$ к 1 при $n \to \infty$, равномерная по j.*

Доказательство. Произведём следующую оценку:

$$|\psi_{n,j}(t) - 1| = \left| \int_{|x| \leqslant \varepsilon} (e^{itx} - 1)\mathsf{P}(X_{n,j} \in dx) + \int_{|x| > \varepsilon} (e^{itx} - 1)\mathsf{P}(X_{n,j} \in dx) \right| \leqslant$$
$$\max_{|x| \leqslant \varepsilon} |e^{itx} - 1| + 2\mathsf{P}(|X_{n,j}| > \varepsilon).$$

В силу РБМ $\mathsf{P}(|X_{n,j}| > \varepsilon) = o(1)$ при $n \to \infty$, равномерно по j, откуда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} |\psi_{n,j}(t) - 1| \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{|x| \leqslant \varepsilon} |e^{itx} - 1| = 0.$$

□

Лемма 2.3.2 (Сравнения)**.** *В нулевой схеме серий с ограниченными дисперсиями имеет место сходимость*

$$\frac{\psi_n(t)}{\exp\left\{\sum_{j=1}^n (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}} \to 1,\ n \to \infty.$$

Доказательство. По упражнению из позапрошлой лекции $|e^{itx} - 1 - itx| \leqslant t^2x^2/2$, откуда

$$|\psi_{n,j}(t) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{X_{n,j}}(t) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2x^2 dF_{X_{n,j}}(x) = \frac{t^2\sigma_{n,j}^2}{2}. \tag{2.4}$$

Разложим $\ln \psi_{n,j}(t)$ ряд Тейлора.

$$\ln \psi_{n,j}(t) = \ln(\psi_{n,j}(t) - 1 + 1) = \psi_{n,j}(t) - 1 + \underbrace{o(|\psi_{n,j}(t) - 1|)}_{=:r_{n,j}(t)},\ n \to \infty.$$

Заметим, что в силу оценки (2.4) для любоого положительного ε существует такой N, что для $n > N$ верно

$$|r_{n,j}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon t^2 \sigma_{n,j}^2}{2}.$$

По неравенству треугольника получаем

$$\left| \sum_{j=1}^n \ln \psi_{n,j}(t) - \sum_{j=1}^n (\psi_{n,j}(t) - 1) \right| \leqslant \frac{\varepsilon t^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{n,j}^2}{2} \leqslant \frac{\varepsilon t^2 C^2}{2}. \tag{2.5}$$

В силу независимости $X_{n,j}$ для фиксированного n справедливо представление

$$\psi_n(t) = \psi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{n,j}(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \ln \psi_{n,j}(t)\right\} = \\ \frac{\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \ln \psi_{n,j}(t)\right\}}{\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}.$$

Разность экспонент можно оценить через разность аргументов и оценку для производной, используя теореме Лагранжа, оценку (2.5) и монотонность экспоненты.

$$\left|\frac{\psi_n(t)}{\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}} - 1\right| \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\} = \\ \left|\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \ln \psi_{n,j}(t)\right\} - \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}\right| \leqslant \\ \frac{\varepsilon t^2 C^2}{2} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1) + \frac{\varepsilon t^2 C^2}{2}\right\}.$$

Сокращая на $\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}$, приходим к

$$\left|\frac{\psi_n(t)}{\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon t^2 C^2}{2} \exp\left\{\frac{\varepsilon t^2 C^2}{2}\right\}. \tag{2.6}$$

Так как оценка (2.6) справедлива для любого положительного ε начиная с какого-то N, то по определении получаем искомую сходимость. □

В силу леммы 2.3.2 сравнения исследование сходимости характеристических функций в схеме серий равносильно исследованию сходимости сумм независимых обобщённых пуассоновских величин с характеристической функцией

$$\widehat{\psi}_{n,j}(t) = \exp\{\psi_{n,j}(t) - 1\}.$$

Лемма 2.3.3. *Если характеристическая функция случайной величины X дважды дифференцируема в нуле, то существует $\mathsf{E}X^2 = -\psi''_X(0)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{\Delta_h\psi_X(t)}{(2h)^2} := \frac{\psi_X(t+2h)+\psi_X(t-2h)-2\psi_X(t)}{(2h)^2} =$$
$$\frac{\psi_X(t)+2h\psi'_X(t)+2h^2\psi''_X(t)+\psi_X(t)-2h\psi'_X(t)+2h^2\psi''_X(t)-2\psi_X(t)+O(h^2)}{(2h)^2} \to \psi''_X(t),$$
$$h\to 0.$$

С другой стороны

$$\psi''_X(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h\psi_X(t)}{4h^2} = \lim_{h\to 0}\int_{\text{-}\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_h e^{itx}}{4h^2}dF(x),$$

где $\Delta_h e^{itx} = e^{itx}(e^{2hix}+e^{-2hix}-2) = -4\sin^2(hx)e^{itx}$. Мы можем домножить числитель и знаменатель на x^2 и попробовать перейти к пределу под знаком интегралом, однако мы не сможем перейти теорему Лебега. Поэтому ограничим область интегрирования отрезком $[-M, M]$.

$$-\psi''_X(0) = \lim_{h\to 0}\int_{\text{-}\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(hx)}{h^2}dF(x) \geqslant \lim_{h\to 0}\int_{-M}^{M}x^2\frac{\sin^2(hx)}{x^2h^2}dF(x) =$$
$$\int_{-M}^{M}x^2\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(hx)}{x^2h^2}dF(x) = \int_{-M}^{M}x^2dF(x) = EI_{X\in[-M,M]}X^2.$$

Итак, $EI_{X\in[-M,M]}X^2$ ограничено $-\psi''_X(0)$. Тогда устремляя $M\to\infty$, получаем, что EX^2 существует и мажорируется $-\psi''_X(0)$. Равенство следует из существования второго момента. □

Покажем, что величины $\widehat{X}_{n,j}$ с характеристическими функциями $\widehat{\psi}_{n,j}(t) = \exp\{\psi_{n,j}(t)-1\}$ попадают под схему серий с ограниченными дисперсиями. По лемме 2.3.3

$$\mathsf{E}\widehat{X}^2_{n,j} = -\exp\{\psi_{n,j}-1\}''(0) = -\exp\{\psi_{n,j}(0)-1\}(\underbrace{\psi'_{n,j}(0)}_{=\mathsf{E}X_{n,j}=0})^2 - \exp\{\psi_{n,j}(0)-1\}\psi''_{n,j}(0) =$$
$$-\psi''_{n,j}(0) = \sigma^2_{n,j}.$$

Лемма 2.3.4. *Если $\psi_n(t)\to\psi(t)$ при $n\to\infty$, то эта сходимость равномерна по любому отрезку $[-M, M]$.*

Доказательство. Воспользуемся методом трёх эпсилон

$$\left|\int_{\text{-}\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_n(x) - \int_{\text{-}\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)\right| \leqslant \left|\int_A^B e^{itx}dF_n(x) - \int_A^B e^{itx}dF(x)\right| +$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}\setminus[A,B]}e^{itx}dF_n(x)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}\setminus[A,B]}e^{itx}dF(x)\right|, \quad (2.7)$$

где числа A и B мы выберем позднее. Из доказательства теоремы 1.1.3, для любого положительного ε можно выбрать достаточно большие $N_1, -A, B$, чтобы для любого $n > N_1$ было выполнено $\mathsf{P}_n(\mathbb{R} \setminus [A, B]) < \varepsilon + \mathsf{P}(\mathbb{R} \setminus [A, B]) < 2\varepsilon$. Поэтому сумма второго и третьего слагаемых в правой части неравенства (2.7) меньше 3ε.

Первое слагаемое в правой части неравенства (2.7) оценим следующим образом. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^m$ – разбиение отрезка $[A, B]$. Положим $x_{m+1} := M$. Тогда

$$\left|\int_A^B e^{itx} dF_n(x) - \int_A^B e^{itx} dF(x)\right| \leqslant \left|\int_A^B e^{itx} dF_n(x) - \sum_{k=1}^m e^{itx_k}(F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k))\right| + \left|\sum_{k=1}^m e^{itx_k}(F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)) - \sum_{k=1}^m e^{itx_k}(F(x_{k+1}) - F(x_k))\right| + \left|\sum_{k=1}^m e^{itx_k}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) - \int_A^B e^{itx} dF(x)\right|. \quad (2.8)$$

Оценим первое и третье слагаемые правой стороны оценки (2.8). Пусть $G \in \{F\} \cup \{F_n\}_{n=1}^\infty$. Тогда

$$\left|\int_A^B e^{itx} dG(x) - \sum_{k=1}^m e^{itx_k}(G(x_{k+1}) - G(x_k))\right| = \left|\sum_{k=1}^m \int_{x_k}^{x_{k+1}} (e^{itx} - e^{itx_k}) dG(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^m \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |e^{itx} - e^{itx_k}| \int_{x_k}^{x_{k+1}} dG(x) \leqslant \max_k \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |1 - e^{it(x_k - x)}|.$$

Последнее выражение можно оценить сверху ε при достаточно малом масштабе разбиения равномерно по t из любого конечного отрезка $[-M, M]$. Причём оценка не зависит от G, а значит, применима для первого и третьего слагаемых правой стороны оценки (2.8).

Второе слагаемое правой стороны оценки (2.8) можно сделать малым, выбрав достаточное большое N_2, чтобы приблизить конечное количество чисел $F(x_k)$ подследовательностями $F_n(x_k)$.

В итоге

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)\right| \leqslant 6\varepsilon.$$

□

Лемма 2.3.5. *Пусть β_n – непрерывна, $\beta_n(0) = 0$, $\exp\{\beta_n(t)\} \to 1$ при $n \to \infty$ для t из любого отрезка. Тогда $\beta_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по t из любого отрезка.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[A, B]$. Существуют непрерывные функции ρ_n и θ_n такие, что

$$\exp\{\beta_n(t)\} = \rho_n(t)e^{i\theta_n(t)},\ \theta_n(0) = 0.$$

По условию $\rho_n(t)$ сходится равномерно по t на $[A, B]$ к 1 при $n \to \infty$, поэтому $e^{i\theta_n(t)}$ сходится равномерно по t на $[A, B]$ к 1 при $n \to \infty$. Тогда для достаточно больших n верно $|\theta_n(t)| \leqslant \pi/2$, поэтому из того, что $e^{i\theta_n(t)}$ сходится к 1, следует, что $i\theta_n(t)$ сходится к 0 равномерно по t из $[A, B]$. Так как $\rho_n(t)$ сходится к 1, то $\ln(\rho_n(t))$ сходится к 0 при $n \to \infty$ равномерно по t из $[A, B]$.

В итоге, так как β_n – непрерывна, то в силу единственности непрерывного аргумента $\beta_n(t) = \ln(\rho_n(t)) + i\theta_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по t из $[A, B]$. □

Теорема 2.3.1. *В схеме серий $\psi_n(t)$ стремится к $\psi(t)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)$ сходится к непрерывной в нуле функции.*

Доказательство. Пусть $\psi_n(t)$ стремится к $\psi(t)$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме 2.3.4 эта сходимость равномерна на компактах. По лемме 2.3.2 сравнения сходимость $\psi_n(t)$ эквивалентна сходимости $\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)\right\}$, причём эквивалентность тоже равномерна на компактах. Тогда, раскладывая аргумент экспоненты на действительную часть u_n и мнимую часть v_n, имеем

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)\right\} = \exp\{u_n(t) + iv_n(t)\} \to \psi(t) = r(t)e^{i\theta(t)},\ n \to \infty.$$

Следовательно, $u_n(t) \to \ln r(t)$ при $n \to \infty$. Так как $\exp\{i(v_n(t) - \theta(t))\} \to 1$ равномерно на компактах, то по лемме 2.3.5 $i(v_n(t) - \theta(t)) \to 0$ при $n \to \infty$. Получаем в итоге, что имеет место равномерная на компактах сходимость

$$\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1) \to \ln r(t) + i\theta(t),\ n \to \infty.$$

Пусть $\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)$ сходится к некоторой непрерывной в нуле функции $u(t)$. Тогда

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)\right\} \to \exp\{u(t)\},\ n \to \infty.$$

В силу теоремы сравнения для любых t имеет место сходимость $\psi_n(t) \to \exp\{u(t)\}$ при $n \to \infty$. Так как $\exp\{u(t)\}$ – непрерывна в нуле и является пределом характеристических функций, то она сама является характеристической функцией $\psi(t)$. □

Замечание 2.3.1. Для нахождения предельного распределения в схеме серий достаточно рассмотреть последовательность мер

$$\nu_n(A) = \sum_{j=1}^{n} \int_A x^2 \mu_{n,j}(dx).$$

и найти их предел μ. Тогда экспонента преобразования Колмогорова меры μ будет характеристической функцией предельного распределения.

Доказательство. Определение ν_n корректно, так как $\nu_n(\mathbb{R}) = \sigma_n^2$. Эти меры возникают в результате следующих преобразований.

$$\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1) = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mu_{n,j}(dx) - 1 - it\underbrace{\mathsf{E}X_{n,j}}_{=0}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx} - 1 - itx)\mu_{n,j}(dx)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} x^2 \sum_{j=1}^{n}\mu_{n,j}(dx) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}\nu_n(dx).$$

Функция $\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)$ является преобразованием Колмогорова меры ν_n. Так как для любого t последовательность $\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)$ сходится к некоторой $\varkappa(t)$, меры ν_n ограничены в совокупности (дисперсии σ_n^2 ограничены в совокупности в схеме серий), то в силу теоремы единственноти $\varkappa(t)$ является преобразованием Колмогорова некоторой меры μ, причём ν_n сходятся ослабленно к μ. Преобразование Колмогорова $\varkappa$ меры μ является непрерывным, по теореме непрерывности $\sum_{j=1}^{n}(\psi_{n,j}(t) - 1)$ стремятся к $\varkappa(t)$ при всех t. В силу леммы 2.3.2 сравнения это эквивалентно тому, что для всех t верно $\psi_n(t) \to \exp\{\varkappa(t)\}$ при $n \to \infty$. В силу теоремы единственности для характеристических функций по $\exp\{\varkappa(t)\}$ восстанавливается единственным образом распределение Y. Следовательно, последовательность $X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ сходится к Y по распределению при $n \to \infty$. □

Пример. Пусть $Y_{n,j} \sim \mathrm{Bern}(p_{n,j})$ – независимые, $\sum_{j=1}^{n} p_{n,j} \to \lambda$, $\max p_{n,j} \to 0$ при $n \to \infty$. Из теоремы Пуассона мы знаем, что $S_n := \sum_{j=1}^{n} Y_{n,j}$ сходится по распределению к $Z \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$. Получим этот факт из нашей теории.

Положим $\widetilde{X}_{n,j} := X_{n,j} - p_{n,j}$. Тогда

$$\nu_n([a,b]) = \sum_{j=1}^{n}\int_a^b x^2\mu_{n,j}(dx) = \sum_{j=1}^{n} p_{n,j}^2(1 - p_{n,j}) I_{-p_{n,j}\in[a,b]} + \sum_{j=1}^{n}(1 - p_{n,j})^2 p_{n,j} I_{1-p_{n,j}\in[a,b]}.$$

Заметим, что
$$\sum_{j=1}^n p_{n,j}^2 \leqslant \max_{j\leqslant n} p_{n,j} \sum_{j=1}^n p_{n,j} \to 0,\ n\to\infty. \tag{2.9}$$

Пусть $1 \in (a,b)$. В силу того, что $\max p_{n,j} \to 0$ при $n\to\infty$, для больших n верно $I_{1-p_{n,j}\in[a,b]}$. Тогда
$$|\nu_n([a,b]) - \lambda| \leqslant \left|\sum_{j=1}^n (1-p_{n,j})^2 p_{n,j} - \lambda\right| + \sum_{j=1}^n p_{n,j}^2(1-p_{n,j}). \tag{2.10}$$

В силу сходимости (2.9) второе слагаемое оценки (2.10) стремится к нулю. Оценим первое слагаемое как
$$\left|\sum_{j=1}^n (1-p_{n,j})^2 p_{n,j} - \lambda\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^n p_{n,j} - \lambda\right| + \sum_{j=1}^n p_{n,j}^2(2+p_{n,j}). \tag{2.11}$$

Аналогично, в силу сходимости (2.9) второе слагаемое оценки (2.10) стремится к нулю. По условию $\sum_{j=1}^n p_{n,j} \to \lambda$ при $n\to\infty$, поэтому первое слагаемое оценки (2.11) тоже стремится к нулю. Следовательно, $\nu_n([a,b]) \to \lambda$ при $n\to\infty$. Если $1\notin[a,b]$, то для больших n верно $I_{1-p_{n,j}\in[a,b]} = 0$, поэтому из предыдущих рассуждений следует, что $\nu_n([a,b]) \to 0$ при $n\to\infty$.

Заключаем, что $\nu_n([a,b]) \to \lambda I_{1\in[a,b]} =: \mu$ при $n\to\infty$. По замечанию 2.3.1 имеет место сходимость
$$\psi_n(t) \to \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\mu(dx)\right\} = \exp\{\lambda(e^{it}-1-it)\} = e^{-it\lambda}e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

То есть $\widetilde{X}_{n,1}+\ldots+\widetilde{X}_{n,n} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$ при $n\to\infty$, $Y = Z-\lambda$, $Z\sim\mathrm{Poiss}(\lambda)$. Тогда $S_n+(\lambda-\sum_{j=1}^n p_{n,j})$ сходится по распределению к Z. Так как $\lambda-\sum_{j=1}^n p_{n,j} \to 0$, то $S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ при $n\to\infty$.

Следствие 2.3.1. *Последовательность S_n в нулевой схеме серий с ограниченными дисперсиями может сходиться только к безгранично делимому распределению.*

Доказательство. В силу замечания 2.3.1 предельным будет распределение, характеристическая функция которой является преобразованием Колмогорова. В силу теоремы 3 позапрошлой лекции случайная величина, имеющая такое распределение, будет безгранично делимой. □

2.3.3 Условия нормальности предела

Следствие 2.3.2. *Последовательность S_n сходится к $\mathcal{N}(0,1)$ тогда и только тогда, когда ν_n сходится ослабленно к μ, где μ – мера, соответствующая преобразованию Колмогорова.*

Доказательство. Утверждение суть прямое следствие замечания 2.3.1. Найдём меру μ.

$$\varkappa(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) = -\frac{t^2}{2}\mu(\{0\}) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx).$$

Так как $\exp\{\varkappa(t)\}$ – характеристическая функция стандартного нормального распределения, то $\varkappa(t) = -t^2/2$. В силу теоремы единственности преобразования Колмогорова, $\mu(A) = I_{0\in A}$. □

Теорема 2.3.2 (Линдеберга – Феллера)**.** *При $\sigma_n^2 \to 1$ предел по распределению в схеме серий с ограниченными дисперсиями будет нормальным тогда и только тогда, когда выполнено условие Линдеберга – Феллера, а именно при любом положительном ε*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{k,n}(x) \to 0,\ n \to \infty. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.12). Тогда

$$\nu_n(\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]) = \int_{|x|>\varepsilon} \nu_n(dx) = \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{k,n}(x) \to 0,\ n \to \infty.$$

Следовательно, если $0 \in (a, b)$, то

$$\begin{aligned} |\nu_n([a,b]) - 1| \leqslant |\nu_n(\mathbb{R}) - 1| + |\nu_n([a,b] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])| + |\nu_n(\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])| \leqslant \\ \leqslant |\sigma_n(\mathbb{R}) - 1| + 2|\nu_n(\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

При $n \to \infty$ первое слагаемое оценки (2.13) стремится к нулю. Второе слагаемое тоже стремится к нулю в силу условия (2.12). Если a и b одного знака и не равны нулю, то аналогично $\nu_n([a, b])$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, $\nu_n([a, b]) \to \mu([a, b]) = I_{0\in[a,b]}$ для любых a, b отличных от нуля. В силу следствия 2.3.2 получаем искомое (в обратную сторону тоже). □

2.3.4 Схема нарастающих сумм

Пусть $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, X_j – независимые, $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{D}X_j = \sigma_j^2$, $s_n^2 := \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$. Для $\widetilde{S}_n := S_n/s_n$ схема серий выглядит как

$$\begin{gathered} X_1/s_1 \\ X_1/s_2,\ X_2/s_2 \\ X_1/s_3,\ X_2/s_3,\ X_3/s_3 \\ X_1/s_4,\ X_2/s_4,\ X_3/s_4,\ X_4/s_4 \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots \end{gathered}$$

Теорема 2.3.3. *(Линдеберга) Последовательность $\widetilde{S}_n$ сходится по распределению к $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{X_k/s_n}(x) = s_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 dF_{X_k}(x) \to 0,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Так как $\mathsf{D}\widetilde{S}_n = 1$, то утверждение следует из теоремы 2.3.2. □

Теорема 2.3.4 (Достаточное условие Ляунова)**.** *Положим для положительного δ*

$$C_n := \left(\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} \right)^{1/(2+\delta)}.$$

Тогда если $C_n/s_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\widetilde{S}_n$ сходится по распределению к $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство. Так как

$$s_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 dF_{X_k}(x) \leqslant s_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon s_n)^{-\delta} \int_{|x|>\varepsilon s_n} |x|^{2+\delta} dF_{X_k}(x) = \frac{C_n^{2+\delta}}{\varepsilon^{\delta} s_n^{2+\delta}}. \tag{2.14}$$

Верхняя оценка (2.14) стремится к 0 при $n \to \infty$ по условию, а значит, по теореме 2.3.3 получаем искомое. □

2.4 Представление Леви – Хинчина

В этом разделе мы установим сответствие между характеристическими функциями безгранично делимого закона и преобразованием Хинчина.

2.4.1 Преобразование Хинчина

В случае $\mathsf{E}X^2 = \infty$ представление Колмогорова безгранично делимой функции может не быть справедливым. Вместо него может быть получено представление

$$\psi_X(t) = \exp\left\{ iat + \varkappa(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\mu(dx) \right\}, \tag{2.15}$$

где $\varkappa(t)$ – преобразование Колмогорова меры μ.

Преобразуем выражение (2.15).

$$\psi_X(t) = \exp\left\{ iat + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\mu(dx) \right\} = \\ \exp\left\{ iat + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \mu(dx) \right\}.$$

Последнее выражение называется <u>формулой Хинчина</u>.

Представим преобразование Колмогорова как

$$\varkappa(t) = -\frac{\mu(\{0\})t^2}{2} + \int_{0<|x|\leqslant 1} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\mu(dx) + \int_{1<|x|} \frac{e^{itx}-1}{x^2}\mu(dx) - it\int_{1<|x|} \frac{1}{x}\mu(dx).$$

Тогда можно преобразовать выражение (2.15) к

$$\psi_X(t) = \exp\left\{iat - \frac{\mu(\{0\})t^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itxI_{0<|x|\leqslant 1}\lambda(dx))\right\}.$$

Последнее выражение называется <u>формулой Леви</u>.

Определение 2.4.1. <u>Преобразованием Хинчина</u> меры μ называется функция

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mu(dx).$$

Теорема 2.4.1 (единственности). *Если $\chi_1(t) = \chi_2(t)$ при всех t, то $\mu_1 = \mu_2$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\Delta_h\chi(t) = \chi(t+h) + \chi(t-h) - 2\chi(t).$$

Заметим, что

$$\Delta_h\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) = e^{itx}(e^{ixh} + e^{-ixh} - 2) = 2e^{itx}(\cos(xh) - 1).$$

Тогда

$$\Delta_h\chi_j(t) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(\cos(xh)-1)\frac{1+x^2}{x^2}\mu_j(dx), \quad \Delta_h\chi_1(t) = \Delta_h\chi_2(t).$$

Положим

$$\nu_j(A) = \int_A \frac{(1+x^2)(1-\cos(xh))}{x^2}\mu_j(dx).$$

Заметим, что $-\Delta_h\chi_j(t)$ является характеристической функцией меры ν_j. По теореме единственности для характеристических функций $\nu_1 = \nu_2$, то есть для любого измеримого множества A верно

$$\int_A \frac{(1+x^2)(1-\cos(xh))}{x^2}\mu_1(dx) = \int_A \frac{(1+x^2)(1-\cos(xh))}{x^2}\mu_2(dx).$$

Зафиксируем $M > 0$, h такое, что $Mh < \pi$. Положим $\widetilde{\mu}_j(A) := \mu_j(A \cap [-M, M])$. Тогда для любых h таких, что $Mh < \pi$ функция

$$f_h(x) := \frac{(1+x^2)(1-\cos(xh))}{x^2}$$

положительна при $|x| < M$. Пусть меры $\widetilde{\mu}_1$ и $\widetilde{\mu}_2$ различны. Рассмотрим сигма-аддитивную функцию $\phi := \widetilde{\mu}_1 - \widetilde{\mu}_2$. Существует измеримое множество A такое, что $\phi < 0$ или $\phi > 0$. С одной стороны

$$\int_A \frac{(1+x^2)(1-\cos(xh))}{x^2}\phi(dx) = \int_A f_h(x)\phi(dx) = 0.$$

С другой стороны, функция f_h положительна на A (так как множество A можно было выбирать как подмножество $[-M, M]$), функция ϕ одного знака, поэтому интеграл отличен от нуля. Противоречие.

Значит, меры μ_1 и μ_2 совпадают на любом отрезке $[-M, M]$, поэтому совпадают на $\mathbb{R}$. □

Теперь мы докажем теорему непрерывности для преобразования Хинчина. Из сходимости мер несложно будет следовать сходимость преобразований. Для доказательства противоположной импикации мы заготовим ряд лемм.

Лемма 2.4.1. *Преобразование Хинчина $\chi(t)$ является непрерывной функцией.*

Доказательство. Представим функцию $\chi(t)$ как

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\mu(dx) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - itx)\mu(dx) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}\mu(dx). \quad (2.16)$$

Первое слагаемое правой части выражения (2.16) является непрерывной ветвью логарифма экспоненты этого же выражения, равной нулю при $t = 0$. Следовательно, так как экспонента является характеристической функцией обобщённого пуассоновского распределения, логарифм непрерывен, то и композиция является непрерывной функцией. Второе слагаемое выражения (2.16) является преобразованием Колмогорова. Поэтому преобразование Хинчина является непрерывной функцией как сумма непрерывных функций. □

Лемма 2.4.2. *Пусть последовательность преобразований Хинчина $\chi_n(t)$ сходится к некоторой непрерывной функции $\chi(t)$. Тогда сходимость равномерна на любом отрезке.*

Доказательство. Представим экспоненту преобразования Хинчина как

$$\exp\{\chi_n(t)\} = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\mu(dx)\right\} = \\ = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\mu(dx)\right\} \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}\mu(dx)\right\}. \quad (2.17)$$

Первый множитель правой части выражения (2.17) является характеристической функцией обобщённого пуассоновского распределения. Второй множитель тоже является характеристической функцией как эскпонента преобразования Колмогорова. Значит, последовательность $\exp\{\chi_n(t)\}$ сходится к некоторой $\psi(t) = \exp\{\chi(t)\}$ при $n \to \infty$ равномерно на любом отрезке.

Представим комплекснозначные преобразования Колмогорова как

$$\chi_n(t) = u_n(t) + iv_n(t), \qquad \chi(t) = u(t) + iv(t).$$

Так как

$$u_n(t) = \ln|\exp\{\chi_n(t)\}|, \qquad u(t) = \ln|\exp\{\chi(t)\}|,$$

то последовательность $u_n(t)$ сходится к $u(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на любом отрезке. Следовательно,

$$\exp\{\chi_n(t) - u_n(t) - iv(t)\} \to \exp\{\chi(t) - u(t) - iv(t)\} = 1,\ n \to \infty.$$

Так как функции $\chi_n(t) - u_n(t) - iv(t) = i(v_n(t) - v(t))$ непрерывны как мнимые части непрерывного по лемме 2.4.1 преобразования Хинчина, равны нулю в нуле, то по лемме из позапрошлой лекции последовательность $i(v_n(t) - v(t))$ стремится к 0 при $n \to \infty$ равномерно на любом отрезке.

В итоге, последовательность $\chi_n(t) = u_n(t) + iv_n(t)$ сходится к $\chi(t) = u(t) + iv(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на любом отрезке. □

В процессе доказательства теоремы непрерывности возникнет необходимость из сходимости преобразованных мер получить сходимость исходных мер.

Лемма 2.4.3. *Пусть функция f является непрерывной и отделённой от нуля функцией. Рассмотрим последовательность мер*

$$\nu_n(A) := \int_A f(x)\mu_n(dx), \qquad \nu(A) := \int_A f(x)\mu(dx),$$

Если меры ν_n сходятся слабо к мере ν, то меры μ_n сходятся слабо к мере μ при $n \to \infty$.

Доказательство. По эквивалентному определению слабой сходимости для любой ограниченной непрерывной функции g имеет место сходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu(dx),\ n \to \infty. \tag{2.18}$$

Пусть h — ограниченная непрерывная функция. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu_n(dx) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{f(x)}\nu_n(dx), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu(dx) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{f(x)}\nu(dx).$$

Функция $g(x) := h(x)/f(x)$ является ограниченной непрерывной, а значит в силу (2.18) верно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu_n(dx) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mu(dx),\ n \to \infty.$$

$\square$

Лемма 2.4.4. *Для любого отрезка $[a, b]$ функции*

$$g_1(x) := \int_a^b (1 - \cos(2hx))dh, \qquad J_{a,b}(x) := \int_a^b (1 - \cos(2hx))\frac{1 + x^2}{x^2}dh = \frac{1 + x^2}{x^2}g_1(x)$$

отделены от нуля.

Доказательство. Заметим, что для произвольного x функция $f_x(h) := 1 - \cos(2xh)$ — положительна для всех h кроме множества меры нуль по Лебегу. Тогда для любых $a < b$ функции $g_1(x)$, $J_{a,b}(x)$ положительны при всех x. Так как эти функции непрерывны, то на ограниченном множестве они отделены от нуля. Поэтому единственный случай, когда они могут не быть отделены от нуля, состоит в том, что можно выделить последовательность $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$, что $g_1(x_k) \to 0$ (эквивалентно $J_{a,b}(x_k) \to 0$, так как отношение стремится к единице). Напротив, имеем

$$\lim_{x\to\infty} g_1(x) = b - a - \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2bx) - \sin(2ax)}{2x} = b - a > 0.$$

Получаем, что на бесконечности функции $g_1(x)$, $J_{a,b}(x)$ тоже отделены от нуля, а значит отделены всюду. $\square$

Теорема 2.4.2 (Непрерывности)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если последовательность мер μ_n слабо сходится к мере μ при $n \to \infty$, то соответствующие преобразования Хинчина $\chi_n(t)$ для любого t сходятся к $\chi(t)$ при $n \to \infty$.*

2. *Если последовательность преобразований Хинчина $\chi_n(t)$ мер μ_n сходятся к непрерывной функции $\chi(t)$ при $n \to \infty$, то эта функция является преобразованием Хинчина некоторой меры μ, и последовательность мер μ_n слабо сходится к μ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что последовательность мер μ_n слабо сходится к мере μ при $n \to \infty$. Положим

$$f_t(x) := \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2}\right)\frac{1 + x^2}{x^2}.$$

Эта функция является непрерывной всюду, кроме нуля. В нуле у $f_t(x)$ устранимая особенность, так как

$$\lim_{x\to 0} f_t(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0}\left(1 + itx - \frac{t^2x^2}{2} - 1 - itx(1+O(x^2))\right)\frac{1+x^2}{x^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Непрерывная функция ограничена на любом компакте. Для $|x| > 1$ имеем оценку

$$\left|\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\right| \leqslant 2(2+t).$$

Поэтому для любого t функция $f_t(x)$ является ограниченной непрерывной функцией. Следовательно, по теореме 1.1.3 преобразования Хинчина χ_n как интегралы непрерывной ограниченной f_t по мерам μ_n сходятся к преобразованию Хинчина χ как интегралу функции f_t меры μ.

Докажем в обратную сторону. Рассмотрим для произвольной функции $g(t)$ разностную схему

$$\Delta_h g(t) := g(t+h) + g(t-h) - 2g(t).$$

Тогда для преобразования Колмогорова имеем

$$\Delta_{2h}\chi(t) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(\cos 2xh - 1)\frac{1+x^2}{x^2}\mu(dx). \tag{2.19}$$

Пусть последовательность $\chi_n(t)$ сходится к $\chi(t)$ при $n\to\infty$. Эта сходимость будет являться равномерной по лемме 2.4.2. Для любого отрезка $[a,b]$ по теореме Лебега имеем

$$\int_a^b \Delta_{2h}\chi_n(t) - \int_a^b \Delta_{2h}\chi(t) \to 0,\ n\to\infty. \tag{2.20}$$

Положим

$$J_{a,b}(x) := -\int_a^b (\cos 2xh - 1)\frac{1+x^2}{x^2}dh.$$

Используя теорему Фубинии и соотношение (2.19), можно переписать разность преобразований Хинчина как

$$\int_a^b \Delta_{2h}\chi_n(t) - \int_a^b \Delta_{2h}\chi(t) = 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}J_{a,b}(x)\mu(dx) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}J_{a,b}(x)\mu_n(dx)\right). \tag{2.21}$$

Введём меры

$$\nu_n(A) := \int_A J_{a,b}(x)\mu_n(dx), \qquad \nu(A) := \int_A J_{a,b}(x)\mu(dx).$$

Эти величины действительно являются мерами, так как функция $J_{a,b}(x)$ непрерывна, неотрицательна, нестрого монотонно возрастающая.

Используя сходимость разностных схем (2.20), в силу соотношения (2.21) сходятся характеристические функции мер ν_n к характерисической функции меры ν. По теореме непрерывности для характеристических функций выводим, что последовательность мер ν_n сходится слабо к мере ν при $n \to \infty$.

По лемме 2.4.4 функция $J_{a,b}(x)$ отделена от нуля, поэтому по лемме 2.4.3 из сходимости мер ν_n к ν следует сходимость мер μ_n к μ при $n \to \infty$. □

Замечание 2.4.1. Пусть $g_n(t) := ia_n t + \chi_n(t) \to iat + \chi(t) =: g(t)$ при $n \to \infty$. Тогда $\chi_n(t) \to \chi(t)$, $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что

$$\Delta_h g_n(t) = \Delta_h \chi_n(t), \quad \Delta_h g(t) = \Delta_h \chi(t).$$

Отсюда, так как $\Delta_h g_n$ сходятся к $\Delta_h g$, то $\Delta_h \chi_n$ сходятся к $\Delta_h \chi$ при $n \to \infty$. В теореме 2.4.2 доказывалось, что из сходимости $\Delta_h \chi_n$ к $\Delta_h \chi$ следует сходимость мер μ_n к мере μ при $n \to \infty$. Обратно, в теореме 2.4.2 доказывалось, что из сходимости мер следует сходимость преобразований Хинчина. Последовательность a_n стремится к a как разность сходящихся последовательностей. □

2.4.2 Представление Хинчина безгранично делимого закона

Теорема 2.4.3. *Характеристическая функция безгранично делимого закона допускает представление Хинчина*

$$\psi(t) = \exp\left\{\chi(t) + iat\right\},$$

где $a = const$, $\chi(t)$ — преобразование Хинчина.

Доказательство. В силу теоремы де Финетти имеем

$$\ln \psi(t) = \lim_{n \to \infty} n(\psi_n(t) - 1). \tag{2.22}$$

Члены сходящейся последовательности представимы как

$$\begin{aligned} n(\psi_n(t) - 1) &= n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\mu_n(dx) = \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\mu_n(dx) + n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{itx}{1+x^2}\mu_n(dx) \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \frac{x^2}{1+x^2}\mu_n(dx) + n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{itx}{1+x^2}\mu_n(dx). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Первое слагаемое правой части выражения (2.23) является преобразованием Хинчина $\chi_n(t)$ меры

$$\nu_n(A) := n \int_A \frac{x^2}{1+x^2} \mu_n(dx).$$

Второе слагаемое правой части выражения (2.23) обозначим через ita_n, где

$$a_n := n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx).$$

В силу сходимости (2.22) имеем

$$\ln \psi(t) = \lim_{n \to \infty} (\chi_n(t) + ita_n).$$

Тогда по замечанию 2.4.1 последовательность преобразований Хинчина $\chi_n(t)$ сходится к $\chi(t)$, последовательность a_n сходится к a при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\ln \psi(t) = iat + \chi(t).$$

$\square$

2.4.3 Общая нулевая схема серий

В данной модели мы будем считать, что у нас есть схема серий

$$\begin{gathered} X_{1,1} \\ X_{2,1},\ X_{2,2} \\ X_{3,1},\ X_{3,2},\ X_{3,3} \\ X_{4,1},\ X_{4,2},\ X_{4,3},\ X_{4,4} \\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots \end{gathered}$$

и условие РБМ

$$\max_{k \leqslant n} \mathsf{P}(|X_{n,k}| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

Дополнительно предположим условие симмертричности распределений $X_{n,k}$. Тогда имеем

$$\psi_{n,k}(t) = \psi_{n,k}(-t) = \overline{\psi_{n,k}(t)},$$

то есть $\psi_{n,k}(t)$ — вещественно.

Лемма 2.4.5 (Сравнения)**.** *Положим в общей нулевой схеме серий*

$$\psi_n(t) := \prod_{k=1}^{n} \psi_{n,k}(t).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\ln \psi_n(t) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} (\psi_{n,k}(t) - 1),$$

где $o(1)$ — равномерно по любому отрезку.

Доказательство. Заметим, что для положительного ε справедлива оценка

$$|\psi_{n,k}(t) - 1| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) dF_{n,k}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} (e^{itx} - 1) dF_{n,k}(x)\right| + \left|\int_{x\notin[-\varepsilon,\varepsilon]} (e^{itx} - 1) dF_{n,k}(x)\right|. \quad (2.24)$$

Первое слагаемое правой части оценки (2.24) можно сделать малым засчёт выбора ε, а второе слагаемое оценивается выражением $2\mathsf{P}(|X_{n,k}| > \varepsilon)$, что в силу РБМ можно делать сколь угодно малым равномерно по k. Отсюда

$$\max_{k\leqslant n} |1 - \psi_{n,k}(t)| \to 0,\ n \to \infty. \quad (2.25)$$

Для $t \in [-T, T]$ и для достаточно больших n имеем

$$\ln \psi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - (1 - \psi_{n,k}(t))) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(1 - \psi_{n,k}(t))^j =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\psi_{n,k}(t) - 1) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+1}(1 - \psi_{n,k}(t))^j\right), \quad (2.26)$$

а также имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+1}(1 - \psi_{n,k}(t))^j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \psi_{n,k}(t))^j = \frac{1 - \psi_{n,k}(t)}{\psi_{n,k}(t)}. \quad (2.27)$$

В силу сходимости (2.25) правая часть оценки (2.27) равномерно по k стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому тождество (2.26) переписывается как

$$\ln \psi_n(t) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} (\psi_{n,k}(t) - 1),$$

где $o(1)$ — равномерно по отрезку $[-T, T]$. □

Лемма 2.4.6. *Пусть характеристическая функция $\psi(t)$ — вещественна и неотрицательна. Тогда для всех t справедливо неравенство*

$$1 - \psi(2t) \leqslant 4(1 - \psi(t)).$$

Доказательство. Используя свойства тригонометрических функций, имеем

$$1 - \psi(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(2tx)) dF(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(tx) dF(x) =$$
$$= 8\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) \cos^2\left(\frac{tx}{2}\right) dF(x) \leqslant 8\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dF(x) =$$
$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(tx)) dF(x) = 4(1 - \psi(t)).$$

$\square$

Теорема 2.4.4. *Пусть $S_n := X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ — частичная сумма случайных величин в симметричной нулевой схеме серий с выполненным условием РБМ. Тогда $S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность мер*

$$\nu_n(A) := \int_A \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{k=1}^{n} dF_{n,k}(x)$$

слабо сходится к некоторой мере ν при $n \to \infty$ с преобразованием Хинчина $\chi(t)$. Причём $\psi_Z(t) = \psi(t) = \exp\{\chi(t)\}$.

Доказательство. Пусть имеет место слабая сходимость мер ν_n к мере ν при $n \to \infty$. Заметим, что выражение

$$\sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(t) - 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \sum_{k=1}^{n} dF_{n,k}(x) + it \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{n,k}(x)}_{=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu_n(dx) \qquad (2.28)$$

является преобразованием Хинчина $\chi_n(t)$ меры ν_n. По теореме непрерывности для преобразования Хинчина для любого t последовательность $\chi_n(t)$ сходится к $\chi(t)$ — преобразованию Хинчина меры ν при $n \to \infty$. сходится к преобразованию Хинчина $\chi(t)$ при $n \to \infty$. По лемме 2.4.5 сравнения и представлению (2.28) имеем

$$\ln \psi_n(t) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(t) - 1) = (1 + o(1))\chi_n(t). \qquad (2.29)$$

Отсюда $\psi_n(t) \to \exp\{\chi(t)\}$ при $n \to \infty$. Так как преобразование Хинчина по теореме 2.4.2 непрерывно, то его экспонента непрерывна, и по теореме непрерывности для характеристической функции предел $\psi_n(t)$ суть характеристическая функция $\psi(t)$, равная $\exp\{\chi(t)\}$.

Пусть $S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$. Тогда из слабой сходимости последовательность $\psi_n(t)$ сходится к $\psi(t)$ при $n \to \infty$. Так как распределения S_n симметричны, то $\psi_n(t) = \psi_{S_n}(t)$ вещественны и их предел $\psi(t)$ вещественнен. В силу того, что $\psi(0) = 1$, $\psi(t)$ — непрерывна, то $\psi(t) > 0$ для t из некоторого отрезка $[-T, T]$. Тогда $|\ln(\psi(t))|$ ограничено на $[-T, T]$ и при достаточно больших n по лемме 2.4.6 сравнения выражения

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(t) - 1)\right| \leqslant C.$$

По лемме 2.4.6 имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(2t)-1)\right| \leqslant 4\left|\sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(t)-1)\right| \leqslant 4C,$$

откуда для $t \in [-2T, 2T]$ последовательность $\ln(\psi_n(t))$ имеет предел, равный по непрерывности логарифма $\ln(\psi(t))$. Описанную процедуру можно продолжить любое конечное количество раз, тем самым доказав, что для любого t последовательность $\ln(\psi_n(t))$ сходится к $\ln(\psi(t))$ при $n \to \infty$. Тогда в силу представлений (2.29) и (2.28) имеем

$$\ln(\psi(t)) = \lim_{n\to\infty} \ln(\psi_n(t)) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(t).$$

Следовательно, функция $\ln(\psi(t))$ является преобразованием Хинчина $\chi(t)$ некоторой меры ν, причём тогда по теореме непрерывности для преобразования Хинчина последовательность мер ν_n слабо сходится к мере ν. Причём справедливо тождество $\psi(t) = \exp\{\chi(t)\}$. □

Замечание 2.4.2. В последней теореме 2.4.4 можно рассмотреть несимметричный случай. Тогда пусть $S_{n,1}$ и $S_{n,2}$ — независимы и распределены как S_n. Случайная величина $S_{n,1} - S_{n,2} = \sum_{k=1}^{n}(X_{k,1} - X_{k,2})$ будет иметь симметричное распределение. Для неё последовательность $|\psi_{S_n}(t)|^2$ сходится к $|\psi(t)|^2$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность мер

$$\nu_n(A) := \int_A \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{k=1}^{n} dF_{X_{k,1}-X_{k,2}}(x)$$

слабо сходится к некоторой мере ν с преобразованием Хинчина $\chi(t)$. Причём $|\psi(t)|^2 = \exp\{\chi(t)\}$.

Замечание 2.4.3. Положим для некоторого положительного b

$$a_{n,k} := \int_{|x|<b} x dF_{n,k}(x), \quad a_n := \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}.$$

Пусть для $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ имеет место сходимость для любого t

$$|\psi_{S_n}(t)|^2 \to |\psi(t)|^2,\ n \to \infty,$$

и выполнено условие РБМ. Тогда $S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность

$$f_n(t) := ita_n + \sum_{k=1}^{n}(\psi_{n,k}(t)e^{-ita_{n,k}} - 1)$$

сходится поточечно к непрерывной в нуле функции.

2.5 Устойчивые распределения

В этом разделе мы опишем класс устойчивых распределений, установим связь их безграничную делимость их предела, найдём его представление.

2.5.1 Определение и эквивалентные условия

Определение 2.5.1. Распределение F называют <u>устойчивым</u>, если

$$\underbrace{F * \ldots * F}_{n}(x) =: F^{*n}(x) = F(b_n(x + a_n)).$$

Иначе говоря, для X_k — независимых случайных величин, имеющих распределение F верно

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \frac{X_1}{b_n} - a_n, \quad \psi_{X_1}^n(t) = e^{-ita_n}\psi\left(\frac{t}{b_n}\right).$$

Примеры.

1. Распределение Коши.

$$\psi(t) = e^{ita - |t|b}, \quad \psi^n(t) = e^{itan}e^{-|t|bn}, \quad b_n = n,\ a_n = a(n-1).$$

2. Нормальное распределение.

$$\psi(t) = e^{it\mu - \sigma^2 t^2/2}, \quad \psi^n(t) = e^{it\mu n}e^{-\sigma^2 t^2 n/2}, \quad b_n = \sqrt{n},\ a_n = \mu(n-1).$$

Заметим, что устойчивые распределения безгранично делимы, поэтому их характеристические функции допускают представление Леви

$$\psi(t) = \exp\left\{\int_{x\neq 0}\left(e^{itx} - 1 - itxI_{|x|\leqslant 1}\right)\lambda(dx) + ita\right\}. \tag{2.30}$$

Следовательно, для устойчивых распределений справедливо тождество

$$\begin{aligned}\psi^n(t) = \exp\left\{n\int_{x\neq 0}\left(e^{itx} - 1 - itxI_{|x|\leqslant 1}\right)\lambda(dx) + itna\right\} = \\ = \exp\left\{\int_{x\neq 0}\left(e^{itx} - 1 - itx/b_nI_{|x|\leqslant 1}\right)\lambda(dx) + ita_n/b_n + ita\right\}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Можно разрешить уравнение (2.31) относительно λ и получить следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. *Устойчивое распределение соответствует мере*

$$\lambda(A) = c_1\int_{A\cap(-\infty,0)} d(-x)^{-\alpha} + c_2\int_{A\cap(0,+\infty)} dx^{-\alpha},$$

где $c_1^2 + c_2^2 > 0,\ 0 < \alpha \leqslant 2$.

Используя представление Леви (2.30) и теорему 2.5.1, можно выразить характеристическую функцию.

Теорема 2.5.2. *Характеристическая функция устойчивого закона при $\alpha \neq 1$ имеет вид*

$$\exp\left\{itc - b|t|^{\alpha}\left(1 + i\theta\, sign(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right\},\ |\theta| \leqslant 1.$$

2.5.2 Сходимость в схеме нарастающих сумм к невырожденному пределу

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины. Попытаемся описать класс распределений, для которых существуют последовательности a_n и b_n такие, что

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{a_n} - b_n = \frac{S_n}{a_n} - b_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,\ n \to \infty, \tag{2.32}$$

где случайная величина Z невырождена, то есть отлична от константы почти наверное.

Лемма 2.5.1. *В случае сходимости* (2.32) *справедливы соотношения*

$$a_n \to \infty,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $X_{k,1} \sim X_{k,2} \sim X_k$ и случайные величины $X_{k,i}$ — независимы. Положим $S_{n,i} := X_{1,i} + \ldots + X_{n,i}$. Заметим, что имеет место слабая сходимость

$$\frac{S_{n,1} - S_{n,2}}{a_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_1 - Z_2,\ n \to \infty.$$

Тогда по теореме непрерывности для характеристических функций имеем

$$\psi_{(S_{n,1}-S_{n,2})/a_n}(t) = \psi_{S_{n,1}}(t/a_n)\overline{\psi_{S_{n,2}}(t/a_n)} = |\psi_{X_1}(t/a_n)|^{2n} \to \psi_{Z_1-Z_2}(t) = |\psi_Z(t)|^2. \tag{2.33}$$

Заметим, что $|\psi_Z(t)|^2$ — непрерывна и равна единице при $t = 0$. Следовательно, в некоторой симметричной связной окрестности нуля U функция $|\psi_Z(t)|^2$ положительна и ограничена.

Пусть $t \in U$. Предположим, что последовательность $|\psi_{X_1}(t/a_n)|$ не сходится к единице при $n \to \infty$. Тогда можно выделить подпоследовательность n_k такую, что

$$|\psi_{X_1}(t/a_{n_k})| \to c < 1.$$

Если $c < 1$, то $|\psi_{X_1}(t/a_{n_k})|^{2n_k}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. В обоих случаях приходим к противоречию с тем, что предел должен быть равен положительному числу $|\psi_Z(t)|^2$. Откуда последовательность $|\psi_{X_1}(t/a_n)|$ сходится к единице при $n \to \infty$.

Выясним предельное поведение последовательности a_n. Пусть некоторая подпоследовательность a_{n_k} сходится к a при $k \to \infty$.

1. Если $a = 0$, то в силу слабой сходимости для любой точки x непрерывности функции $\mathsf{P}(|Z_1 - Z_2| > x)$ имеет место сходимость
$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{n_k,1} - S_{n_k,2}}{a_{n_k}}\right| > x\right) = \mathsf{P}(|S_{n_k,1} - S_{n_k,2}| > xa_{n_k}) \to \mathsf{P}(|Z_1 - Z_2| > x),\ n \to \infty.$$
Так как для любого x последовательность xa_{n_k} стремится к нулю при $k \to \infty$, то последовательность $S_{n_k,1} - S_{n_k,2}$ сходится к нулю по вероятности. Следовательно, для любого t
$$\psi_{S_{n_k,1}-S_{n_k,2}}(t) = |\psi_{X_1}(t)|^{2n_k} \to 1,\ n \to \infty.$$
Так как $|\psi_{X_1}(t)|$ не зависило от k, то $|\psi_{X_1}(t)| = 1$ для любого t. Тогда
$$\psi_{X_1}(t) = \mathsf{E}e^{itX} = e^{i\theta(t)}, \tag{2.34}$$
где $\theta(t)$ — непрерывная функция в силу непрерывности характеристической функции. Так как $e^{i(tX-\theta(t))} = 1$, то почти наверное $\cos(tX - \theta(t)) = 1$, или почти наверное $tX - \theta(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. В силу произвольности t из окрестности нуля U получаем, что X — константа.

2. $a \neq 0$, $|a| < \infty$, то по непрерывности характеристической функции имеем
$$\left|\psi_{X_1}\left(\frac{t}{a_{n_k}}\right)\right| \to \left|\psi_{X_1}\left(\frac{t}{a}\right)\right| = 1,\ k \to \infty.$$
Положим $s := t/a$, $V := \{t/a \mid t \in U\}$. Далее получаем соотношение (2.34), и аналогично предыдущему пункту приходим к противоречию.

Остаётся вариант, когда $a = \infty$. В силу произвольности рассматриваемой подпоследовательности a_{n_k} заключаем, что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Положим $\widetilde{X}_k := X_{k,1} - X_{k,2}$, $\widetilde{S}_n := \sum_{k=1}^n \widetilde{X}_k$. Заметим, что
$$\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\widetilde{S}_n}{a_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{\widetilde{X}_{n+1}}{a_{n+1}}.$$
Так как $\widetilde{X}_{n+1}/a_{n+1}$ стремится к нулю по вероятности, то по лемме Слуцкого предел $\widetilde{S}_{n+1}/a_{n+1}$ по распределению, равный $Z_1 - Z_2$, совпадает с пределом $(a_n/a_{n+1})\widetilde{S}_n/a_n$ по распределению, равный $Z_1 - Z_2$. Но предел $\widetilde{S}_n/a_n$ по распределению равен $Z_1 - Z_2$, поэтому a_n/a_{n+1} стремятся к единице при $n \to \infty$. $\square$

Лемма 2.5.2. *Невырожденным пределом в схеме нарастающих сумм является устойчивый закон.*

Доказательство. Заметим, что
$$\frac{S_{nk}}{a_{nk}} - b_{nk} = \left(\frac{S_{n,1}}{a_n} - b_n + \ldots + \frac{S_{n,k}}{a_n} - b_n\right)\frac{a_n}{a_{nk}} + \left(b_n\frac{ka_n}{a_{nk}} - b_{nk}\right). \tag{2.35}$$

Так как по лемме 2.5.1 последовательность a_n стремится к бесконечности, то последовательность $c_n := a_n/a_{nk}$ ограничена. Если ноль является предельной точкой множества $\{c_n\}$, то первое слагаемое правой части выражения (2.35) стремится к нулю по вероятности. Следовательно, по лемме Слуцкого левая часть выражения (2.35) сходится к тому же, к чему сходится второе слагаемое правой части выражения (2.35). Но второе слагаемое константно, поэтому предел будет иметь вырожденное распределение. Это противоречит с устойчивостью закона распределения.

Пусть c — предельная точка множества $\{c_n\}$. Как мы выяснили, c отлична от нуля. Пусть последовательность c_m сходится к c. Тогда с одной стороны левая часть выражения (2.35) сходится к Z, с другой стороны она сходится к $c(\widetilde{Z}_1+\ldots+\widetilde{Z}_k)+d$, где число d является пределом второго слагаемого правой части выражения (2.35). Следовательно,

$$Z \sim c(\widetilde{Z}_1 + \ldots + \widetilde{Z}_k) + d,$$

где $\widetilde{Z}_k$ независимы и распределены как Z. □

Определение 2.5.2. Будем говорить, что функция $L(x)$ медленно меняется на бесконечности, если для любого положительного t имеет место сходимость

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1,\ x \to \infty.$$

Функции e^x и x^2 не являются медленно меняющимися на бесконечности, а $\ln x$ является.

Теорема 2.5.3. *X притягивается устойчивым законом, то есть*

$$\frac{S_n}{a_n} - b_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,\ n \to \infty$$

с $\alpha \in (0,2)$ тогда и только тогда, когда

$$1 - F(x) + F(-x) \sim x^{-\alpha} L(x),\ x \to \infty,$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция. При этом для $\alpha < 1$

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,\ n \to \infty,$$

а для $\alpha > 1$

$$\frac{S_n - n\mathsf{E}X_1}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,\ n \to \infty.$$

Глава 3

Уточнение приближения в центральной предельной теореме

3.1 Локализация ЦПТ

3.1.1 Локальная предельная теорема для арифметического случая

Пусть X_i — н.о.р. величины, $\mathsf{E}X = \mu$, $\mathsf{D}X = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Центральная предельная теорема утверждает, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(S_n \in [\mu n + x\sigma\sqrt{n}, \mu n + y\sigma\sqrt{n}]) \to \mathsf{P}(Z \in [x, y]) = \mathsf{P}(Z_n \in [\mu n + x\sigma\sqrt{n}, \mu n + y\sigma\sqrt{n}]),$$

где $Z_n \sim \mathcal{N}(\mu n, n\sigma^2)$.

Можем ли сказать, что случайные величины S_n и Z_n схожи и в более локальном формате? Например, верно ли, что

$$\frac{\mathsf{P}(S_n \in [b, c])}{\mathsf{P}(Z_n \in [b, c])} \to 1,\ n \to \infty.$$

Если это так, причём сходимость равномерна по $b, c \in \mathbb{R}$, то этот факт сильнее ЦПТ, ведь отрезок $[\mu n + x\sigma\sqrt{n}, \mu n + y\sigma\sqrt{n}]$ можно разрезать на отрезки длины 1 (и один оставшийся нецелый отрезок), для каждого из которых подменить S_n на Z_n, пользуясь равномерностью, а затем просуммировать результат в вероятность, что Z_n попадет в суммарный отрезок.

Давайте посмотрим, насколько мы можем приблизиться к этому идеалу. Для нас будет два принципиально разных случая – решётчатый ($\mathsf{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$ для некоторых a, d) и нерешётчатый (иначе). Мы будем выбирать максимальное такое d и называть его шагом решётки.

Если X решётчаты, то мы не можем рассматривать отрезки $[b,c]$ ширины меньше d, иначе в какие-то отрезки не попадет вообще ничего. Отрезки ширины d при этом сведутся к попаданию S_n в конкретную точку $k \in an + d\mathbb{Z}$.

Теорема 3.1.1 (Гнеденко)**.** *Пусть X_i — н.о.р. решетчатые случайные величины со сдвигом a и шагом d, $\mathsf{E}X_i = \mu$, $\mathsf{D}X_i = \sigma^2$. Тогда*

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \mathsf{P}(Z_n \in [k, k+1]) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

при $k \in an + d\mathbb{Z}$, $n \to \infty$, причем $o()$ равномерно мало по указанным k.

Доказательство. Будем считать, что $a = 0$, $d = 1$, в противном случае перейдем от величин X_i к $(X_i - a)/d$.

Будем доказывать теорему на основе формулы обращения для дискретного случая

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\psi_{X_1}^n(t)dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{n}}}\psi_{X_1}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)dt.$$

Положим $x := (k - an)/(\sigma\sqrt{n})$, тогда

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}e^{-it\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}}\psi_{X_1}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt.$$

Для положительного δ имеет место неравенство

$$\left|\int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|<\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt\right| \le \pi\sigma\sqrt{n}q^n,$$

где $\sup_{\delta<|s|<\pi}|\psi_{X_1}(s)| =: q$. Заметим, что если $\psi_{X_1}(s_0) = e^{is_0b}$, то $\psi_{X_1-b}(s_0) = 1$, откуда

$$\mathsf{P}\left(X_1 \in \left\{b + \frac{2\pi k}{s_0},\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right) = 1.$$

Тогда шаг X_1 будет $2\pi/s_0$, что, в сочетании с решетчатостью и $d = 1$ дает $s_0 > 2\pi$. Это противоречит $\delta < s < \pi$, то есть $q < 1$ и оцениваемый интеграл экспоненциально мал по n. При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{|t|\le\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}e^{-t^2/2}dt + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно по x стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку

$$\int_{|t|>\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}dx = o(1).$$

Тем самым, для доказательства требуемой формулы, нам достаточно показать, что при достаточно малых δ

$$\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\left(\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-t^2/2}\right)dt=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Для этого требуется оценить выражение

$$\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\left|e^{n\left(\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2n}\right)}-1\right|dt. \tag{3.1}$$

При любом положительном ε и достаточно малом δ при $|s|<\delta$ верно неравенство

$$\left|\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}(s)+\frac{s^2}{2}\right|<\varepsilon s^2.$$

Тогда оцениваемый интеграл (3.1) не превосходит

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\max\left(e^{\varepsilon t^2}-1,1-e^{-\varepsilon t^2}\right)dt<\varepsilon_1$$

при любом положительном ε_1 и достаточно малых ε. □

3.1.2 Локальная предельная теорема для плотностей

Пусть X_i имеют плотности. Сходятся ли плотности $(S_n-an)/(\sigma\sqrt{n})$ к нормальной плотности? Вообще говоря, нет.

Пример. Рассмотрим плотность $f(x)=c/(|x|\ln^2|x|)$, $x\in[-1/2,1/2]$. Функция $f(x)$ монотонно убывает при $x\in[0,\delta_1]$ при некотором $\delta_1>0$, а значит плотность суммы X_1+X_2 оценивается снизу следующим образом

$$f_{X_1+X_2}(u)\geq\int_0^u f(x)f(u-x)dx\geq\int_0^u f(u)f(u)dx=\frac{uc^2}{u^2\ln^4 u}=\frac{c^2}{u\ln^4 u}$$

при $u\in(0,\delta_1]$. Аналогичным образом дело обстоит в $[-\delta_1,0)$. По тем же причинам плотность суммы $X_1+...+X_n$ не меньше $(u\ln^{2n}u)^{-1}$ на некотором интервале $[-\delta_n,\delta_n]$. А тогда и плотность $f_{S_n n^{-1/2}}(x)$ стремится к бесконечности при $x\to 0$ и любом n. Это противоречит нашим надеждам на то, что плотность нормированных сумм будет сходиться к нормальной.

Пример. Представим себе, что X_i берутся равновероятно из 2 величин $Z_i=\pm 1$, где Z_i имеет плотность из прошлого примера. Тогда S_n будет отличаться от S_n прошлого примера на случайную величину, принимающую значения $-n,-n+2,...,n-2,n$. Значит, $S_{2n}/\sqrt{2n}$ будет иметь неограниченную плотность в окрестности всех точек вида $2k/\sqrt{2n}$, $|k|<2n$. Таким образом, плотности будут неограничены в окрестности, например, всякой рациональной точки (т.к. для них бесконечно часто будут находиться такие k). В этом случае не просто отсутствует сходимость плотности к нормальной, но и вообще плотность сумм ведет себя не лучшим образом.

Иным образом обстоит ситуация, когда плотность f ограничена. Будем требовать, чтобы выполнялось условие, необходимое для формулы обращения для плотностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|dt < \infty. \tag{3.2}$$

Оказывается, что этого достаточно для сходимости плотностей нормированных сумм.

Теорема 3.1.2 (Локальная предельная теорема для плотностей)**.** *При выполнении условия* (3.2)

$$f_{S_n n^{-1/2}}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad n \to \infty,$$

причём сходимость равномерна по x*.*

Для доказательства теоремы 3.1.2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1.1. *Если модуль х.ф.* $\psi_X(t)$ *обращается в* 1 *в некоторой точке* $t \neq 0$*, то случайная величина* X *решетчата, т.е. принимает значения только вида* $kh + b$ *при некоторых фиксированных* b*,* h *и всех* k*.*

Доказательство теоремы 3.1.2. Доказывая ЦПТ, мы пользовались тем, что $\psi_{S_n n^{-1/2}}(t)$ близко к $e^{-t^2/2}$, поскольку

$$\psi_{S_n n^{-1/2}}(t) = \psi^n_{X_1}(tn^{-1/2}) = e^{n \ln \psi_{X_1}(tn^{-1/2})} = e^{-\frac{t^2}{2}}(1 + o(1)),\ tn^{-1/2} \to 0,$$

так как

$$\psi_{X_1}(tn^{-1/2}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1)\frac{t^2}{n}, \quad \ln \psi_{X_1}(tn^{-1/2}) = -\frac{t^2}{2n} + o(1)\frac{t^2}{n},\ n \to \infty. \tag{3.3}$$

Давайте получим отсюда близость плотностей наших величин, пользуясь формулой обращения:

$$f_{S_n n^{-1/2}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\psi_{S_n n^{-1/2}}(t)dt,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-t^2/2}dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\psi_{S_n n^{-1/2}}(t)$ абсолютно интегрируема при любом n на всей прямой, поскольку

$$|\psi_{S_n n^{-1/2}}(t)| = |\psi_{X_1}(tn^{-1/2})^n| \leq |\psi_{X_1}(tn^{-1/2})|.$$

Отсюда

$$\left|f_{S_n n^{-1/2}}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-itx}||\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2}) - e^{-t^2/2}|dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2}) - e^{-t^2/2}|dt,$$

причем оценка равномерна по x. Докажем, что правая часть этой оценки стремится к 0 при $n \to \infty$. Разобьем интеграл на три участка: $|t| \le T$, $T \le |t| \le \delta\sqrt{n}$, $|T| > \delta\sqrt{n}$ при каких-то $\delta, T > 0$. При $|t| \le T$ мы можем утверждать, что $\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2}) - e^{-t^2/2} = o(1)e^{-t^2/2}$ при $n \to \infty$, откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} |\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2}) - e^{-t^2/2}|dt = o(1)\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-t^2/2}dt = o(1), \quad n \to \infty.$$

При $|t| > T$ будем оценивать интеграл от разности суммой интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>T} e^{-t^2/2}dt + \int_{T<|t|\le\delta\sqrt{n}} |\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2})|dt + \int_{\delta\sqrt{n}<|t|} |\psi^n_{X_1}(tn^{-1/2})|dt \tag{3.4}$$

Первый интеграл не превосходит ε при достаточно больших T, поскольку $e^{-t^2/2}$ интегрируема на прямой.

Для оценки второго интеграла воспользуемся тем, что при $|tn^{-1/2}| < \delta$

$$|Re(\ln\psi_{X_1}(tn^{-1/2}) - \frac{t^2}{2n})| \le \frac{t^2}{4n}$$

при всех достаточно малых δ в силу (3.3). Значит, второе слагаемое (3.4) не превосходит

$$\int_{|t|>T} e^{-t^2/4}dt < \varepsilon$$

при всех достаточно больших T.

В силу леммы Римана [1, с. 627-628] выражение $|\psi_{X_1}(t)|$ стремится к нулю при $t \to \infty$, откуда $|\psi_{X_1}(t)| < 1/2$ при $t > T_1$ и некотором T_1. С другой стороны, в силу леммы 3.1.1 верно $|\psi_{X_1}(t)| < 1$ при $\delta < |t| < T_1$, откуда $|\psi_{X_1}(t)| < q < 1$ при некотором q и всех $|t| > \delta$. Следовательно, третье слагаемое (3.4) не превосходит

$$\sqrt{n}\int_{|s|>\delta} |\psi_{X_1}(s)^n|ds \le q^{n-1}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{X_1}(s)|ds = o(1), \quad n \to \infty.$$

Тем самым,

$$\left| f_{S_n n^{-1/2}}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right| \le 2\varepsilon + o(1), \quad n \to \infty,$$

и в силу произвольности ε локальная предельная теорема для плотностей доказана. □

Упражнение 3.1.1. *Показать, что достаточно требовать вместо (3.2) условие*

$$\int_0^\infty |\psi_{S_n}(t)|^\nu dt < \infty$$

при некотором $\nu \ge 1$.

3.2 Асимптотические разложения

3.2.1 Асимптотическое разложение для плотностей

Предположим, что в дополнении к предположениям теоремы 3.1.2, конечен третий момент

$$\mu_3 := \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx.$$

При этом существует непрерывная ограниченная третья производная характеристической функции

$$\psi'''_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^3 e^{itx} f_{X_1}(x) dx$$

и

$$\psi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3}{6}\frac{(it)^3}{n^{3/2}} + o(1)\frac{t^3}{n^{3/2}} \tag{3.5}$$

при $tn^{-1/2} \to 0$. Соотношение (3.5) уточняет разложение (3.3), тем самым давая возможность уточнить предельную теорему для плотностей.

Теорема 3.2.1 (асимптотическое разложение для плотностей)**.** *Пусть* X_i *— н.о.р.,* $\mathsf{E}X_i = 0$*,* $\mathsf{D}X_i = 1$*,* $\mathsf{E}X_i^3 = \mu_3$ *и* $\psi_{X_1}(t)$ *интегрируема на всей прямой. Тогда*

$$f_{S_n n^{-1/2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\left(1 + \frac{\mu_3(x^3 - 3x)}{6\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Зачем нам нужно такого рода разложение? Оно позволяет измерить погрешность нормального приближения и повысить точность приближения за счет использования дополнительного члена.

3.2.2 Асимптотическое разложение для функции распределения

Теорема 3.2.2. *Для н.о.р. нерешетчатых величин* X_i*,* $\mathsf{E}X_i = 0$*,* $\mathsf{D}X_i = 1$*,* $\mathsf{E}X_i^3 = \mu_3$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\mu_3}{6\sqrt{2\pi n}}(1 - x^2)e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty.$$

Напомню, что решетчатость означает, что найдутся d*,* a*, такие что* $\mathsf{P}(X \in \{a + kd, k \in \mathbb{Z}\}) = 1$*.*

3.2.3 Неравенство Берри-Эссеена

Теорема 3.2.3. *Если* X_i *— н.о.р.,* $\mathsf{E}X_i =: \mu$*,* $\mathsf{D}X_i =: \sigma^2$*,* $\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^3 =: \rho$*, то*

$$\left|F_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) - \Phi(x)\right| \le \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где C *— некоторая константа (не зависящая от распределения* X*). Наилучшая оценка из известных на данных момент* $C = 0.4784$*.*

Глава 4

Вопросы к экзамену

1. Лемма о равносильности для вероятностных мер слабой сходимости и сходимости мер отрезков. Сходимость интегралов от непрерывных ограниченных функций как следствие слабой сходимости.

2. Слабая сходимость как следствие сходимости интегралов от непрерывных ограниченных функций.

3. Формула обращения для плотностей в случае непрерывно-дифференцируемой плотности.

4. Треугольная плотность (плотность суммы двух равномерных величин) и соответствующая характеристическая функция. Характеристическая функция, пропорциональная треугольной плотности, и соответствующая плотность.

5. Сглаживание. Последовательность абсолютно-непрерывных величин, слабо сходящаяся к данной.

6. Существенная ограниченность плотности величины с интегрируемой характеристической функцией.

7. Слабая и ослабленная сходимости, плотность последовательности мер, их связь.

8. Ослабленная сходимость как сходимость интегралов от финитных функций.

9. Теорема о сходимости относительно компактной последовательности, все частичные пределы которой совпадают.

10. Теорема Хелли.

11. Безграничная делимость обобщенного пуассоновского распределения.

12. Преобразование Колмогорова и его свойства.

13. Безграничная делимость экспоненты преобразования Колмогорова.

14. Теоремы единственности и непрерывности для преобразований Колмогорова.
15. Отсутствие нулей у характеристической функции безгранично делимого закона.
16. Однозначность разложения характеристической функции безгранично делимого закона.
17. Теореме де Финетти и представление характеристической функции безгранично делимого закона с конечной дисперсией.
18. Схема серий с ограниченными дисперсиями. Лемма сравнения.
19. Равномерность сходимости характеристических функций по любому отрезку.
20. Сходимость характеристический функций в схеме серий к безгранично делимому закону. Предельное распределение в схеме серий.
21. Теорема Пуассона для разнораспределенных индикаторов как частный случай схемы серий. Сходимость к нормальному распределению в схеме серий.
22. Преобразование Хинчина, его единственность и непрерывность.
23. Теорема непрерывности для преобразований Хинчина (без доказательства вспомогательных утверждений).
24. Представление Хинчина для безгранично делимого закона.
25. Устойчивые распределения. Устойчивость предела в схеме серий.
26. Теорема Гнеденко.
27. Локальная предельная теорема о сходимости плотностей.

Список литературы

[1] Зорич В.А. Математический анализ: в 2 ч.-4-е изд. 2002.

[2] Подкорытов А.Н. Макаров Б.М. Лекции по вещественному анализу. 2011.