Требуемые знания для сдачи кафедрального зачета по математической статистике

Обозначения: $Bern(\theta)$ – распределение Бернулли с вероятностью успеха θ, $Poiss(\theta)$ – пуассоновское распределение с параметром θ, $Geom(\theta)$ – геометрическое распределение с вероятностью успеха θ, $R[\theta_1, \theta_2]$ – равномерное распределение на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$, $\exp(\theta)$ – экспоненциальное распределение с параметром θ, $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ – нормальное распределение со средним θ_1 и дисперсией θ_2^2, $Gamma(a, b)$ – гамма-распределение с параметром формы a и параметром масштаба b, $Beta(a, b)$ – бета-распределение с параметрами a, b.

1. Оценки и их свойства. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность.

    - Компетенции: уметь доказывать несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность оценок, строить оценки обладающие данными свойствами, доказывать отсутствие несмещенности, состоятельности, асимптотической нормальности.
    - Примеры задач.
        - Существует ли несмещенная оценка для $\sin\theta$, $\theta \in (0, 1)$, по n наблюдениям $X_i \sim Bern(\theta)$.
        - Построить несмещенную оценку для $\sin\theta$, $\theta > 0$, по n наблюдениям $X_i \sim R[0, \theta]$.
        - Построить несмещенную оценку вида $c \max X_i$ по выборке $X_i \sim R[0, \theta]$, $\theta > 0$. Будет ли эта оценка состоятельной?
        - Построить несмещенную оценку вида $c \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$ для ковариации по выборке (X_i, Y_i) из независимых векторов, компоненты которых имеют конечное математическое ожидание. Будет ли эта оценка состоятельной? Асимптотически нормальной?
        - Исследовать оценку $\sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$ для $X_i \sim R[0, \theta]$, $\theta > 0$, на состоятельность и асимптотическую нормальность. Найдется ли среди данных оценок такая, которая имеет наименьшую асимптотическую дисперсию.

2. Оценки методом моментов и максимального правдоподобия.

    - Компетенции: уметь искать названные виды оценок в различных параметрических моделях.

- Примеры задач.
    - Построить ОММ для $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, $X_i \sim R[0,\theta]$, $X_i \sim \exp(\theta)$, $X_i \sim Gamma(\theta_1, \theta_2)$, $X_i \sim Beta(\theta_1, \theta_2)$;
    - Построить ОМП для $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, $X_i \sim R[0,\theta]$, $X_i \sim \exp(\theta)$, $X_i \sim Poiss(\theta)$.

3. Байесовские оценки

- Компетенции: искать апостериорную плотность и байесовскую оценку для квадратичного риска.
- Примеры задач.
    - Построить апостериорную плотность и байесовскую оценку для $X_i \sim R[0,\theta]$, $\theta \sim Beta(a,b)$.
    - Построить апостериорную плотность и байесовскую оценку для $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.
    - Построить апостериорную плотность и байесовскую оценку для $X_i \sim \exp(\theta)$, $\theta \sim \exp(\lambda)$.
    - Построить апостериорную плотность и байесовскую оценку для $X_i \sim Poiss(\theta)$, $\theta \sim Gamma(a,b)$.

4. Условное математическое ожидание, условное распределение.

- Компетенции: искать условную плотность и условное распределение, искать условное математическое математическое ожидание, пользоваться свойствами условного математического ожидания.
- Примеры задач.
    - Найти условное распределение (условную плотность) и условное математическое ожидание для $X|Y$, где а) $(X,Y) \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \Sigma)$, б) $X, Z \sim R[0,1]$ независимы, $Y = X + Z$, в) $X, Z \sim \exp(\lambda)$, $Y = X + Z$, г) $X \sim Poiss(\lambda)$, $Z \sim Poiss(\mu)$, $Y = X + Z$, д) $X \sim R[0,1]$, $Y \sim R[0, X]$.
    - Доказать, что $\mathbf{E}(X_1 | X_1 + \cdots + X_n) = \overline{X}$ для н.о.р. X_i.
    - Найти $\mathbf{E}S_\tau$, $\mathbf{D}S_\tau$, где $\tau \in \mathbb{N}$ не зависит от X_i, $\mathbf{E}\tau = a$, $\mathbf{D}\tau = b$, X_i н.о.р. с $\mathbf{E}X_1 = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
    - Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}(X|Y)$, где (X,Y) равномерно распределен на единичном круге.

5. Достаточность. Теорема Колмогорова-Блэкуэлла-Рао. Теорема о полной достаточной статистике.

   - Компетенции: искать достаточные статистики, доказывать полноту достаточной статистики, искать условное математическое ожидание оценки при условии достаточной статистики, поиск опимальной оценки.
   - Примеры задач.
     - Найти одномерную достаточную статистику в моделях а) $Bern(\theta)$, б) $Poiss(\theta)$ в) $\mathcal{N}(\theta, 1)$, г) $\mathcal{N}(0, \theta)$, д) $R[0, \theta]$.
     - Найти двумерную достаточную статистику в моделях а) $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, б) $Beta(\theta_1, \theta_2)$ в) $Gamma(\theta_1, \theta_2)$.
     - Найти полную достаточную статистику в моделях а) $Bern(\theta)$, б) $Geom(\theta)$, в) $R[0, \theta]$.
     - Найти оптимальную оценку для θ в моделях а) $Geom(\theta)$, б) $\exp(\theta)$.

6. Информация Фишера. Асимптотическое распределение оценки максимального правдоподобия.

   - Компетенции: подсчет информации и информационной матрицы Фишера, проверка регулярности модели, доказательство эффективности оценки, поиск предельного распределения оценки максимального правдоподобия.
   - Примеры задач.
     - Найти информацию Фишера для $\mathcal{N}(\theta, 1)$, $Bern(\theta)$, $Poiss(\theta)$.
     - Найти информационную матрицу выборки для а) модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, б) модели $X_i \sim Bern(\theta_1)$, $i \le k$, $X_i \sim Bern(\theta_2)$, $k < i \le n$.
     - Получить эффективные оценки в моделях а) $\mathcal{N}(0, \theta)$, б) $Poiss(\theta)$.
     - Не вычисляя ОМП в явном виде, найти ее асимптотическую дисперсию, если X_i н.о.р. $Cauchy(\theta)$

7. Доверительные интервалы. Асимптотические доверительные интервалы.

   - Компетенции: построение точного асимптотического интервала методами центральной функции и монотонного преобразования. Построение асимптотического доверительного интервала на основе асимптотически нормальной оценки методом подстановки параметра. Поиск интервалов в нормальной модели.

- Примеры задач.
  - Построить методом центральной функции доверительный интервал на основе достаточной статистики для параметра θ по выборке из н.о.р. X_i, а) $X_i \sim R[0, \theta]$, б) $X_i \sim \exp(\theta)$, в) $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.
  - Построить в моделях а) $X \sim R[0, \theta]$, б) $X \sim \exp(\theta)$ доверительный интервал методом монотонного преобразования.
  - Построить асимптотические доверительные интервалы методом подстановки оценки для параметра θ на основе n н.о.р. наблюдений X_i, где а) $X_i \sim Bern(\theta)$, б) $X_i \sim Poiss(\theta)$, в) $X_i \sim Geom(\theta)$, г) $X_i \sim \mathcal{N}(0, \theta)$.
  - Построить доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$ в модели $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$, $i \leq n$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ при неизвестном σ.

8. Проверка гипотез. Нормальная модель.

- Компетенции: определение вероятностей ошибок I и II рода, построение критерия заданного уровня значимости, использование леммы Фишера при построении критериев в нормальной модели.
- Примеры задач.
  - Найти вероятности ошибок I и II рода и функцию мощности критерия $\{X : \sum X_i > 1\}$ для $H_0 : \theta = 1/2$, $H_1 : \theta = 2/3$, а) $X_i \sim Bern(\theta)$ б) $X_i \sim Poiss(\theta)$.
  - Найти в прошлой задаче вероятности ошибок I и II рода и функцию мощности критерия с критической функцией, равной $I_{\sum X_i > 1} + 0.5 I_{\sum X_i = 1}$.
  - Построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ с а) общей альтернативой б) альтернативой $H_1 : \theta > \theta_0$, $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, где σ – неизвестный параметр.
  - Построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ с общей альтернативой $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_2, \sigma^2)$, где σ – неизвестный параметр, выборки независимы и имеют различные размеры.

9. Проверка простой гипотезы с простой альтернативой.

- Компетенции: построение критерия Неймана-Пирсона и рандомизированного критерия Неймана-Пирсона.
- Примеры задач.

- Построить наиболее мощный критерий уровня α для $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ в моделях а) $\mathcal{N}(\theta, 1)$, б) $\exp(\theta)$.
- Построить наиболее мощный критерий уровня α для $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ в моделях а) $Bern(\theta)$, б) $Geom(\theta)$. Параметр c критической функции можно выразить неявно, задав определяющие его неравенства.