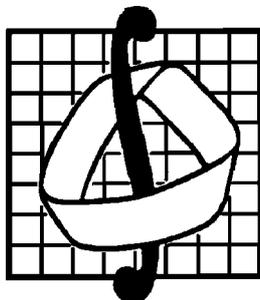


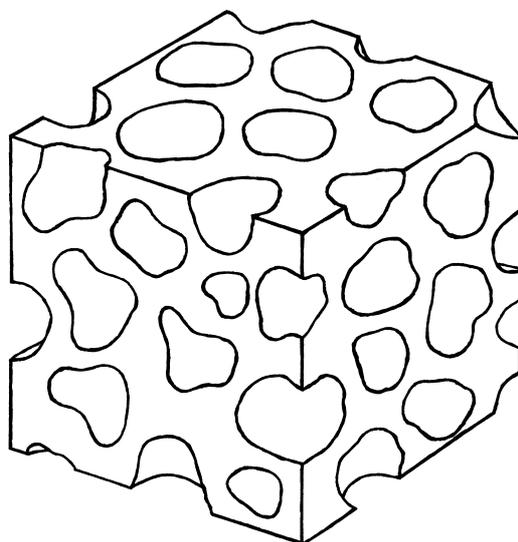
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Н.Е.ЛЕОНТЬЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ



Москва  
2009

ББК 22.25  
Л47  
УДК 532.685

Л47 Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: Учебное пособие. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. — 88 с.

Р е ц е н з е н т профессор, д.ф.-м.н. А.Н.Голубятников

Печатается по постановлению Ученого совета механико-математического факультета МГУ.

В учебном пособии содержатся материалы первой части полугодического курса лекций по теории движения жидкостей и газов в пористых средах.

Излагаются основные понятия теории однофазной фильтрации, приводится обзор законов фильтрации и вывод основных уравнений и соотношений на разрывах. Рассматриваются вопросы, связанные с фильтрацией несжимаемой жидкости (плоские задачи, гидравлическая теория безнапорных течений, аналоговое моделирование фильтрационных процессов), а также ряд моделей, учитывающих сжимаемость флюида и пористого скелета (уравнения упругого режима, уравнения изотермической и неизотермической фильтрации газа). Приводятся решения простейших задач.

Для студентов, аспирантов и преподавателей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, а также научных сотрудников, занимающихся исследованием природных процессов.

Учебное пособие подготовлено при поддержке грантов РФФИ (№ 08-01-00026, 08-01-00401) и Президента РФ (№ НШ-610.2008.1).

© Н.Е.Леонтьев, 2009

© Механико-математический факультет МГУ, 2009

# Оглавление

Предисловие . . . . .	6
Глава I. <b>Основные понятия и уравнения теории фильтрации</b> . . . . .	7
§ 1. Описание фильтрации в рамках механики сплош- ных сред . . . . .	7
Фильтрация (7). Описание фильтрации в рамках МСС (7).	
§ 2. Параметры, описывающие накопление и перенос жидкости в пористой среде . . . . .	9
Пористость (9). О введении характерного размера пор (10). Просветность (10). Об осредненных геомет- рических параметрах (11). Скорость фильтрации (11). О моделировании структуры пористой среды (13).	
§ 3. Законы сохранения массы и импульса при филь- трации в пористой среде . . . . .	13
Закон сохранения массы (14). Уравнение баланса им- пульса — закон Дарси (14). Коэффициент проницаемо- сти (16). Коэффициент фильтрации (16). Закон Дарси для анизотропных сред (17).	
§ 4. Законы фильтрации, отличные от закона Дарси .	18
Пределы применимости закона Дарси (18). Вид закона фильтрации при немалых скоростях фильтрации (18). Двучленный закон фильтрации (21). О «турбулентном» режиме фильтрации (21). Фильтрация неньютоновских жидкостей (21).	
§ 5. Вывод дифференциальных уравнений фильтрации с помощью осреднения микроскопических уравне- ний . . . . .	24
Осреднение параметров жидкости в пористой среде (24). Свойства операции осреднения (25). Осреднение ми- кроскопического уравнения неразрывности (26). Осред- нение микроскопического уравнения движения (26). Упрощение уравнения движения при малых скоро- стях (27). Осреднение микроскопического уравнения энергии (29). Упрощение уравнения энергии (30).	
§ 6. Соотношения на разрывах и типичные граничные условия . . . . .	32
Условия на разрывах (32). Непроницаемая граница (33). Граница пористой среды с чистым флюидом (34). Граница раздела фаз внутри пористой среды (34). Про-	

	межуток высачивания (35). Граница двух пористых сред (36).	
Глава II.	<b>Фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде . . . . .</b>	<b>38</b>
§ 7.	Замкнутая система уравнений и простейшие задачи Замкнутая система уравнений (38). Опыт Дарси (39). Точечный источник в пористой среде (40). Скважина, вскрывающая тонкий пласт (42).	38
§ 8.	Применение методов теории функций комплексного переменного для решения плоских фильтрационных задач . . . . . Плоскопараллельная фильтрация в вертикальной плоскости (43). Непроницаемая граница (45). Граница с водоемом (45). Поверхность депрессии (46). Поверхность высачивания (47). Непроницаемая плотина с плоским основанием на пористом слое бесконечной глубины (47). Приток к дренажной щели (50). Течения в плоскости пласта (51). Скважина в поступательном потоке (52). О сходстве и различии фильтрационных течений и потенциальных течений идеальной жидкости (53).	43
§ 9.	Гидравлическая теория безнапорной фильтрации Предположения гидравлической теории (54). Уравнение Буссинеска (55). Формулы Дюпюи для безнапорных течений (56). Строгое доказательство формулы Дюпюи для фильтрации через прямоугольную плотину (57).	54
§ 10.	Аналоговое моделирование фильтрации несжимаемой жидкости . . . . . Течение в лотке Хил-Шоу (59). Метод электрогидродинамической аналогии (62).	58
Глава III.	<b>Фильтрационные течения с учетом сжимаемости флюида и пористой среды . . . .</b>	<b>66</b>
§ 11.	Изотермическая фильтрация газа в недеформируемой пористой среде . . . . . Уравнение Лейбензона (66). Граничные условия (67). Автомодельная задача о закачке газа в пласт (68).	66
§ 12.	Фильтрация с учетом слабой сжимаемости жидкости и пористого скелета . . . . . Упругий режим фильтрации (70). Распространение волны давления в пласте (72). Пуск скважины с постоянным дебитом (73). Об экспериментальном определении	70

параметров пласта (75). О связи уравнений Лейббенсона, пьезопроводности и Лапласа (76).	
§ 13. Неизотермическая фильтрация газа в недеформируемой пористой среде . . . . .	77
Термодинамика двухпараметрических сред (77). Анализ уравнения баланса энергии (81). Процесс Джоуля — Томсона (83).	
Литература . . . . .	85

## Предисловие

Учебное пособие содержит материалы первой части полугодического курса лекций, на протяжении ряда лет читавшегося автором для студентов механико-математического факультета Московского университета, и охватывает задачи, связанные с однофазной фильтрацией (вторая часть курса посвящена некоторым специальным вопросам, в частности моделям многофазной фильтрации).

Задачей курса, помимо первоначального ознакомления слушателей с конкретными моделями движения жидкостей и газов в пористых средах, служила демонстрация подходов и методов механики сплошных сред (МСС) в применении к фильтрационным процессам. При этом основное внимание уделялось анализу физической картины изучаемых явлений, особенностям постановок задач и подчеркиванию связей как между различными фильтрационными моделями, так и с общими фактами, изучаемыми в МСС, газовой динамике и гидромеханике.

Логическая схема курса в основных чертах вписывается в круг вопросов, освещаемых в стандартных книгах и учебниках по подземной гидромеханике [1–3, 7, 17], однако в ряде мест способ изложения отличается от традиционного. Рассматриваемые модели, как правило, иллюстрируются одной-двумя несложными задачами, интересными для будущих специалистов в познавательном плане.

Автор благодарит проф. А.Н.Голубятникова, который внимательно прочитал рукопись и сделал ряд замечаний, способствовавших улучшению изложения.

# Глава I. Основные понятия и уравнения теории фильтрации

## § 1. Описание фильтрации в рамках механики сплошных сред

**Фильтрация** *Фильтрацией* называется движение (просачивание) жидкостей и газов через пористые среды под действием каких-либо факторов<sup>1)</sup>. Фильтрационные процессы широко распространены и встречаются как в повседневной жизни (движение табачного дыма в сигарете, очистка водопроводной воды в бытовом фильтре, смачивание губки для мытья посуды), так и в явлениях, влияющих на благосостояние целых государств (передвижение нефти и природного газа в подземных пластах, миграция влаги в плодородных почвах, работа технологических устройств химических предприятий).

**Описание фильтрации в рамках МСС** Вне зависимости от вызывающих фильтрацию причин, которые могут быть совершенно различными — например, перепад давлений на границе среды, действие внешних массовых сил (сила тяжести, силы инерции, электромагнитные силы) или капиллярных сил на межфазных границах, деформация пористой среды и др., — речь всегда идет о движении жидкости по сложной системе разветвленных каналов, сообщающихся между собой. Как правило, внутренняя поверхность порового пространства имеет случайную структуру и не бывает точно известна, поэтому прямое описание движения жидкости во всех подробностях оказывается невозможным. Но и даже если бы мы каким-либо образом полностью узнали внутреннюю геометрию пор, то и в этом случае практическое нахождение параметров течения в порах на основе уравнений гидродинамики все равно было бы возможным лишь в небольшом числе частных случаев (например, для искусственно созданной периодической среды).

---

<sup>1)</sup> Термин «фильтрация» также употребляется в более узком смысле как название процесса очищения жидкости или газа от примесей при течении через фильтр. В англоязычной литературе при описании этих процессов употребляется термин *filtration*, в то время как о фильтрации в широком смысле этого слова говорят обычно как о «течении жидкости через пористую среду» (*flow of a fluid through a porous medium*).

К счастью, однако, в большинстве приложений характерные линейные размеры рассматриваемых фильтрационных задач много больше характерного размера пор, а при практическом изучении фильтрационных явлений обычно интересуются осредненными характеристиками течения. Это позволяет при описании крупномасштабных явлений рассматривать пористый материал как сплошную среду, характеристики которой (плотность и давление жидкости в порах и др.) в каждой точке получаются в результате осреднения по некоторой окрестности, содержащей достаточно большое число пор<sup>1)</sup>.

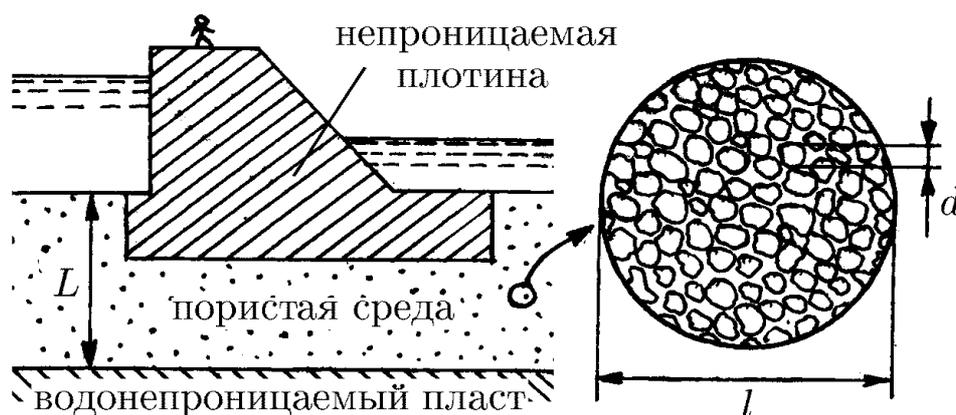


Рис. 1.

Например, при просачивании воды через песчаный пористый пласт под непроницаемой бетонной плотиной (рис. 1) характерный размер пор  $d$  (доли миллиметра) много меньше характерного размера пористого пласта  $L$  (десятки метров), поэтому мы можем перейти от описания течения на микроуровне (обтекание конкретной песчинки) к описанию на макроуровне, считая, что, например, среднее давление  $p$  жидкости в порах (в некотором месте внутри пласта в какой-то момент времени) получается осреднением давления в поровом пространстве внутри достаточно малого объема, размеры  $l$  которого будут, с одной стороны, много меньше  $L$  и, с другой стороны, много больше  $d$  (скажем, порядка десятков сантиметров):

$$d \ll l \ll L. \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Этот переход вполне аналогичен переходу от молекулярно-кинетической теории к континуальному описанию в случае, когда характерный размер явления много больше длины свободного пробега отдельной молекулы, с той лишь разницей, что в случае фильтрационных явлений описание течений на микроуровне тоже может быть осуществлено в рамках механики сплошных сред.

При этом, естественно, рассматриваемая величина (в нашем примере давление) будет, вообще говоря, некоторой функцией от координат и времени:  $p = p(x, y, z, t)$ .

## § 2. Параметры, описывающие накопление и перенос жидкости в пористой среде

**Пористость** Важной характеристикой пористой среды является *пористость* (или *порозность*)  $m$ , равная относительной объемной доле порового пространства в материале. Пористость определяет количество жидкости, которое может содержаться в некотором объеме пористой среды (если жидкость целиком заполняет внутривпоровое пространство). Если для образца однородного пористого материала объемом  $V$  объем пор составляет  $V_{\text{п}}$ , то пористость этого образца  $m = V_{\text{п}}/V$ .

Пористость, очевидно, является безразмерной величиной, значения которой лежат в интервале  $0 < m < 1$ . Для ориентировки укажем, что пористость почв лежит в диапазоне  $0,3 - 0,7$ , речного песка —  $0,3 - 0,55$ , нефтегазоносных пластов, встречающихся на практике, —  $0,1 - 0,2$ .

У некоторых пористых материалов часть пор изолирована от остального связного порового пространства или заполнена другой средой (например, при фильтрации воздуха в почве часть пор занята водой, удерживаемой в поровом пространстве за счет капиллярных сил). В подобной ситуации эти поры не участвуют в накоплении и перемещении интересующей нас жидкости внутри пористой среды, и поэтому вместо введенной выше величины (ее называют *полной* или *общей пористостью*) удобно использовать *активную* (*эффективную*) *пористость*, равную объемной доле связанных между собой пор, которые могут быть заполнены жидкостью извне. В качестве примера сред с различными полной и активной пористостями можно привести кору пробкового дерева или пористый шоколад, у которых полная пористость отлична от нуля — в этих материалах есть поры, в то время как их активная пористость равна нулю — через них жидкость фильтроваться не может.

Для неоднородных пористых сред, свойства которых могут меняться от точки к точке, пористость  $m$  будет некоторой функцией пространственных координат. Если пористая среда может деформироваться (это происходит, например, при утрамбовке

грунта или изменении давления в жидкости в порах), то величина пористости может меняться и со временем:  $m = m(x, y, z, t)$ .

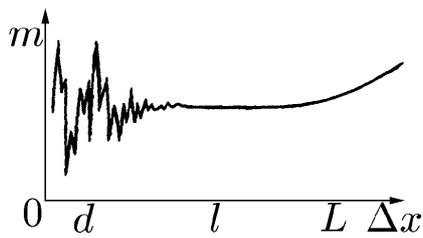


Рис. 2.

Подчеркнем, что при континуальном описании величина пористости (так же как и значения всех остальных осредненных параметров) определяется с помощью осреднения по области с размером порядка  $l$ , удовлетворяющим (1.1). Если бы осреднение проводилось по маленькой области с размером  $\Delta x \sim d$ , то значение  $m$ ,

вычисленное по формуле  $m = V_{\text{п}}/V$ , испытывало бы существенные колебания с увеличением  $\Delta x$  (качественный вид этой зависимости показан на рис. 2).

**О введении характерного размера пор**

По поводу уже упоминавшегося понятия характерного размера пор  $d$  сделаем следующее замечание. В реально встречающихся пористых средах размеры неоднородностей (размеры пор, размеры зерен) распределены случайным образом, причем часто бывают ситуации, когда плотность распределения пор по радиусам имеет даже несколько максимумов. Поэтому, строго говоря, введение характерного размера может быть произведено **н е о д н о з н а ч н о**<sup>1)</sup>, однако определение такой величины бывает удобно для проведения оценок по порядку при анализе уравнений.

**Просветность**

Если сделать мысленный поперечный разрез образца пористой среды, то в образовавшемся сечении (обозначим его площадь  $S$ ) часть площади  $S_{\text{п}}$  будет приходиться на поры, а оставшаяся часть  $S - S_{\text{п}}$  — на твердое вещество пористой среды<sup>2)</sup>. Отношение  $n$  площади пор в сечении к общей площади сечения называется *просветностью* (*поверхностной пористостью*):  $n = S_{\text{п}}/S$ .

<sup>1)</sup> В качестве характерного размера можно, например, взять величину, пропорциональную отношению объема пористого образца к площади поверхности порового пространства, или размер, соответствующий какой-либо характерной точке (медиане, точке максимума) на графике плотности распределения пор по радиусам.

<sup>2)</sup> «Каркас» пористой среды часто называют *пористым скелетом* или *матрицей*. Отметим также, что в отношении фильтрующейся среды (жидкой или газообразной) иногда применяется термин *флюид*.

Величина просветности зависит от того, через какую точку и в каком направлении проводится разрез среды, однако, что замечательно, *среднее значение* просветности для большого набора параллельных сечений какого-то фиксированного образца равно пористости этого образца. В самом деле, возьмем цилиндрический образец пористой среды с площадью основания  $S$  и высотой  $h$  (рис. 3) и осредним по высоте просветности  $n(x)$  в поперечных сечениях образца (ось  $x$  направлена вдоль образующей цилиндра). В результате для среднего значения просветности получим

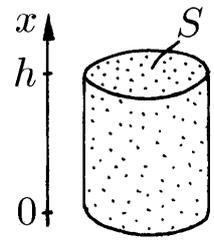


Рис. 3.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h n(x) dx = \frac{1}{Sh} \int_0^h S n(x) dx = \frac{1}{Sh} \int_0^h S_{\Pi}(x) dx = \frac{V_{\Pi}}{V} = m.$$

Доказанное свойство позволяет приближенно считать пористость и просветность равными величинами для реальных пористых сред со случайной структурой:  $m \approx n$ . Отметим также, что эта особенность лежит в основе одного из методов измерения пористости<sup>1)</sup> [7, 18].

### Об осредненных геометрических параметрах

Обратим внимание, что упоминавшиеся выше геометрические по своей природе параметры (пористость, характерный размер пор, функция распределения пор по радиусам) в общем случае не характеризуют полностью способность пористой среды пропускать через себя жидкость. Например, проницаемую для жидкости пористую среду можно превратить в непроницаемую, если ввести внутри порового пространства некоторое количество тонких перегородок, которые практически не меняют перечисленные средние характеристики, но существенно изменяют проводимость среды.

### Скорость фильтрации

Для характеристики массопереноса при фильтрации жидкости (или газа) вводится векторная величина, называемая *скоростью фильтрации*. Рассмотрим сначала простейший случай, когда жидкость движется вдоль тонкой прямолинейной трубки, заполненной пористым материалом. Для такого течения скорость фильтрации определяет-

<sup>1)</sup> Проиллюстрируем идею метода на примере из повседневной жизни: для измерения пористости куса сыра нужно нарезать его тонкими ломтиками, для каждого ломтика подсчитать долю площади, приходящейся на дырки, и вычислить среднее значение полученных величин.

ся как вектор  $\mathbf{u}$ , направленный в сторону движения жидкости, величина которого равна объемному расходу жидкости (объему жидкости, протекающей в единицу времени) в расчете на единицу площади *полного поперечного сечения* трубки (включающего как поры, так и пористую среду).

Здесь важно подчеркнуть, что хотя скорость фильтрации имеет размерность скорости, она тем не менее не равна скорости движения отдельных частиц жидкости. Действительно, если  $S$  — площадь поперечного сечения трубки,  $S_{\Pi}$  — часть площади этого сечения, приходящаяся на поры, то постоянство объемного расхода однородной несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$Q = |\mathbf{u}|S = vS_{\Pi} = \text{const},$$

где  $Q$  — объемный расход жидкости через трубку,  $v$  — среднее значение проекции скорости *частиц жидкости* на ось трубки, вычисленное по площади сечения, занимаемой порами. Отсюда получаем

$$v = \frac{|\mathbf{u}|S}{S_{\Pi}} = \frac{|\mathbf{u}|}{n} \approx \frac{|\mathbf{u}|}{m},$$

т.е. средняя скорость частиц жидкости приблизительно в  $1/m$  раз больше скорости фильтрации. Например, для речного песка с пористостью  $m = 0,3$  средняя скорость материальных частиц жидкости при их движении внутри пор превышает скорость фильтрации примерно в три раза.

В общем случае неоднородного движения жидкости в пористой среде *скорость фильтрации* определяется как вектор  $\mathbf{u}$ , проекция которого на некоторое направление равна объемному расходу жидкости через единичную площадку, перпендикулярную данному направлению. С помощью этого определения легко вычисляются объемный расход  $Q$  и массовый расход  $Q_M$  жидкости через произвольную поверхность  $\Sigma$ , проведенную внутри пористой среды:

$$Q = \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad Q_M = \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (2.1)$$

где  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  — плотность фильтрующейся жидкости,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $\Sigma$ .

Удобство использования скорости фильтрации при практических исследованиях состоит в том, что с ее помощью можно на-

ходить расход жидкости без использования информации о пористости, которая явно не входит в соотношения (2.1).

Встречающиеся в гидрологической и нефтепромысловой практике скорости фильтрации как правило имеют достаточно малые значения (порядка метров в сутки), однако в некоторых природных процессах скорости фильтрации бывают сравнительно велики (например, при нестационарной фильтрации газа, вызванной резкими изменениями давления, в породах с узкими щелями между порами скорости фильтрации могут иметь порядок метров в секунду).

**О моделировании структуры пористой среды** Несмотря на то, что поровое пространство реальных сред имеет случайную структуру, качественные (а иногда и количественные) зависимости их фильтрационных свойств от средних геометрических параметров можно получить уже на элементарных геометрических моделях, которые благодаря своей простоте выявляют «физику» происходящих процессов.

Примерами таких моделей, для которых можно получить либо аналитическое, либо численное решение, служат пористая среда, составленная из параллельных цилиндрических капилляров с некоторым распределением радиусов (рис. 4); среда, в которой происходит поперечное обтекание пучка параллельных цилиндров (модель течения в волокнистой среде); среда из периодически расположенных одинаковых частиц; разветвленная сеть цилиндрических капилляров и т.п.

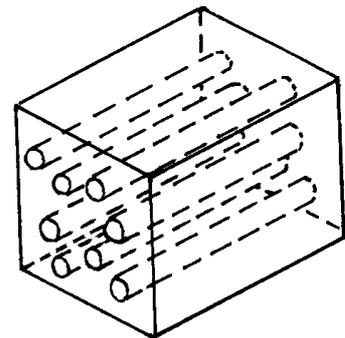


Рис. 4.

### § 3. Законы сохранения массы и импульса при фильтрации в пористой среде

Введенные в предыдущих параграфах функции от пространственных координат и времени —  $p(x^i, t)$ ,  $\rho(x^i, t)$ ,  $m(x^i, t)$  и  $\mathbf{u}(x^i, t)$ <sup>1)</sup> — заранее, вообще говоря, неизвестны и должны находиться на основе уравнений, выражающих универсальные законы сохранения, а также специальных физических закономерностей.

<sup>1)</sup> В некоторых задачах, конечно, может потребоваться введение и других параметров, например температуры жидкости, концентрации примесей в ней и т.д.

стей для конкретных изучаемых явлений (например, уравнений состояния или законов электродинамики). В простейших случаях для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений оказывается достаточным использовать только два закона сохранения — уравнения баланса массы и импульса, к феноменологическому описанию которых мы переходим.

**Закон сохранения массы** Интегральная формулировка закона сохранения массы жидкости получается из утверждения о том, что изменение массы жидкости в произвольном объеме  $V$  внутри пористой среды происходит за счет притока жидкости через границу объема  $\Sigma$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho m dV = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $\Sigma$  (из-за такого выбора нормали интеграл в правой части стоит со знаком минус), а объем  $V$  неподвижен относительно пористой среды. Если входящие в это уравнение функции являются достаточно гладкими, то в левой части можно занести производную под знак интеграла, а правую часть преобразовать с помощью теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV,$$

откуда в силу произвольности объема  $V$  получается дифференциальная запись закона сохранения массы — *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.1)$$

Если плотность жидкости постоянна, а пористая среда не деформируется (т.е. пористость зависит только от координат), то первое слагаемое обращается в ноль и уравнение неразрывности приобретает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

**Уравнение баланса импульса — закон Дарси** Исторически уравнение баланса импульса было экспериментально получено французским гидравликом Анри

Дарси (H. Darcy, 1856) для случая медленного стационарного движения несжимаемой жидкости в неподвижной изотропной пористой среде. В современных обозначениях это соотношение, называемое *законом Дарси*, для фильтрации в поле тяжести имеет вид

$$0 = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости,  $k$  — коэффициент, называемый *проницаемостью* пористой среды, который зависит от типа пористой среды. По структуре уравнение (3.3) похоже на уравнение Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости при  $\mu = \text{const}$ :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (3.4)$$

и это не удивительно: макроскопический закон движения при фильтрации в пористой среде (закон Дарси) может быть получен с помощью некоторой процедуры осреднения из уравнения движения, описывающего внутрипоровое движение жидкости на микроуровне, то есть уравнения Навье – Стокса (см. § 5). При медленных (ползущих) течениях внутри пористой среды, для которых и справедлив закон Дарси, инерционные силы много меньше вязких сил, поэтому стоящим в левой части (3.4) ускорением можно пренебречь, что даст при осреднении ноль в левой части (3.3). Наличие же последнего слагаемого в (3.4), описывающего действие вязкости, приводит при переходе к макроскопическому описанию к появлению объемной силы вязкого сопротивления, действующей на жидкость со стороны пористого скелета. В рассматриваемом случае медленных течений<sup>1)</sup> в изотропной среде сила сопротивления направлена противоположно скорости фильтрации, а ее величина прямо пропорциональна вязкости и модулю скорости фильтрации.

При  $\mathbf{g} = 0$  закон Дарси приобретает вид

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p; \quad (3.5)$$

знак минус в правой части (3.5) имеет ясный физический смысл: в отсутствие массовых сил жидкость движется в пористой среде из

---

<sup>1)</sup> Более точно — при числах Рейнольдса  $\operatorname{Re} = \rho v d / \mu \ll 1$ .

областей с бóльшим давлением в области с меньшим давлением. Если жидкость в порах покоится ( $\mathbf{u} = 0$ ), то закон Дарси превращается, как и следует, в обычное уравнение равновесия жидкости

$$0 = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g}.$$

**Коэффициент проницаемости** Коэффициент проницаемости  $k$  зависит только от свойств пористой среды (но не от свойств жидкости), и определяется, в основном, геометрией порового пространства. Он имеет размерность площади, а его величина имеет порядок квадрата характерного размера пор  $d^1$ ). Для примера укажем, что типичные значения проницаемости для песчаников имеют порядок  $10^{-15} - 10^{-12} \text{ м}^2$ , для почв —  $10^{-13} - 10^{-11} \text{ м}^2$  <sup>2)</sup>.

В практических приложениях часто в качестве единицы измерения  $k$  выбирают такую проницаемость, чтобы в отсутствие тяжести (см. (3.5)) при градиенте давления <sup>3)</sup>  $1 \text{ кгс/см}^3 \approx 1 \text{ атм/см}$  жидкость с вязкостью  $0,01 \text{ г/(см} \cdot \text{с)}$  (вязкость воды при  $20^\circ \text{C}$ ) имела скорость фильтрации  $1 \text{ см/с}$ . Эта единица проницаемости называется *дарси* (обозначение «Д»);  $1 \text{ Д} \approx 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \approx 1 \text{ мкм}^2$ .

Для неоднородных пористых сред коэффициент проницаемости является функцией пространственных координат и может меняться с течением времени (например, при деформациях пористого скелета или за счет его засорения или растворения).

**Коэффициент фильтрации** В гидротехнической практике закон Дарси обычно используется в виде уравнения, разрешенного относительно скорости фильтрации, причем вместо давления используется *пьезометрический*

<sup>1)</sup> Для зависимости проницаемости от геометрических характеристик пористой среды предлагалось большое число приближенных формул, которые основаны на различных простых моделях внутрипорового пространства [16, 18]. В качестве примера приведем часто используемую формулу Козени – Кармана (J.Kozeny, P.C.Carmen):  $k \sim \sim d^2 m^3 / (1 - m)^2$ , где характерный размер пор  $d$  вычисляется как отношение объема образца к площади поверхности пор.

<sup>2)</sup> Для сигареты  $k \sim 10^{-9} \text{ м}^2$

<sup>3)</sup> Килограмм-сила — единица силы в технической системе единиц, приближенно равная весу эталона килограмма у поверхности земли:  $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н} \approx 9,81 \text{ Н}$ .

напор (или просто напор)<sup>1)</sup>

$$H = H(x, y, z, t) = \frac{p}{\rho g} + z,$$

где  $z$  — вертикальная координата рассматриваемой точки (ось  $Oz$  направлена вверх, противоположно  $\mathbf{g}$ ). Выразив скорость фильтрации из (3.3), получим

$$\mathbf{u} = -C \operatorname{grad} H, \quad C = \frac{k \rho g}{\mu}, \quad (3.6)$$

где  $C$  — коэффициент фильтрации, зависящий, очевидно, как от свойств пористой среды, так и от свойств жидкости<sup>2)</sup>. Типичные значения  $C$  при фильтрации воды в песке имеют порядок  $10^{-5}$  —  $10^{-2}$  м/с, в почве —  $10^{-6}$  —  $10^{-4}$  м/с, в глине —  $10^{-7}$  —  $10^{-6}$  м/с.

**Закон Дарси для анизотропных сред** При фильтрации в анизотропных пористых средах (например, в осадочных слоистых пластах или в средах с трещинами, направленными в выделенном направлении) линейная зависимость скорости фильтрации и градиента давления сохраняется (для медленных течений), однако эти векторы в случае общего положения уже не будут параллельны. Проницаемость таких сред будет характеризоваться не одним числом (коэффициентом проницаемости  $k$ ), а симметричным положительно-определенным тензором проницаемости  $k_{ij}$ , входящим в закон Дарси

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} (\nabla^j p - \rho g^j).$$

Например, в слоистой среде, у которой направление, перпендикулярное плоскости напластования, задается единичным вектором  $\mathbf{n}$ , тензор проницаемости в декартовой системе координат имеет вид

$$k_{ij} = (k_{\perp} - k_{\parallel}) n_i n_j + k_{\parallel} \delta_{ij},$$

где  $k_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$  суть проницаемости при фильтрации соответственно поперек и вдоль напластования.

<sup>1)</sup> Напор имеет размерность длины и с точностью до постоянного слагаемого равен вертикальной координате свободной поверхности жидкости в измерительной скважине, пробуренной в пористый пласт, чем и объясняется удобство его использования.

<sup>2)</sup> В англоязычной литературе величину  $C$  обычно называют «гидравлической проводимостью» (*hydraulic conductivity*).

## § 4. Законы фильтрации, отличные от закона Дарси

**Пределы применимости закона Дарси** В некоторых практически важных ситуациях при фильтрации жидкостей — речь идет об однородных жидкостях, целиком заполняющих недеформируемые изотропные пористые среды — наблюдаются отступления от классического закона Дарси (3.3). Эти отклонения связаны с двумя причинами. *Первая* — это немалость скоростей движения жидкости внутри пор, т.е. невозможность пренебречь инерционными членами в микроскопических уравнениях (3.4). Такие условия, в которых неприменимо приближение Стокса, возникают, например, в прискважинных областях или при фильтрации в крупнозернистых пористых средах (фильтрация через гравий и гальку, а также через гранулированные среды в промышленных технологических установках). *Вторая* причина состоит в отличии реологических<sup>1)</sup> соотношений фильтрующейся жидкости от закона Навье – Стокса, причем неньютоновское поведение жидкостей при течении внутри порового пространства может проявляться как в узкой пристеночной области (за счет физико-химического взаимодействия жидкости со стенкой поры), так и во всем объеме жидкости (например, при фильтрации некоторых нефтей).

**Вид закона фильтрации при немалых скоростях фильтрации** Предполагая для простоты, что массовые силы отсутствуют<sup>2)</sup>, установим общий вид зависимости градиента давления от скорости фильтрации с использованием теории размерностей.

Модуль градиента давления  $|\text{grad } p|$  при стационарной фильтрации зависит, кроме модуля скорости фильтрации  $u$ , от свойств жидкости (плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$ ) и пористой среды (характерного размера пор  $d$ , пористости  $m$  и, возможно, других скалярных безразмерных параметров  $a_\alpha$ , определяющих геометрию

<sup>1)</sup> Реология — наука, изучающая связи между напряжениями и деформационными характеристиками материалов. Название науки, предложенное американским исследователем Ю.Бингамом (E.Bingham, 1920), происходит от греческого  $\rho\epsilon\omega$  — «теку», «струюсь».

<sup>2)</sup> Влияние потенциальных сил можно учесть путем переопределения давления (например, в случае фильтрации несжимаемой однородной жидкости в поле силы тяжести — с помощью введения новой переменной  $p' = p - \rho \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор).

$$|\text{grad } p| = F(u, \rho, \mu, d, m, a_\alpha),$$

и применение  $\pi$ -теоремы [6, 15] дает зависимость

$$|\text{grad } p| = \frac{\mu u}{d^2} \cdot \Phi(\text{Re}, m, a_\alpha), \quad \text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu}.$$

Что касается направления вектора  $\text{grad } p$ , то, как нетрудно видеть, он должен быть параллелен вектору  $\mathbf{u}$ . В самом деле, в прямоугольной декартовой системе координат зависимость компонент вектора  $\text{grad } p$  от компонент вектора скорости фильтрации  $\mathbf{u}$  и других определяющих параметров имеет вид

$$\nabla_k p = \varphi_k(u_j, \rho, \mu, d, m, a_\alpha),$$

причем вид функций  $\varphi_k$  не зависит от выбора системы координат. Предположим, что векторы  $\text{grad } p$  и  $\mathbf{u}$  не параллельны. Направим ось  $Ox$  вдоль вектора  $\mathbf{u}$ , так чтобы он имел только одну отличную от нуля компоненту. Тогда при повороте системы координат относительно оси  $Ox$  все аргументы функций  $\varphi_k$  останутся неизменными, в то время как компоненты вектора  $\text{grad } p$  будут изменяться, что приводит к противоречию. Отметим, что это рассуждение неявно опирается на предположение об *изотропности* пористой среды. Для *анизотропных* сред (в которых, конечно, векторы  $\mathbf{u}$  и  $\text{grad } p$  могут быть не параллельны) в число аргументов функций  $\varphi_k$  нужно дополнительно включать компоненты тензоров, характеризующих анизотропию<sup>1)</sup>.

Итак, общий вид закона фильтрации несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде можно записать так:

$$\text{grad } p = -\frac{\mu \mathbf{u}}{d^2} \Phi(\text{Re}, m, a_\alpha). \quad (4.1)$$

Зависимость  $\Phi(\text{Re})$  в двух предельных случаях — при малых и больших числах Рейнольдса — можно установить из общих соображений.

В случае *очень медленных* (ползущих) внутрипоровых течений, в которых доминируют вязкие эффекты, зависимость (4.1)

<sup>1)</sup> Например, для слоистой среды — компоненты вектора нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости напластования (см. с. 17).

не должна содержать плотность жидкости, выпадающую из уравнений вязкой жидкости в приближении Стокса. Поэтому при  $Re \ll \ll 1$  функция  $\Phi$  не должна зависеть от числа Рейнольдса, и закон фильтрации (4.1) можно записать в виде

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{u}, \quad k = \frac{d^2}{\Phi(0, m, a_\alpha)},$$

где величина  $k$ , имеющая размерность квадрата длины и зависящая только от свойств пористой среды, должна, в силу закона Дарси (3.5), совпадать с коэффициентом проницаемости.

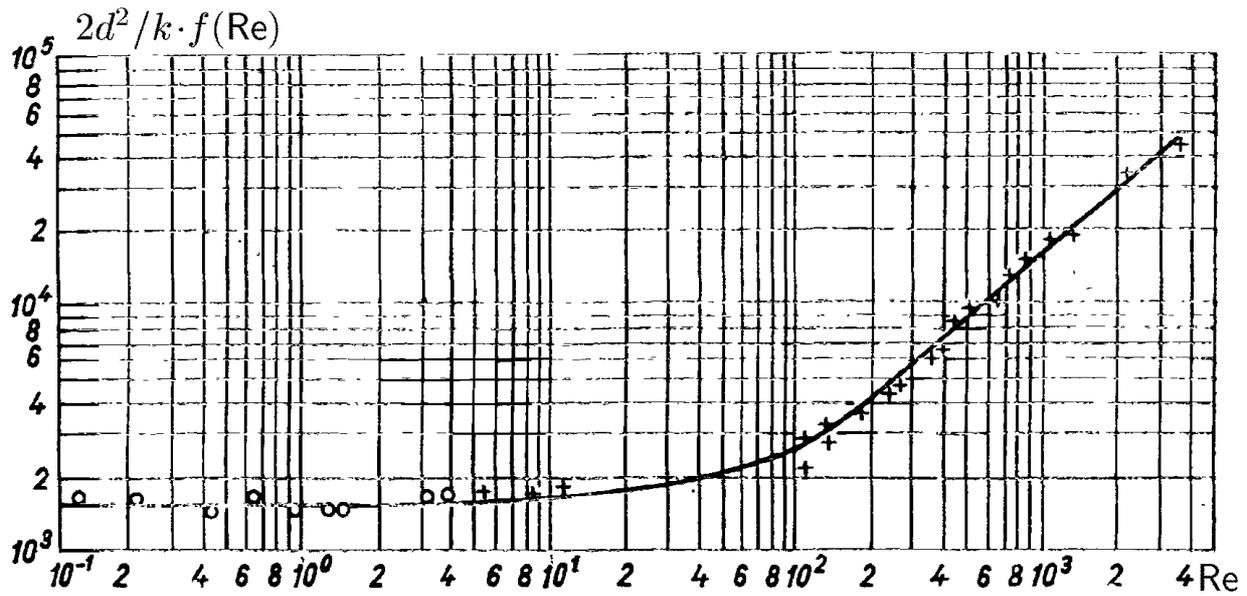


Рис. 5.

В противоположном случае *быстрых внутриспоровых течений* (при  $Re \gg 1$ ) преобладающими должны быть инерционные эффекты, поэтому зависимость градиента давления от скорости фильтрации не должна содержать в главных членах коэффициент вязкости  $\mu$ . Это дает при больших  $Re$  линейную зависимость  $\Phi(Re)$  и квадратичную зависимость  $|\text{grad } p|$  от  $u$ .

Если нормировать функцию  $\Phi(Re)$ , вводя обозначение

$$f(Re) = \Phi(Re)/\Phi(0), \quad f(0) = 1, \quad f(Re) = O(Re) \text{ при } Re \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

то закон фильтрации в принимает окончательный вид

$$0 = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} \cdot f(Re), \quad Re = \frac{\rho u d}{\mu}.$$

Пример зависимости  $f(Re)$ , полученной экспериментально для нескольких пористых сред [5], показан на рис. 5 (величина  $f$  умно-

§ 4] ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ ЗАКОНА ДАРСИ  
 жена на безразмерный коэффициент  $2d^2/k$ ; шкалы на обеих осях  
 логарифмические).

**Двучленный закон** При практических расчетах закон  $f(\text{Re})$  ча-  
**фильтрации** сто аппроксимируют линейной зависимостью,  
 удовлетворяющей требованиям (4.2):

$$f(\text{Re}) = 1 + \frac{\beta\sqrt{k}}{d}\text{Re},$$

где  $\beta$  — безразмерный параметр, зависящий от структуры пори-  
 стой среды (порядка единицы). Это дает *двучленный закон филь-*  
*трации*, называемый также *законом фильтрации Форхгеймера*  
 (P.Forchheimer, 1901):

$$0 = -\text{grad } p + \rho\mathbf{g} - \frac{\mu}{k}\mathbf{u} - \beta\frac{\rho u^2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\mathbf{u}}{u}. \quad (4.3)$$

**О «турбулентном» ре-** Как видно из рис. 5, отклонения от  
**жиме фильтрации** закона Дарси, которому соответствует  
 горизонтальный участок графика, на-  
 чинаются при  $\text{Re}$  порядка единиц (числа Рейнольдса вычисля-  
 ются по характерному размеру пор). При дальнейшем повыше-  
 нии скорости фильтрации инерцией жидкости при ее движении  
 в извилистом внутрипоровом пространстве уже нельзя пренебре-  
 гать и нужно пользоваться, например, квадратичной зависимо-  
 стью (4.3). Этот закон по своей структуре (квадратичная зави-  
 симость от скорости) похож на известную связь сопротивления  
 и скорости при развитом турбулентном движении жидкости в  
 каналах или при обтекании тел потоком. Основываясь на этой  
 формальной аналогии, иногда режим фильтрации в области при-  
 применимости закона (4.3) называют «турбулентной фильтрацией».  
 В действительности же, как показывают эксперименты, при пере-  
 ходе через границу применимости закона Дарси движение жид-  
 кости в порах остается ламинарным, а переход к турбулентно-  
 сти происходит при достаточно больших числах Рейнольдса (око-  
 ло 100 — 300).

**Фильтрация ненью-** Отклонения от закона Дарси, связанные  
**тоновских жидко-** с неньютоновскими свойствами жидкости,  
**стей** могут иметь различный характер в зависи-  
 мости от реологического поведения чистой  
 жидкости.

Ряд веществ, например растворы полимеров, при простом сдвиге — течении с полем скорости  $\mathbf{v} = (v_x(y); 0; 0)$  — имеет *степенную зависимость* касательных напряжений от скорости сдвига:

$$\tau_{xy} \sim (e_{xy})^n,$$

где  $n$  — некоторая константа<sup>1)</sup>; значение  $n = 1$  соответствует обычной ньютоновской жидкости. При течении таких сред в цилиндрическом капилляре радиуса  $R$  зависимость скорости от радиальной координаты задается степенной функцией, а связь расхода и градиента давления вдоль капилляра описывается соотношением

$$Q \sim R^{(3n+1)/n} |\text{grad } p|^{1/n},$$

переходящим при  $n = 1$  в закон Пуазейля. Если в качестве простейшей модели пористой среды рассмотреть пучок параллельных капилляров с некоторым распределением радиусов (рис. 4), то из предыдущей формулы получается *степенной закон фильтрации*

$$\mathbf{u} = -A |\text{grad } p|^{\frac{1}{n}-1} \cdot \text{grad } p, \quad A = \text{const.}$$

При фильтрации некоторых высокомолекулярных соединений становятся существенными релаксационные эффекты, проявляющиеся, например, в запаздывании изменения скорости фильтрации при изменении градиента давления и т.п. Для описания таких фильтрационных процессов часто используются различные эвристические модели, в которых между скоростью фильтрации и градиентом давления имеется не алгебраическая, а дифференциальная связь. Примером такой модели служит закон фильтрации

$$\text{grad } p + \tau_p \frac{\partial \text{grad } p}{\partial t} = -\frac{\mu}{k} \left( \mathbf{u} + \tau_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right),$$

где константы  $\tau_p$  и  $\tau_u$  имеют смысл времен релаксации давления и скорости фильтрации.

В ряде природных процессов, например при просачивании воды в мелкопористых средах или при фильтрации некоторых нефтей, течение жидкости начинается при превышении модулем градиента давления  $|\text{grad } p|$  некоторого фиксированного порогового

---

<sup>1)</sup> Например, для зубной пасты «Колгейт»  $n \approx 0,2$ , для шоколада в жидком состоянии  $n \approx 0,6$ .

значения  $G$  («предельного градиента»), а при меньших градиентах жидкость в порах покоится<sup>1)</sup>. В качестве примеров таких законов фильтрации на рис. 6 показаны экспериментальные зависимости скорости фильтрации от градиента давления для воды в глинизированном песчанике (а) и нефти в песке (б), заимствованные из [2]. Изучение особенностей подобных законов важно при разработке нефтяных месторождений, т.к. большая часть пласта приходится как раз на области малых градиентов.

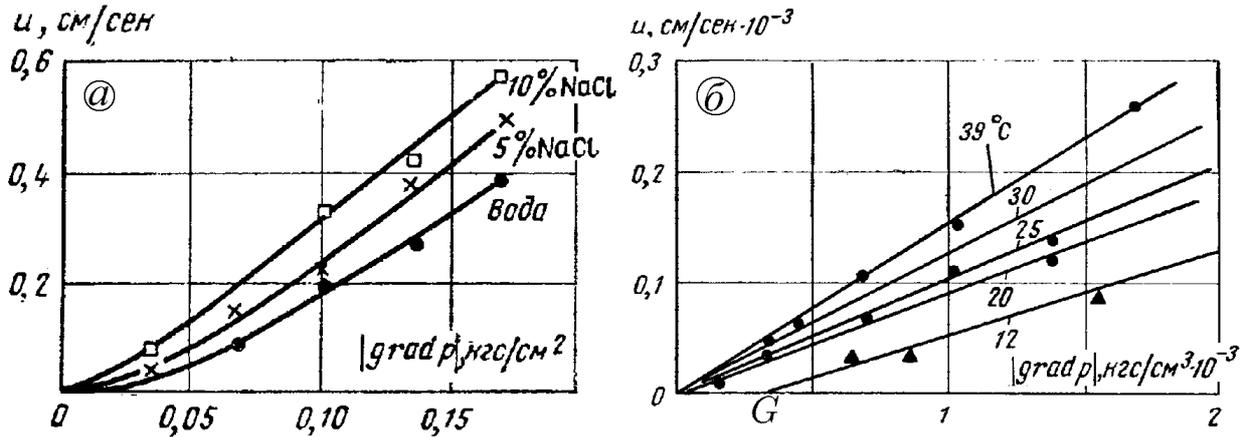


Рис. 6.

Для моделирования таких явлений часто используется закон фильтрации с предельным (начальным) градиентом

$$u = \begin{cases} -\frac{k}{\mu} (|\text{grad } p| - G) \cdot \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} & \text{при } |\text{grad } p| \geq G, \\ 0 & \text{при } |\text{grad } p| < G. \end{cases} \quad (4.4)$$

Особенностью этой модели является возможность существования застойных зон (с нулевой скоростью фильтрации), в которых давление не определено однозначно и зависит от предыстории течения.

Наличие предельного градиента легко объяснить, если предположить, что фильтрующаяся жидкость проявляет вязкопластические свойства (т.е. начинает течь лишь тогда, когда интенсивность касательных напряжений — функция от второго инварианта девиатора тензора напряжений — достигает фиксированного ненулевого значения). Например, жидкость Бингама — Шведова,

<sup>1)</sup> Отметим для сравнения, что при выполнении закона Дарси фильтрационное течение начинается при любых сколь угодно малых градиентах давления.

которая при простом сдвиге описывается соотношениями

$$e_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} (|\tau_{xy}| - \tau_0) \cdot \frac{\tau_{xy}}{|\tau_{xy}|} & \text{при } |\tau_{xy}| \geq \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\tau_{xy}| < \tau_0, \end{cases}$$

начинает движение в цилиндрическом капилляре радиуса  $R$  при превышении градиентом давления значения  $|\text{grad } p| = 2\tau_0/R$  ( $\tau_0$  — пороговое касательное напряжение)<sup>1)</sup>. При моделировании пористой среды набором параллельных каналов с различными радиусами отсюда получается закон фильтрации, качественно схожий с (4.4), причем предельный градиент определяется радиусом наибольшего капилляра.

### § 5. Вывод дифференциальных уравнений фильтрации с помощью осреднения микроскопических уравнений

Как уже говорилось, уравнения теории фильтрации могут быть получены осреднением уравнений, описывающих внутрипоровое движение жидкости на микроуровне. Эта процедура проводится следующим образом.

**Осреднение параметров жидкости в пористой среде** Предположим, что мы хотим осреднить некоторую физическую величину  $A(x^k, t)$ , определенную в жидкости (скажем, давление). Поскольку в тех областях, где жидкость отсутствует (в пористом скелете), величина  $A$ , вообще говоря, не определена, доопределим ее в этих областях нулевым значением, и вычислим в некоторый момент времени среднее значение  $A$  по сфере  $V$  некоторого фиксированного радиуса с центром в точке  $(x_0; y_0; z_0)$  (рис. 7):

$$\langle A \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V A dV,$$

где  $|V|$  — объем сферы<sup>2)</sup>. Так полученное среднее значение  $\langle A \rangle$  является непрерывной и почти всюду дифференцируемой функ-

<sup>1)</sup> Уточним, что в движение приходит пристеночный слой жидкости; в центральной части капилляра при любых, даже очень больших градиентах некоторая часть жидкости движется как твердое тело.

<sup>2)</sup> Вместо сферы можно взять объем какой-либо другой формы, например эллипсоид или параллелепипед с заданной фиксированной ориентацией относительно осей координат.

цией координат центра объема и времени:

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle (x_0, y_0, z_0, t),$$

причем  $\langle A \rangle$  будет уже определена *везде* в рассматриваемой области, даже если точка  $(x_0; y_0; z_0)$  попадает внутрь пористого скелета<sup>1)</sup>. В дальнейшем для упрощения обозначений индекс «0» при записи производных будет опускаться.

**Свойства операции осреднения**

Операция осреднения, очевидно, линейна:

$$\langle cA \rangle = c \langle A \rangle, \quad \langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle, \quad c = \text{const},$$

а среднее значение единичной функции (доопределенной нулем внутри пористого скелета) равно средней пористости той части среды, которая попадает внутрь объема  $V$ :  $\langle 1 \rangle = m$ .

В случае *недеформируемого неподвижного* пористого скелета, которым мы для простоты ограничимся, при вычислении среднего от производных справедливы равенства

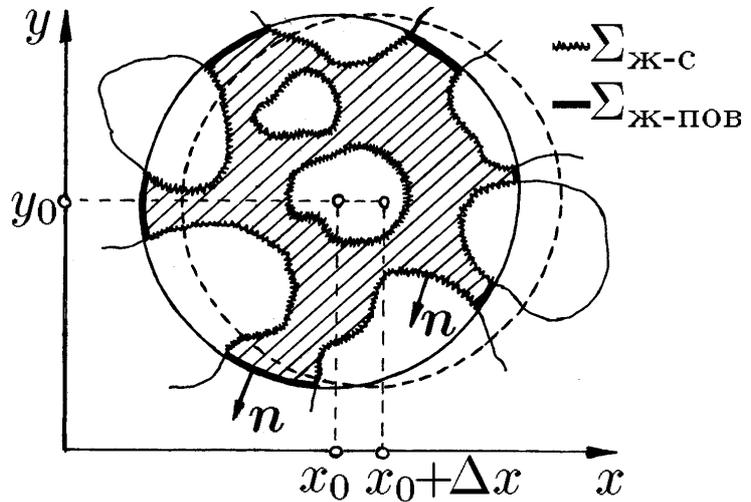


Рис. 7.

$$\left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t}, \quad \left\langle \frac{\partial A}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x^i} + \frac{1}{|V|} \int_{\Sigma_{ж-с}} A n_i d\sigma, \quad (5.1)$$

где  $\Sigma_{ж-с}$  — граница жидкости и скелета, попадающая внутрь  $V$ ,  $\mathbf{n} = (n_x; n_y; n_z)$  — вектор внешней нормали к заштрихованному на рис. 7 объему  $V_{ж}$  жидкости, находящейся внутри сферы.

Доказательство первой формулы очевидно, для доказательства второй формулы нужно заметить, что при малом смещении объема  $V$  вдоль, например, оси  $x$  на расстояние  $\Delta x$  (рис. 7) среднее значение  $A$  меняется в основном за счет того, что к объему добавляется или из него

<sup>1)</sup> Обратим внимание, что исходная величина  $A$  зависит не от  $x_0^i$ , а от  $x^i$ .

исключается тонкий слой жидкости, расположенный вдоль  $\Sigma_{\text{ж-пов}}$  — границы жидкости и поверхности сферы:

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\langle A \rangle(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - \langle A \rangle(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \frac{1}{|V|_{\Sigma_{\text{ж-пов}}}} \int An_x d\sigma.$$

Остается представить полученный интеграл по одной части границы объема  $V_{\text{ж}}$  как разность интегралов по всей границе и по  $\Sigma_{\text{ж-с}}$  — по оставшейся части, и к первому интегралу применить теорему Гаусса — Остроградского:

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} = \frac{1}{|V|_{V_{\text{ж}}}} \int \frac{\partial A}{\partial x} dV - \frac{1}{|V|_{\Sigma_{\text{ж-с}}}} \int An_x d\sigma = \frac{1}{|V|_V} \int \frac{\partial A}{\partial x} dV - \frac{1}{|V|_{\Sigma_{\text{ж-с}}}} \int An_x d\sigma.$$

Теперь с помощью (5.1) несложно получить осредненные уравнения фильтрации. Прделаем это для случая однородной *несжимаемой* ньютоновской жидкости.

**Осреднение микроскопического уравнения неразрывности** Осреднение уравнения неразрывности  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  производится очень просто:

$$\langle \nabla_i v^i \rangle = \nabla_i \langle v^i \rangle + \frac{1}{|V|_{\Sigma_{\text{ж-с}}}} \int v^i n_i d\sigma = 0,$$

откуда с учетом условия прилипания получаем выражение закона сохранения массы в терминах средних параметров:

$$\nabla_i \langle v^i \rangle \equiv \text{div } \langle \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (5.2)$$

Величина, стоящая под знаком дивергенции, есть не что иное, как скорость фильтрации:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u},$$

так что (5.2) совпадает с (3.2).

**Осреднение микроскопического уравнения движения** Для осреднения удобно взять уравнение движения в дивергентном виде

$$\rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k (v^k v^i) \right) = \nabla_k p^{ik} + \rho F^i,$$

в котором  $p^{ik}$  — компоненты тензора напряжений,  $F^i$  — компоненты вектора массовой плотности внешних объемных сил. Применяя (5.1) и учитывая условие прилипания, получим

$$\rho \left( \frac{\partial \langle v^i \rangle}{\partial t} + \nabla_k \langle v^k v^i \rangle \right) = \nabla_k \langle p^{ik} \rangle + F_{\text{с-ж}}^i + \rho \langle F^i \rangle,$$

$$F_{\text{с-ж}}^i = \frac{1}{|V|_{\Sigma_{\text{ж-с}}}} \int p^{ik} n_k d\sigma,$$

где сила  $F_{с-ж}$ , вид которой будет обсуждаться чуть позже, представляет собой *полную* силу (в расчете на единицу объема), действующую со стороны скелета на жидкость внутри объема  $V$ , т.е. включает в себя как результат действия вязких касательных напряжений, так и результат суммирования нормальных напряжений на границе жидкости и скелета. Первое слагаемое в правой части, снова с учетом условия прилипания, принимает вид

$$\begin{aligned}\nabla_k \langle p^{ik} \rangle &= \nabla_k \langle -pg^{ik} + \mu (\nabla^i v^k + \nabla^k v^i) \rangle = \\ &= -\nabla^i \langle p \rangle + \mu \cancel{\nabla_k \nabla^i \langle v^k \rangle} + \mu \nabla_k \nabla^k \langle v^i \rangle,\end{aligned}$$

где зачеркнутый член пропадает вследствие (5.2), что в результате дает

$$\rho \left( \frac{\partial \langle v^i \rangle}{\partial t} + \nabla_k \langle v^k v^i \rangle \right) = -\nabla^i \langle p \rangle + \mu \Delta \langle v^i \rangle + \rho \langle F^i \rangle + F_{с-ж}^i. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) является точным, и дальнейшее его упрощение связано с дополнительными гипотезами и оценкой входящих в него членов.

### Упрощение уравнения движения при малых скоростях

При малых скоростях течения порядок силы  $F_{с-ж}$  (в однородной среде) в можно оценить, моделируя пористую среду системой капилляров с характерным поперечным размером  $d$  или решеткой из частиц с характерным диаметром  $d$ , что дает в обоих случаях оценку

$$F_{с-ж} \sim \frac{\mu u}{d^2}.$$

Оценки порядков других членов (5.3), содержащих скорость, дают<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\rho \frac{\partial \langle v^i \rangle}{\partial t}}{F_{с-ж}} &\sim \frac{\rho d^2}{\mu \tau}, & \frac{\rho \nabla_k \langle v^k v^i \rangle}{F_{с-ж}} &\sim \frac{\rho u d}{\mu} \cdot \frac{d}{L} = \text{Re} \cdot \frac{d}{L} \ll 1, \\ \frac{\mu \Delta \langle v^i \rangle}{F_{с-ж}} &\sim \left( \frac{d}{L} \right)^2 \ll 1,\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Мы пользуемся тем, что производная  $\frac{\partial A}{\partial x}$  имеет порядок  $\delta A/L$ , где  $\delta A$  и  $L$  — характерные масштабы диапазонов изменения соответственно величины  $A$  и независимой переменной  $x$ .

где  $\tau$  — характерное время процесса. Подставив в первую оценку типичные значения определяющих параметров ( $\rho \sim 1$  г/см<sup>3</sup>,  $d \sim 10^{-3}$  см,  $\mu \sim 10^{-2}$  г/(см · с)), получим, что отношение нестационарного члена к  $F_{\text{с-ж}}$  имеет порядок  $\tau_*/\tau$ ,  $\tau_* = 10^{-4}$  с, т.е. нестационарный член нужно учитывать только в высокочастотных процессах. В результате, с учетом равенств

$$\langle p \rangle = m\rho, \quad \langle \mathbf{F} \rangle = m\mathbf{F},$$

где в правых частях (без символов осреднения) стоят средние значения  $p$  и  $\mathbf{F}$  по жидкой фазе внутри объема  $V$ <sup>1)</sup>, получается уравнение движения для медленных течений

$$0 = -\text{grad}(m\rho) + m\rho\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{с-ж}}.$$

В общем случае неоднородной пористой среды (при переменной пористости  $m(x^i)$ ) сила  $\mathbf{F}_{\text{с-ж}}$  не сводится только к силе трения, связанной с действием вязкости. Например, в отсутствие течения и массовых сил ( $\mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{F} = 0$ ) сила межфазного взаимодействия  $\mathbf{F}_{\text{с-ж}} = p \text{grad } m \neq 0$ <sup>2)</sup>.

Удобно выделить в явном виде *силу сопротивления* (в расчете на единицу объема жидкости), связанную — прямо или косвенно — с действием вязких сил и обращающуюся в ноль при  $\mathbf{u} = 0$ , и переписать уравнение движения в виде

$$0 = -\text{grad } p + \rho\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{сопр}}, \quad \mathbf{F}_{\text{сопр}} = \frac{1}{m} (\mathbf{F}_{\text{с-ж}} - p \text{grad } m). \quad (5.4)$$

Отметим, что если жидкость внутри пор покоится, то  $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = 0$  даже при отличных от нуля массовых силах, хотя, скажем, при наличии тяжести на отдельное зерно пористой среды со стороны жидкости будет действовать ненулевая выталкивающая сила Архимеда. Это связано с тем, что сила  $\mathbf{F}_{\text{с-ж}}$  вычисляется для объема  $V$ , размеры которого  $l$ , в соответствии с (1.1), много больше размера пор  $d$ , так что сила со стороны жидкости на зёрна, целиком находящиеся внутри  $V$  (рис. 7),

<sup>1)</sup> Обратим внимание, что среднее значение давления по жидкой фазе — это как раз та величина, которую покажет манометр, помещенный в жидкость внутри пор.

<sup>2)</sup> Происхождение этой силы несложно понять в частном случае, рассматривая воздействие на жидкость со стороны стенок сужающегося капилляра.

уравновешивается силой, которая действует на зерна, *пересекающие границу объема*  $V^1$ ).

В случае постоянной пористости закон (5.4) должен совпадать с законом Дарси, поэтому сила сопротивления

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\text{с-ж}} = -\frac{\mu}{k} \mathbf{u}.$$

Подчеркнем, что даже в случае постоянной пористости и при малых скоростях течения  $\mathbf{F}_{\text{сопр}}$  является, в общем случае, суммой не только касательных, но и нормальных напряжений<sup>2)</sup>.

**Осреднение микроскопического уравнения энергии**

При выводе уравнения баланса энергии кроме операции  $\langle \rangle$  осреднения величин, относящихся к жидкости, нам потребуется операция  $\langle \rangle_c$  осреднения величин, определенных внутри скелета. Она определяется таким же образом:

$$\langle A \rangle_c = \frac{1}{|V|} \int_V A dV$$

с той лишь разницей, что теперь величина  $A$  определена внутри скелета и доопределяется нулем внутри жидкости. Для осреднения по скелету выполняются равенства, аналогичные (5.1):

$$\left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c = \frac{\partial \langle A \rangle_c}{\partial t}, \quad \left\langle \frac{\partial A}{\partial x^i} \right\rangle_c = \frac{\partial \langle A \rangle_c}{\partial x^i} - \frac{1}{|V|} \int_{\Sigma_{\text{ж-с}}} A n_i d\sigma; \quad (5.5)$$

знак минус перед интегралом связан с выбором направления нормали (теперь она направлена внутрь среды, по которой производится осреднение).

Осреднение уравнения энергии для жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \nabla_k \left( \rho v^k \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right) = \\ = \rho F_k v^k + \nabla_k (p^{ik} v_i) - \nabla_k q^k + \rho Q \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Разумеется, это может быть неверно, если размеры объема  $V$  соизмеримы с размером зерен  $d$ .

<sup>2)</sup> Сравните это с теми известными фактами [8], что при ползущем течении вязкой жидкости вокруг сферы одна треть стоксовской силы сопротивления складывается из воздействия нормальных напряжений, а при обтекании тонкой пластинки, расположенной поперек потока, вообще вся сила сопротивления обязана своим происхождением нормальным напряжениям.

и уравнения энергии для скелета

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c U_c) = -\nabla_k q_c^k + \rho_c Q_c,$$

где  $U$  и  $Q$  — массовые плотности соответственно внутренней энергии и объемного притока энергии,  $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла, а индекс «с» обозначает величины, относящиеся к скелету, дает, с учетом условия прилипания, уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right\rangle + \nabla_k \left\langle \rho v^k \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right\rangle = \\ & = \langle \rho F_k v^k \rangle + \nabla_k \langle p^{ik} v_i \rangle - \nabla_k \langle q^k \rangle - \frac{1}{|V|} \int_{\Sigma_{\text{ж-с}}} q^k n_k d\sigma + \rho \langle Q \rangle, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_c U_c \rangle_c = -\nabla_k \langle q_c^k \rangle_c + \frac{1}{|V|} \int_{\Sigma_{\text{ж-с}}} q_c^k n_k d\sigma + \rho_c \langle Q_c \rangle_c, \end{aligned}$$

при сложении которых интегральные члены сокращаются (в силу условия  $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_c) \cdot \mathbf{n} = 0$  сохранения потока энергии на контактном разрыве — границе жидкости и скелета), в результате чего получается требуемое уравнение энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left\langle \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right\rangle + \langle \rho_c U_c \rangle_c \right\} + \nabla_k \left\langle \rho v^k \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right\rangle = \\ & = \langle \rho F_k v^k \rangle + \nabla_k \langle p^{ik} v_i \rangle - \nabla_k (\langle q^k \rangle + \langle q_c^k \rangle_c) + \rho \langle Q \rangle + \rho_c \langle Q_c \rangle_c. \end{aligned} \quad (5.6)$$

**Упрощение уравнения энергии** Этому уравнению можно придать более простой вид, если сделать следующие дополнительные предположения, выполняющиеся во многих практических приложениях.

- а) Кинетической энергией жидкости при движении внутри пор можно пренебречь по сравнению со внутренней энергией (в промысловых условиях  $U \sim 10^4 - 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2 \gg v^2/2$ ).
- б) Объемные притоки энергии отсутствуют:  $Q = Q_c = 0$ .
- в) Температуры жидкости и скелета можно считать одинаковыми, так как характерное время выравнивания их температур  $t_* \sim \rho c d^2 / \kappa$ , где  $c$  и  $\kappa$  — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, мало по сравнению с характерным временем фильтрационных процессов (величина  $t_*$  для песка с  $d \sim 10^{-2}$  см порядка  $10^{-1}$  с).

г) Давление и температура являются медленно меняющимися функциями пространственных координат, в то время как скорость жидкости внутри пор является быстро меняющейся функцией. Это позволяет приближенно выполнять осреднение произведений:

$$\langle pv^k \rangle \approx p \langle v^k \rangle = pu^k, \quad \langle \rho U v^k \rangle \approx \rho U \langle v^k \rangle = \rho U u^k$$

(в правых частях равенств стоят средние значения  $p$ ,  $U$  по жидкой фазе).

д) В слагаемом, содержащем компоненты тензора напряжений, при осреднении можно пренебречь тензором вязких напряжений  $\tau^{ij}$ :

$$\nabla_k \langle p^{ik} v_i \rangle = -\nabla_k \langle pv^k \rangle + \nabla_k \langle \tau^{ik} v_i \rangle \approx -\nabla_k (p \langle v^k \rangle) = -\operatorname{div}(p\mathbf{u}).$$

В самом деле,  $\tau^{ij} \sim \mu u/d$ , а порядок изменения давления  $\delta p$  (в масштабах задачи  $L$ ) оценивается с помощью закона Дарси:  $\delta p/L \sim \mu u/d^2$ , откуда  $\tau^{ij}/\delta p \sim d/L \ll 1$ . С физической точки зрения это означает, что мощность сил давления много больше мощности вязких сил при деформации жидкости.

е) Для суммарного вектора потока тепла справедлив закон теплопроводности Фурье с некоторым эффективным коэффициентом теплопроводности  $\kappa_{\text{эф}}$ :

$$\mathbf{q}_{\text{сум}} \equiv \langle \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{q}_c \rangle_c = -\kappa_{\text{эф}} \operatorname{grad} T. \quad (5.7)$$

Обратим внимание, что  $\kappa_{\text{эф}}$  в общем случае не выражается только через пористость  $m$  и коэффициенты теплопроводности жидкости  $\kappa$  и скелета  $\kappa_c$ , а зависит от внутренней структуры пористой среды [4].

После упрощений, проведенных с применением перечисленных предположений, уравнение энергии (5.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho U m + \rho_c U_c (1 - m)) + \operatorname{div}(\rho U \mathbf{u}) = \\ = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \operatorname{div}(p\mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{q}_{\text{сум}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отметим, что учет сжимаемости среды принципиально не изменит проводившихся при выводе (5.8) рассуждений, поэтому это уравнение может использоваться и для описания тепловых явлений при фильтрации газа.

§ 6. Соотношения на разрывах и типичные граничные условия

**Условия на разрывах** Связь параметров при переходе через поверхность разрыва получается, как всегда, из интегральных законов сохранения, которые при крупномасштабном описании имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho m dV &= - \int_{\Sigma} \rho u_n d\sigma, \quad 0 = - \int_{\Sigma} m p \mathbf{n} d\sigma + \int_V m \left( \rho \mathbf{F} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} \right) dV, \\ \frac{d}{dt} \int_V (\rho U m + \rho_c U_c (1 - m)) dV &= - \int_{\Sigma} ((\rho U + p) u_n + \\ &+ \mathbf{q}_{\text{сум}} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \rho Q m + \rho_c Q_c (1 - m)) dV \end{aligned} \quad (6.1)$$

для любого *неподвижного относительно пористой среды*<sup>1)</sup> объема  $V$  с границей  $\Sigma$ . Все интегральные соотношения имеют общую структуру

$$\frac{d}{dt} \int_V A dV = - \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V C dV,$$

которой соответствует условие на разрыве вида

$$[AD - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = I, \quad (6.2)$$

где, как обычно, квадратными скобками обозначается скачок величины в скобках при переходе через разрыв,  $D$  — скорость движения поверхности разрыва по нормали к ней,  $I$  — поверхностный приток, соответствующий величине  $A$ .

Условие (6.2) несложно получить с использованием равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} A dV &= \int_{V_1(t)} \frac{\partial A}{\partial t} dV - \int_{\Sigma_p(t)} A_1 D d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_{V_2(t)} A dV &= \int_{V_2(t)} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\Sigma_p(t)} A_2 D d\sigma, \end{aligned}$$

где  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  — объемы, на которые движущаяся поверхность разрыва  $\Sigma_p(t)$  делит неподвижный объем  $V$ , а индексы «1» и «2» у величины  $A$  обозначают ее предельные значения на соответствующих сторонах разрыва (рис. 8).

---

<sup>1)</sup> Пористая среда предполагается неподвижной относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Применение (6.2) к законам (6.1) дает условия сохранения массы, импульса и энергии

$$[\rho(mD - u_n)] = M, \quad [-mpr\mathbf{n}] = \mathbf{R}, \quad (6.3)$$

$$[(\rho U m + \rho_c U_c(1 - m))D - (\rho U + p)u_n - \mathbf{q}_{\text{сум}} \cdot \mathbf{n}] = E,$$

где  $M$ ,  $\mathbf{R}$  и  $E$  — дополнительные поверхностные притоки массы, импульса и энергии на разрыве, которые, вообще говоря, отличны от нуля. Например, при фильтрации воды через границу двух пористых сред с разными пористостями возникает дополнительная поверхностная сила, действующая со стороны скелета на жидкость<sup>1)</sup>, равная по модулю  $|p[m]|$  (при изотермической фильтрации из условия сохранения энергии в этой задаче следует непрерывность давления). Другим примером поверхностной силы может служить возникающая на границе двух жидкостей, находящихся в пористой среде, капиллярная разность давлений, величина которой имеет порядок  $R \sim m\sigma/d$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

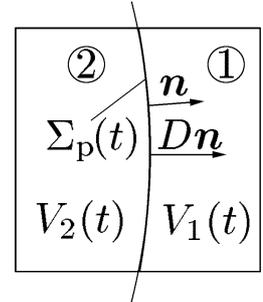


Рис. 8.

Далее мы перечислим некоторые типы граничных условий, встречающихся при решении практических задач.

**Непроницаемая граница** На границе пористой среды с непроницаемой стенкой или с другой пористой средой, проницаемостью которой можно пренебречь, ставится условие непротекания  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Примерами таких границ служат поверхности бетонных оснований гидротехнических сооружений (рис. 1) или границы песка и глины (проницаемость глины на несколько порядков меньше проницаемости песка, поэтому в гидрологических расчетах ее часто рассматривают как непроницаемый материал).

Обратим внимание, что при микроскопическом описании движения жидкости на поверхности пор ставится условие прилипания, т.е. требуется обращение в ноль как нормальной, так и касательной составляющей скорости. При осредненном описании на границе можно поставить условие только на объемный поток

<sup>1)</sup> Природу этой силы легко понять на примере модельного течения через стык двух капилляров с разными диаметрами.

жидкости через границу — он должен быть равен нулю, т.к. стенка непроницаема. Касательная же составляющая скорости фильтрации  $u_\tau$  может быть отлична от нуля — жидкость может мигрировать в пристеночном слое вдоль границы. С математической точки зрения эта разница в граничных условиях связана с тем, что микроскопическое уравнение движения (уравнение Навье — Стокса) содержит вторые производные от скорости по координатам, а макроскопическое уравнение движения (закон Дарси) зависит от скорости алгебраически.

**Граница пористой среды с чистым флюидом** Во многих задачах встречаются границы пористой среды, насыщенной жидкостью, со внешним объемом той же самой жидкости либо границы пористой среды, в которой фильтруется газ, с тем же газом в свободном состоянии. Такой границей, например, является дно водоема, через которое жидкость (вода) может просачиваться из водоема в грунт (в верхнем бьефе<sup>1</sup>) на рис. 1) или, наоборот, через которое грунтовые воды могут проникать в водоем (в нижнем бьефе на рис. 1). Для движения газа такими границами являются, например, внутренняя поверхность скважины, пробуренной в газоносный пласт, через которую газ выходит из пористой среды в ствол скважины, или, скажем, тлеющий кончик сигареты, через который табачный дым выходит в атмосферу (в последнем примере на границе осуществляется поверхностный энергоподвод).

Как правило, на таких границах ставятся условия сохранения массы  $[\rho u_n] = 0$  и непрерывности давления  $[p] = 0$  (в задачах изотермического движения несжимаемой жидкости последнее условие следует из закона сохранения энергии).

В водоемах распределение давления с глубиной практически не зависит от наличия течений, поэтому в гидротехнических задачах внешнее давление, как правило, определяется по гидростатическому закону  $p = p_{\text{атм}} + \rho gh$ , где  $h$  — вертикальное расстояние от рассматриваемой точки на дне до поверхности жидкости. В задачах фильтрации газа обычно можно считать внешние давление и плотность газа заданными постоянными величинами или функциями времени.

---

<sup>1</sup>) Бьеф (франц. bief) — часть водоема, реки или канала, примыкающая к водоподпорному сооружению (плотине, шлюзу).

**Граница раздела фаз внутри пористой среды** Если разные части пористой среды насыщены двумя разными жидкостями или жидкостью и газом, то граница между этими областями является поверхностью разрыва<sup>1)</sup>.

Например, часто при фильтрации грунтовых вод область, в которой поры целиком заполнены водой, и область, в которой поры заполнены воздухом, отделены друг от друга поверхностью, называемой *поверхностью депрессии* или *фреатической поверхностью*<sup>2)</sup> (рис. 9). В реальности эта граница представляет собой переходную зону некоторой толщины, но при рассмотрении крупномасштабных явлений, встречающихся в гидротехнической практике, эту зону можно моделировать как поверхность. Эта поверхность является свободной — до решения задачи ее форма (кроме тривиального случая горизонтальной поверхности) неизвестна, а в нестационарных задачах поверхность депрессии может менять свою форму с течением времени.

Другим примером границы двух фаз является фронт вытеснения одной жидкостью другой, движущийся внутри пористой среды (при горизонтальном вытеснении такая граница будет устойчивой, если вытесняющая жидкость более вязкая, чем вытесняемая).



Рис. 9.

При изотермической фильтрации на подвижной границе ставятся обычно общее условие сохранения массы  $[\rho(mD - u_n)] = 0$  и (в пренебрежении капиллярными силами) условие непрерывности давления  $[p] = 0$ .

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что здесь не рассматривается многофазная фильтрация (течения смесей, эмульсий, жидкостей с пузырьками газа и т.п. в пористой среде), когда характерные размеры связных областей одной фазы меньше или порядка характерного размера пор.

<sup>2)</sup> Депрессия (франц. *dépression*) — понижение уровня (грунтовых вод); фреатический (греч. *φρεαρ*, род. пад. *φρεατος* — «колодец», «источник») — относящийся к грунтовым водам.

**Промежуток высачивания**

В ряде гидротехнических задач на части границы пористой среды с атмосферой жидкость может вытекать из пористой среды и, скажем, стекать вдоль границы или испаряться. Такие участки называются *поверхностями высачивания* и встречаются, например, на стенках земляных плотин, через которые фильтруется вода, или на стенках колодцев, вырытых в водонасыщенном грунте (рис. 9).

На поверхности высачивания ставятся условия непрерывности давления (в пренебрежении капиллярными эффектами давление жидкости в пористой среде на границе совпадает с атмосферным) и положительности проекции скорости фильтрации на внешнюю нормаль  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$  (жидкость может только вытекать из пористой среды). Сама же величина скорости фильтрации на границе до решения задачи неизвестна.

**Граница двух пористых сред**

Примерами подобных границ являются поверхности раздела между расположенными рядом природными пластами с разными проницаемостями или, скажем, граница между фильтром и внешней пористой осадочной коркой, откладывающейся на его внешней поверхности при его загрязнении.

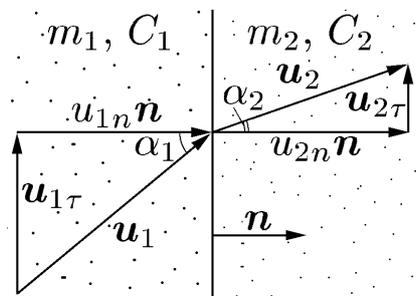


Рис. 10.

При фильтрации несжимаемой жидкости на такой границе ставятся условия непрерывности нормальной компоненты скорости фильтрации  $[u_n] = 0$  и, как уже говорилось, непрерывности давления  $[p] = 0$ . Отметим, что *касательные* составляющие скорости фильтрации  $\mathbf{u}_\tau$  по разные стороны от разрыва в общем случае отличаются (рис. 10). В самом деле, в силу условия непрерывности давления величина напора  $H$  непрерывна на разрыве, поэтому проектирование закона Дарси (3.6), записанного по обе стороны поверхности, на касательную плоскость к поверхности дает условие

$$\frac{|\mathbf{u}_{1\tau}|}{C_1} = \frac{|\mathbf{u}_{2\tau}|}{C_2},$$

т.е. касательные составляющие скорости фильтрации относятся как коэффициенты фильтрации. Отсюда, с учетом условия  $[u_n] =$

$= 0$ , получается соотношение на углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые образуют векторы скорости фильтрации с вектором нормали:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{C_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{C_2}.$$

Подчеркнем, что в общем случае (например, при фильтрации газа через границу двух сред с разными пористостями, когда внутрипоровые скорости движения частиц газа велики) скачок давления на границе может быть отличен от нуля и должен определяться из дополнительных соотношений<sup>1)</sup>).

---

<sup>1)</sup> Аналогичная ситуация встречается, например, при течении газа в трубе с внезапным расширением или при протекании газа через перфорированные перегородки.

## Глава II. Фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде

### § 7. Замкнутая система уравнений и простейшие задачи

**Замкнутая система уравнений** Полная система уравнений, описывающих *стационарную* фильтрацию однородной несжимаемой жидкости в однородной изотропной пористой среде, состоит из уравнения неразрывности и закона фильтрации:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad 0 = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{F} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u}. \quad (7.1)$$

Это система четырех скалярных уравнений относительно четырех неизвестных (давления  $p$  и трех компонент скорости фильтрации  $\mathbf{u}$ ). Если рассматривается фильтрация в однородном поле тяжести, то закон Дарси удобно использовать в форме (3.6), инвариантная запись которой имеет вид

$$\mathbf{u} = -C \operatorname{grad} H, \quad C = \frac{k\rho g}{\mu}, \quad H = \frac{p}{\rho g} - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (7.2)$$

После подстановки (7.2) в уравнение неразрывности получается уравнение Лапласа относительно напора  $H$ <sup>1)</sup>:

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (7.3)$$

к решению которого при заданных граничных условиях и сводится задача. После нахождения  $H(x, y, z)$  поле скоростей находится с помощью закона Дарси (7.2).

Система (7.1) годится и для описания *нестационарной* фильтрации. При этом зависимость от времени может учитываться как через параметры, входящие в закон фильтрации (скажем, внешние массовые силы могут зависеть от времени, например при исследовании пористого образца на центрифуге), так и через граничные условия (примеры: повышение давления на дне при поднятии уровня воды в реке во время половодья; растекание «бугра» грунтовых вод, образовавшегося после дождя, когда нестационарность проявляется в изменении формы свободной поверхности).

---

<sup>1)</sup> В частном случае отсутствия тяжести — к уравнению Лапласа относительно давления.

Фильтрация в *анизотропной* среде с постоянным тензором проницаемости в ряде случаев также может быть сведена к решению уравнения (7.3) за счет выбора прямоугольной системы координат, в которой матрица  $(k_{ij})$  диагонализуется, и изменения линейных масштабов по осям координат. При этом граничные условия также преобразуются соответствующим образом.

Приведем несколько простейших задач, решаемых с помощью приведенной модели.

**Опыт Дарси** Для экспериментального определения проницаемости пористой среды можно использовать установку (рис. 11), в которой жидкость под действием силы тяжести просачивается через находящийся в вертикальном канале слой пористого материала<sup>1)</sup>. Пористый образец удерживается снизу сеткой, которая не мешает жидкости высачиваться на нижней поверхности образца и стекать в емкость под установкой.

Для простоты будем считать величину внешнего атмосферного давления равной нулю, поскольку добавление произвольной константы к напору не меняет поля скорости фильтрации. Пусть высота пористого образца равна  $d$ , а свободный уровень жидкости в верхней части установки поддерживается на постоянной высоте  $h$  относительно нижней поверхности образца (жидкость все время долива-ется из крана, находящегося над установкой, а в боковой стенке установки имеется слив, не позволяющий уровню жидкости подняться выше  $h$ ).

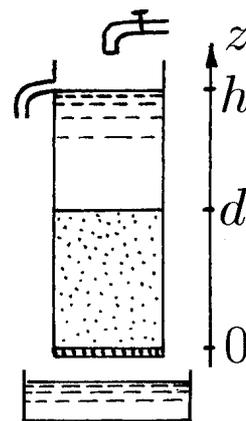


Рис. 11.

Выбрав начало координат в плоскости нижнего основания образца и направив ось  $z$  вертикально вверх, получим задачу о нахождении решения уравнения Лапласа (7.3) в области, занятой пористым образцом, со следующими граничными условиями: условие непротекания на непроницаемых боковых стенках

$$\text{grad } H \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0,$$

постоянство напора на нижней поверхности (поверхности высачивания)

<sup>1)</sup> Классические опыты Дарси проводились на установке именно с такой схемой.

чивания)

$$H|_{z=0} = \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

постоянство напора на верхней поверхности (границе жидкости и пористой среды)

$$H|_{z=d} = \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \Big|_{z=d} = \frac{\rho g(h-d)}{\rho g} + d = h.$$

Решением этой краевой задачи является линейная функция  $H(z) = hz/d$ , а распределения скорости фильтрации и давления имеют вид

$$\mathbf{u} = -C \operatorname{grad} H = (0; 0; -Ch/d), \quad p(z) = \frac{\rho g(h-d)}{d} z.$$

Таким образом, в этой задаче скорость фильтрации постоянна во всех точках пористого образца и направлена вертикально вниз, а давление жидкости изменяется вдоль образца по линейному закону.

При  $h \rightarrow d$  из этого решения следует *физический смысл* коэффициента фильтрации: если толщина слоя жидкости мала по сравнению с высотой образца и фильтрация происходит в основном за счет действия силы тяжести, то величина скорости фильтрации приближенно равна  $C^1$ ).

**Точечный источник в пористой среде**

Предположим, что в некоторую точку пористого пласта, находящуюся вдали от границ пласта, пробурена скважина, через конец которой закачивается (или выкачивается) несжимаемая жидкость с объемным расходом  $Q$  (рис. 12). На расстояниях, много больших толщины скважины, возникающее течение можно рассматривать как сферически симметричное течение от точечного источника. Распределение напора  $H(r)$ , где  $r$  — расстояние

---

<sup>1)</sup> Пример из повседневной жизни: при просачивании в сухой грунт воды из лужи под ней расширяется область смоченной пористой среды, ниже которой находится сухой грунт с атмосферным давлением в порах. Через некоторое время вертикальные размеры смоченной области становятся много больше глубины лужи и скорость фильтрации из нее, если воспользоваться приведенным решением для грубых прикидочных оценок, будет порядка коэффициента фильтрации грунта.

до источника, определяется из уравнения Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dH}{dr} \right) = 0$$

и имеет вид  $H(r) = A/r + \text{const}$ , где постоянная  $A$  определяется расходом  $Q$ , одинаковым для любой сферы радиуса  $R$ :

$$Q = 4\pi R^2 u|_{r=R} = 4\pi R^2 \left( -C \frac{dH}{dr} \right) \Big|_{r=R} = 4\pi A,$$

что дает

$$H(r) = \frac{Q}{4\pi C} \frac{1}{r} + \text{const}. \quad (7.4)$$

Значение  $Q > 0$  соответствует источнику (закачке жидкости в пласт), значение  $Q < 0$  — стоку (выкачиванию жидкости из пласта). При приближении к источнику (при  $r \rightarrow 0$ ) скорость фильтрации стремится к бесконечности, поэтому при практическом применении эту формулу нужно использовать начиная с расстояний, соизмеримых с реальным размером источника (например, толщиной скважины).

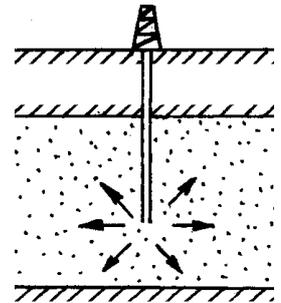


Рис. 12.

С помощью (7.4) легко найти выражение расхода  $Q$  через значения напора  $H(r_1)$  и  $H(r_2)$  в двух точках пласта на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от источника:

$$Q = 4\pi C \frac{H(r_2) - H(r_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}},$$

которое удобно использовать на практике.

Обратим внимание, что в окрестности скважины значения скорости фильтрации могут быть настолько большими, что вместо закона Дарси нужно использовать, например, двучленный закон фильтрации (4.3), который в терминах напора в сферически симметричном случае имеет вид

$$-C \frac{dH}{dr} = u + \frac{\beta \rho \sqrt{k}}{\mu} u^2.$$

Зависимость  $H(r)$  в этом случае легко находится после подстановки в последнее уравнение распределения скорости фильтрации

$$u(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

**Скважина, вскрывающая тонкий пласт** Находящиеся в недрах земли жидкие и газообразные полезные ископаемые как правило сосредоточены в тонких пластах, окруженных сверху и снизу менее проницаемыми породами. Например, толщины нефтяных пластов, залегающих на разных глубинах, имеют обычно порядок метров или десятков метров, в то время как их горизонтальная протяженность может составлять километры. Поэтому течение вокруг работающей скважины, целиком вскрывающей тонкий однородный продуктивный пласт (рис. 13), можно приближенно рассматривать как одномерное осесимметричное (при условии, конечно, что скважина находится на большом расстоянии от других скважин и контура пласта).

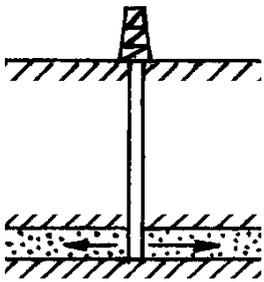


Рис. 13.

В случае работы скважины с постоянным погонным (на единицу толщины пласта) расходом  $Q$  распределение напора находится из уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dH}{dr} \right) = 0$$

с условием

$$Q = 2\pi R u|_{r=R} = -2\pi RC \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=R}$$

при любом  $r = R$ , что дает

$$H(r) = -\frac{Q}{2\pi C} \ln \frac{r}{r_0}, \quad r_0 = \text{const.}$$

Как и в случае точечного источника, расход выражается через значения напора в двух точках на разных расстояниях от скважины:

$$Q = -2\pi C \frac{H(r_2) - H(r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (7.5)$$

Это соотношение называется *формулой Дюпюи* (J. Dupuit, 1863) для напорного притока к совершенной скважине<sup>1)</sup>.

Поясним название этой формулы. *Безнапорной фильтрацией* называется фильтрация с образованием свободной поверхности (поверхности депрессии), в противном случае говорят о *напорной фильтрации*.

Скважина называется *совершенной*, если она целиком вскрывает пласт и флюид может перетекать в скважину (из скважины) через всю ее боковую поверхность, находящуюся в пласте. Если же скважина проникает в пласт не полностью либо не вся ее боковая поверхность, находящаяся в пласте, является проницаемой, то она называется *несовершенной*. Несовершенство скважины обычно делает течение в непосредственной близости от нее неоднородным.

Обратим внимание на то, что в приведенном решении напор (а следовательно, давление) обращается в бесконечность не только в окрестности скважины, как это было в задаче о точечном источнике, но и на бесконечности, что, однако, не мешает практическому применению решения к реальным геологическим объектам с конечными размерами.

## § 8. Применение методов теории функций комплексного переменного для решения плоских фильтрационных задач

Во многих практически важных случаях фильтрационные течения можно приближенно рассматривать как *плоскопараллельные*, что дает возможность перейти от трехмерной задачи к двумерной и позволяет, как и в случае плоских течений идеальной несжимаемой жидкости, эффективно использовать аппарат теории функций комплексного переменного.

Типичный пример таких явлений — движение жидкости в поперечных сечениях протяженных объектов: фильтрация под плотинами гидроэлектростанций и другими гидротехническими сооружениями (рис. 1), просачивание жидкости через земляные плотины (рис. 9 а), отток жидкости через дно рек и каналов и т.п. Другим важным примером явлений, в которых применима модель плоскопараллельного течения, служит фильтрация в горизонтальных пластах в недрах земли. Образно выражаясь, в первом случае фильтрационное течение рассматривается при взгляде «сбоку», а во втором случае — при взгляде «сверху».

---

<sup>1)</sup> Другая формула, носящая имя этого ученого, встретится в § 9.

**Плоскопараллельная  
фильтрация в верти-  
кальной плоскости**

Рассмотрим плоское фильтрационное течение тяжелой несжимаемой жидкости в вертикальном поперечном сечении *однородной* пористой среды. Направив оси  $x$  и  $y$  соответственно горизонтально и вертикально, можно записать систему уравнений в виде

$$\Delta\varphi(x, y) = 0, \quad \mathbf{u} = (u(x, y); v(x, y)) = \text{grad } \varphi,$$

где введен *потенциал скорости фильтрации*

$$\varphi(x, y) \equiv -CH = -C \left( \frac{p(x, y)}{\rho g} + y \right), \quad C = \text{const.} \quad (8.1)$$

Задача свелась к нахождению решения двумерного уравнения Лапласа, поэтому удобно рассматривать плоскость  $Oxy$  как плоскость комплексного переменного  $z = x + iy$ , а потенциал  $\varphi$  — как действительную часть *комплексного потенциала течения* — аналитической функции  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где  $\psi(x, y)$  — *функция тока*, удовлетворяющая уравнениям Коши — Римана (Д’Аламбера — Эйлера) [9]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Задание комплексного потенциала полностью определяет фильтрационное течение, т.к. зная  $w(z)$  можно найти распределение давления из (8.1) и распределение скорости фильтрации с помощью формулы  $\frac{dw}{dz} = v - iu$ , поэтому решение конкретной краевой задачи сводится к нахождению функции  $w(z)$ , удовлетворяющей заданным краевым условиям на границах области течения (известных или неизвестных).

Основная идея применения методов комплексного анализа при нахождении функции  $w(z)$  состоит в том, что по известным условиям на границе области (в физической плоскости  $z$ ) можно сразу сказать, каким условиям будет удовлетворять образ границы при отображениях  $w(z)$ ,  $\frac{dw(z)}{dz}$  или каких-то других (например, в зависимости от типа границы, указать значение мнимой части  $w(z)$  или найти связь действительной и мнимой частей  $\frac{dw(z)}{dz}$ ). Основываясь на этой информации можно построить конформное отображение области течения на какой-либо из ее образов или (если

область течения заранее неизвестна) найти отображение одного образа на другой. Это конформное отображение дает либо сразу искомую функцию (если область в плоскости  $z$  отображается на плоскость  $w$ ), либо обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого находится  $w(z)$ .

Покажем, к каким условиям на  $w(z)$  и  $\frac{dw(z)}{dz}$  приводят физические требования на некоторых типах границ, обсуждавшихся в § 6.

**Непроницаемая граница** На непроницаемой границе, так же как и в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости, постоянна мнимая часть комплексного потенциала:  $\text{Im } w = \psi = \text{const}$ . Значение константы на конкретной поверхности может либо определяться из условия задачи<sup>1)</sup>, либо находиться из решения. В силу того, что функция тока определена с точностью до константы (физический смысл имеют ее пространственные производные), значение  $\psi$  в одной точке можно задать произвольно.

Если участок границы является *прямолинейным*, то вектор скорости фильтрации направлен вдоль границы. Поэтому в плоскости годографа<sup>2)</sup> этой границе соответствует прямая, проходящая через начало координат и параллельная<sup>3)</sup> границе.

**Граница с водоемом** На границах этого типа значение напора  $H$ , а следовательно, и потенциала  $\varphi$ , является постоянной величиной. Действительно, если свободная поверхность жидкости в водоеме имеет вертикальную координату  $y = h$ , то в любой точке внутри водоема, в том числе и на границе с пористой средой,

$$H(x, y) = \frac{p_{\text{атм}} + \rho g(h - y)}{\rho g} + y = p_{\text{атм}} + \rho g h = \text{const}.$$

Постоянство  $\varphi$  на границе приводит, вследствие закона Дарси,

<sup>1)</sup> Напомним, что разность значений функции тока в двух точках (внутри односвязной области) равна расходу жидкости через любую кривую, соединяющую точки.

<sup>2)</sup> Годограф (греч. *одос* — «путь», «движение», *γραφω* — «пищу») — геометрическое место концов векторов скорости, откладываемых от начала координат. Плоскость годографа  $(u; v)$  получается из плоскости  $\frac{dw}{dz} = (u; -v)$  отражением относительно горизонтальной оси.

<sup>3)</sup> Если считать совпадающими ориентации осей координатных систем  $(x; y)$  и  $(u; v)$ .

к тому, что вектор скорости фильтрации перпендикулярен границе (т.к. его касательная составляющая равна нулю). Поэтому *прямолинейной* границе этого типа на плоскости годографа соответствует прямая, проходящая через начало координат и перпендикулярная направлению границы.

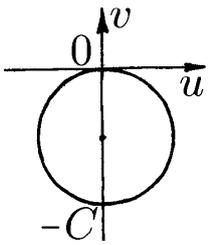
**Поверхность депрессии** В случае *стационарной* фильтрации поверхность депрессии является линией тока, и на ней функция тока постоянна:  $\psi = \text{const}$ <sup>1)</sup>.

Уравнение образа свободной поверхности на плоскости годографа проще всего получить с помощью условия  $u_n = mD$ , отвечающего сохранению массы на разрыве. Если граница задается уравнением  $f(x, y, t) = 0$ , то это условие дает

$$\frac{\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } f}{|\text{grad } f|} = -m \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad } f|}, \quad \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

или

$$m \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad } f \cdot \text{grad } \varphi = 0.$$



Воспользовавшись постоянством давления на свободной поверхности и определением потенциала (8.1), можно написать уравнение свободной поверхности в виде

Рис. 14.

$$f(x, y, t) \equiv \varphi(x, y, t) + Cy + \text{const} = 0,$$

подстановка которого в предыдущее уравнение дает условие на границе в нестационарном случае

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда при стационарной фильтрации на плоскости годографа получаем окружность радиуса  $C/2$ , проходящую через начало координат (рис. 14):

$$u^2 + v^2 + Cv = 0.$$

<sup>1)</sup> В *нестационарном* случае, когда скорость границы  $D$  отлична от нуля, функция тока переменна вдоль границы: из условия на разрыве  $mD = u_n = \pm \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} \right) = \pm \frac{d\psi}{ds}$ , где  $s$  — длина дуги вдоль границы (знак перед производной зависит от выбора направления вдоль границы и знака  $D$ ).

**Поверхность высачивания**

Для поверхности высачивания написать условие на потенциал  $w$ , не содержащее координат  $x, y$ , не удастся, а в плоскости годографа образ границы можно построить в случае *прямолинейной* границы. Умножая закон Дарси

$$\mathbf{u} = -C \operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho g} + y \right)$$

на касательный вектор к границе  $\boldsymbol{\tau}$ , получим, учитывая постоянство давления вдоль границы,

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = -C \tau_y = \text{const},$$

т.е. на плоскости  $(u; v)$  концы вектора скорости лежат на прямой, перпендикулярной границе, но не проходящей, вообще говоря, через начало координат.

Приведем теперь примеры решения простейших задач.

**Непроницаемая плотина с плоским основанием на пористом слое бесконечной глубины**

Рассмотрим стационарную фильтрацию жидкости через слой пористого материала, на котором находится непроницаемая плотина с плоским основанием длиной  $2l$ . Выберем начало координат в середине основания плотины (см. рис. 15) и будем считать, что уровни жидкости  $h_1$  и  $h_2$  соответственно в нижнем и верхнем бьефах постоянны, а пористый слой простирается вниз до бесконечности.

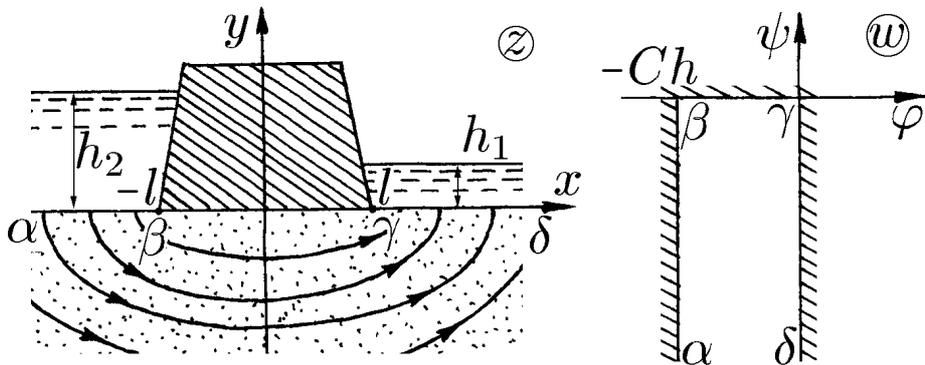


Рис. 15.

В этой задаче область течения в плоскости комплексного потенциала  $w$  полностью определена и является полубесконечной полосой: на непроницаемом основании плотины  $\beta\gamma$  постоянна функция тока  $\psi$ , которую можно положить равной нулю, а на дне

каждого из водоемов потенциалы скорости фильтрации  $\varphi$  принимают постоянные значения. Если значение  $\varphi$  на дне  $\gamma\delta$  в нижнем бьефе принять равным нулю (добавление константы к  $\varphi$  не меняет скорости фильтрации), то на дне  $\alpha\beta$  в верхнем бьефе  $\varphi = -C(h_2 - h_1) = -Ch$ ,  $h = h_2 - h_1$ .

Бесконечность функции тока при уходе на бесконечность (или, что то же самое, бесконечность расхода жидкости  $Q$  в расчете на единицу длины плотины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) следует уже из соображений размерности: предположение о конечности  $Q$  приводит, после применения  $\pi$ -теоремы к зависимости  $Q = f(Ch, l)$ , к тому, что расход не зависит от размера плотины  $l$ :  $Q = \text{const} \cdot Ch$ , но при стремлении ширины плотины к нулю ( $l \rightarrow 0$  при сохранении высоты плотины) решением задачи является вихрь  $\varphi = \frac{Ch}{\pi}\theta$ , где  $\theta$  — полярный угол, с бесконечным расходом, что и приводит к противоречию. Отметим, что если бы пористый пласт ограничивался снизу горизонтальной непроницаемой поверхностью, расположенной на конечной глубине, то в этом случае расход был бы конечным.

Если теперь нам удастся построить (какое-нибудь) конформное отображение нижней полуплоскости в физической плоскости  $z$  на полуполосу в плоскости  $w$ , переводящее точки  $\beta$ ,  $\gamma$  и бесконечно удаленную точку  $\alpha = \delta$  на плоскости  $z$  в их соответствующие образы на плоскости  $w$ , то такое отображение и будет искомым, т.к. в комплексном анализе доказывается теорема о существовании и единственности конформного отображения области на область, переводящего любые три заданные граничные точки в любые три заданные граничные точки с сохранением порядка их обхода [9].

Несложно проверить, что требуемое отображение имеет вид

$$z = l \cos \left( \frac{\pi}{Ch} w(z) \right). \quad (8.2)$$

Дифференцируя это соотношение и выражая производную  $\frac{dw}{dz}$ , получим комплексно-сопряженную скорость

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = -\frac{Ch}{\pi l} \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{Ch} w(z) \right)} = -\frac{Ch}{\pi l} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2/l^2}},$$

причем выбирается та ветвь квадратного корня, которая при  $z = 0$  дает положительную скорость  $u = Ch/(\pi l) > 0$ . В частности,

распределение скорости вдоль основания плотины имеет вид

$$u(x) = \frac{Ch}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad -l < x < l,$$

на дне водоемов скорость фильтрации вертикальна:

$$v(x) = \pm \frac{Ch}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - l^2}}, \quad |x| > l,$$

(знаки «+» и «-» соответствуют нижнему и верхнему бьефам).

Обратим внимание, что в угловых точках основания направление скорости фильтрации меняется на  $90^\circ$ , а модуль скорости фильтрации стремится к бесконечности (как это бывает при обтекании углов в гидродинамике идеальной жидкости). В реальности, конечно, в силу разных причин (скругление углов дугами с конечными радиусами кривизны, отступление от закона Дарси, размытие грунта в области больших скоростей) скорости фильтрации в этих местах конечны.

Разделяя действительную и мнимую часть (8.2)<sup>1)</sup>:

$$x = l \cos \tilde{\varphi} \operatorname{ch} \tilde{\psi}, \quad y = -l \sin \tilde{\varphi} \operatorname{sh} \tilde{\psi}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\pi\varphi}{Ch}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\pi\psi}{Ch}$$

и исключая  $\varphi$ , легко найти уравнение линий тока поля скорости фильтрации, которым соответствует постоянное значение  $\psi$ , — эллипсов

$$\left( \frac{x/l}{\operatorname{ch} \tilde{\psi}} \right)^2 + \left( \frac{y/l}{\operatorname{sh} \tilde{\psi}} \right)^2 = 1.$$

Отметим, что реальные плотины являются сложными гидротехническими сооружениями, от основной подводной части которых отходят водонепроницаемые перегородки, идущие вдоль дна (так называемый *пону́р*) или в глубину пласта (*шпунтовые стенки*) и предназначенные для уменьшения скорости фильтрации под плотиной, ее закрепления в грунте и т.д.

Качественно уменьшение скорости фильтрации можно объяснить тем,

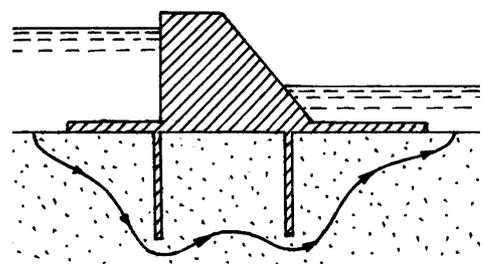


Рис. 16.

<sup>1)</sup> Напомним, что  $\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ .

что жидкие частицы при своем движении вокруг выступов в подземной части плотины преодолевают больший путь, в то время как перепад напоров между начальной и конечной точками движения частиц остается неизменным (рис. 16).

**Приток к дренажной щели**

Приведем пример задачи с неизвестной свободной поверхностью. Рассмотрим безнапорный приток воды к полуму горизонтальному каналу — дрене<sup>1)</sup>, который сделан в непроницаемом основании пористого пласта (часть поперечного сечения канала показана на рис. 17).

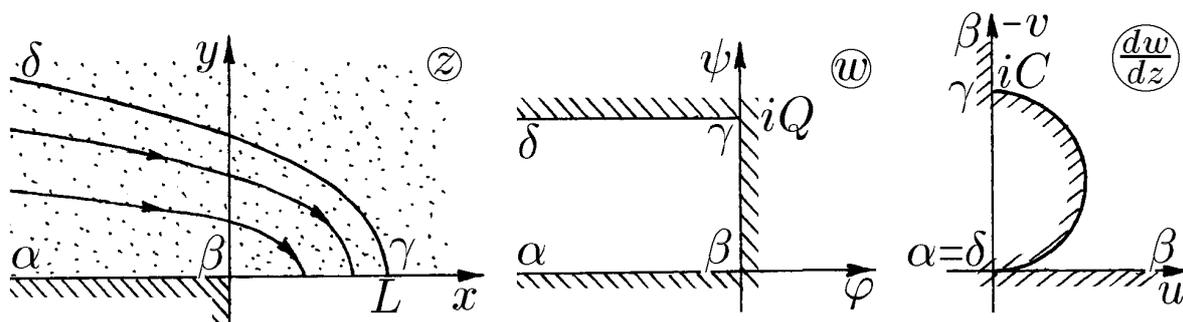


Рис. 17.

Будем предполагать для простоты, что поток жидкости приходит из бесконечности, где высота поверхности депрессии стремится к бесконечности, а скорость фильтрации стремится к нулю, так что суммарный расход жидкости, фильтрующейся в пористой среде слева направо и собирающейся в полости дренажного канала, известен и равен конечной величине  $Q$ . Форма свободной поверхности на плоскости  $z$  (и, в частности, длина  $L$  промежутка высачивания  $\beta\gamma$ ) заранее неизвестны, но образы области течения на плоскостях  $w$  и  $\frac{dw}{dz}$  легко находятся (рис. 17; значения  $\psi$  на непроницаемом основании  $\alpha\beta$  и  $\varphi$  на промежутке высачивания  $\beta\gamma$  положены равными нулю, значение  $\psi$  на свободной поверхности равно расходу  $Q$ ). Отображение одной области на другую, построенное с соответствием точек  $\alpha = \delta$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , дает дифференциальное

<sup>1)</sup> Дрена (англ. drain — «осушать») — подземный искусственный водоток (труба, полость) для сбора и отвода почвенно-грунтовых вод. Дренажные системы, известные со времен Вавилона и Древнего Рима, применяются для осушения земель и борьбы с их засолением, для перехвата подземных вод и т.д. Пример простейшей дренажной системы, встречающейся в быту, — отверстие на дне горшка для выращивания комнатных растений.

уравнение относительно  $w(z)$ :

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{CQ}{w},$$

решение которого

$$w^2(z) = -2QCz + \text{const.} \quad (8.3)$$

Константа интегрирования равна нулю, т.к. точке  $\beta$  на физической плоскости ( $z = 0$ ) соответствует точка  $w = 0$  на плоскости комплексного потенциала.

Теперь легко найти поле скоростей:

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = -\frac{CQ}{w} = -\sqrt{-\frac{CQ}{2z}},$$

где нужно выбрать ветвь квадратного корня, дающую положительную скорость  $u$  вдоль непроницаемого основания. Отсюда, в частности, для скорости фильтрации на непроницаемом основании получается зависимость

$$u(x) = \sqrt{\frac{CQ}{2|x|}}, \quad x < 0,$$

а на промежутке высачивания

$$v(x) = -\sqrt{\frac{CQ}{2x}}, \quad 0 < x \leq L$$

(в начале координат  $|\mathbf{u}|$  обращается в бесконечность).

Уравнения линий тока и свободной поверхности получаются разделением действительной и мнимой частей в решении (8.3) и исключением потенциала скорости фильтрации  $\varphi$ , что дает уравнение параболы

$$x = -\frac{CQ}{2\psi^2} y^2 + \frac{\psi^2}{2CQ}$$

(линиям тока соответствуют значения  $0 \leq \psi \leq Q$ , поверхности депрессии —  $\psi = Q$ , откуда при  $y = 0$  находится  $L = Q/(2C)$ ).

**Течения в плоско-  
сти пласта**

Аналогичным образом методы теории аналитических функций применяются при рассмотрении плоскопараллельных горизонтальных течений в плоскости тонкого пласта. В этом случае координатная плоскость  $Oxy$  располагается горизонтально, течение описывается уравнениями

$$\Delta\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi = -C H(x, y), \quad C = \text{const}, \quad \mathbf{u} = \text{grad } \varphi,$$

где напор  $H(x, y) = p(x, y, z)/(\rho g) + z$ , в силу закона Дарси и предположения о плоскопараллельности течения, не меняется поперек пласта (при этом внутрипластовое давление вдоль любой вертикальной прямой  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  распределено по гидростатическому закону).

Простейшие течения, встречающиеся на практике, — поступательное течение в пласте со скоростью фильтрации  $\mathbf{U} = (U_x; U_y)$  и течение вокруг работающей совершенной скважины, которое рассматривалось в конце § 7, описываются соответственно комплексными потенциалами  $w(z) = \bar{U}z$  и  $w(z) = Q/(2\pi) \ln z$ , где  $U = U_x + iU_y$ , а черта над числом обозначает комплексное сопряжение. В силу линейности уравнений можно рассматривать линейные комбинации этих и других решений, что позволяет изучать, например, задачи о гидродинамическом взаимодействии группы скважин.

**Скважина в поступательном потоке**

Рассмотрим в качестве примера работу скважины, откачивающей часть жидкости из фильтрационного потока с постоянной скоростью фильтрации  $U = U_x$  на бесконечности. Картина течения в этом случае строится с помощью комплексного потенциала

$$w(z) = Uz - \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

и имеет вид, показанный слева на рис. 18. Скважина забирает жидкость, движущуюся на бесконечности внутри полосы шириной  $Q/U$ , которую называют *областью питания скважины*. Остальная жидкость огибает скважину и уходит в бесконечность. Распределение напора на оси  $x$  дается зависимостью

$$H(x) = \frac{1}{C} \left( -Ux + \frac{Q}{2\pi} \ln |x| \right),$$

качественный вид которой показан справа на рис. 18; локальный максимум на графике соответствует точке торможения потока.

Обратим внимание, что в этом решении при уходе в бесконечность в направлении оси  $x$  давление в пласте рано или поздно станет равным нулю и, строго говоря, решение не будет справедливым во всей плоскости. Это связано с тем, что для поддержания потока в пористой среде нужно каким-либо образом создавать перепад давления, а для течения во всей плоскости, с формальной точки зрения, нужно было бы создать бесконечный перепад давления. Ситуация здесь совершенно аналогична движению вязкой жидкости в трубопроводе, где для поддержания течения на достаточно протяженном участке нужно поднимать давление с помощью насосов, расположенных на определенных расстояниях друг от друга.

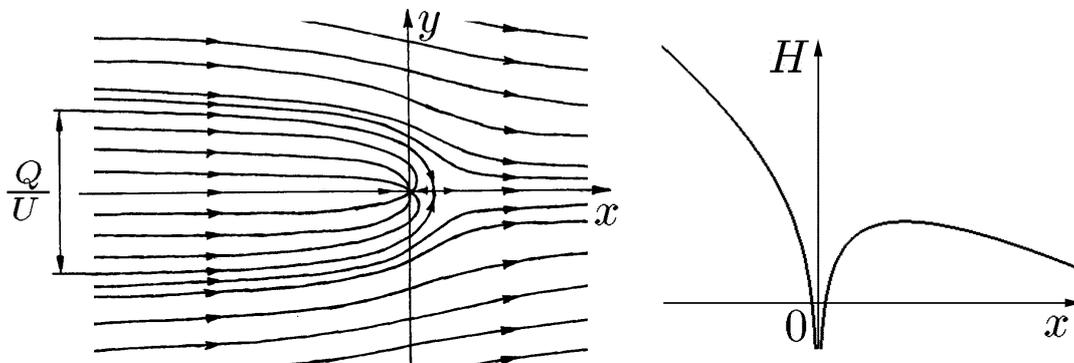


Рис. 18.

### О сходстве и различии фильтрационных течений и потенциальных течений идеальной жидкости

Во избежание недоразумений подчеркнем, что несмотря на формальное совпадение кинематических уравнений для описания полей *скорости* в теории фильтрации и в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости (в обоих случаях это уравнение Лапласа), распределение *давления*, которое в отсутствие массовых сил является основной причиной движения, в этих моделях *разное*.

Такое различие связано с тем, что эти модели отражают *совершенно разные физические механизмы*: в фильтрационных течениях (в области применимости закона Дарси) доминируют, как об этом уже говорилось, вязкие силы, что связано с очень большой площадью поверхности пор, тогда как модель идеальной жидкости учитывает явление другой природы — инерцию жидкости. Это различие проявляется уже в

простейшем стационарном течении в горизонтальном цилиндрическом канале: в пористой среде давление падает вдоль канала, в то время как при течении идеальной жидкости градиенты давления вдоль канала отсутствуют.

### § 9. Гидравлическая теория безнапорной фильтрации

#### Предположения гидравлической теории

Строгое математическое описание безнапорных течений<sup>1)</sup>, часто встречающихся в гидрологической практике, достаточно сложно из-за неизвестности формы поверхности депрессии. Для приближенного описания течений со свободной границей французским гидравликом и экономистом Жюлем Дюпюи (1863) были предложены упрощающие предположения, которые выполняются для течений с пологой поверхностью депрессии.

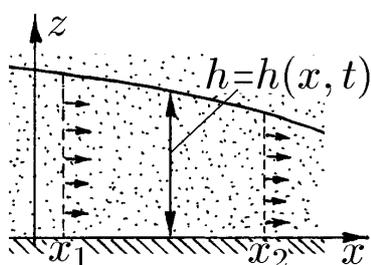


Рис. 19.

Рассмотрим (для простоты плоское) нестационарное безнапорное течение несжимаемой жидкости в пористом слое, ограниченном снизу горизонтальной непроницаемой поверхностью (рис. 19). Движение жидкости описывается уравнением неразрывности и законом Дарси, которые в показанной на рисунке системе координат имеют вид<sup>2)</sup>

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_x = -C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = -C \frac{p'_x}{\rho g},$$

$$u_z = -C \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = -C \left( \frac{p'_z}{\rho g} + 1 \right).$$
(9.1)

Основное предположение гидравлической теории заключается в том, что при малых углах наклона свободной поверхности к горизонту ( $h'_x \ll 1$ ) в любом вертикальном сечении пласта  $x = \text{const}$  давление в фильтрующейся жидкости распределено по гидростатическому закону (что эквивалентно постоянству напора по сечению). Если эта гипотеза выполняется, то из закона Дарси следует,

<sup>1)</sup> Как уже говорилось на стр. 43, *безнапорными* называются течения со свободной поверхностью.

<sup>2)</sup> Для сокращения записи мы будем иногда обозначать частные или обыкновенные производные штрихом, указывая переменную, по которой производится дифференцирование, с помощью нижнего индекса, например:  $\frac{\partial p}{\partial x} = p'_x$ .

что скорость фильтрации в любой точке направлена горизонтально (ее вертикальная компонента равна нулю), а ее величина определяется только формой свободной поверхности и не зависит от высоты:

$$u_x(x, t) = -Ch'_x, \quad u_z = 0.$$

К указанной гипотезе можно прийти с помощью оценки членов в основных уравнениях. Поскольку мы хотим показать, что давление мало отличается от гидростатического, представим его в виде

$$p(x, z, t) = \rho g(h(x, t) - z) + \tilde{p}(x, z, t), \quad (9.2)$$

где  $\tilde{p}$  — отклонение от гидростатического закона. Обозначим характерные горизонтальные и вертикальные размеры смоченной части пласта через  $L$  и  $h$ , характерное изменение высоты свободной поверхности — через  $\delta h$  (в силу предположения о пологости поверхности депрессии  $\delta h/L \ll 1$ ) и характерные проекции скорости фильтрации через  $U_x$  и  $U_z$ . Тогда из уравнений (9.1), в которые подставлено (9.2), получаются оценки

$$\frac{U_x}{L} \sim \frac{U_z}{h}, \quad U_x \sim \frac{C}{\rho g} \left( \rho g \frac{\delta h}{L} + \frac{\delta \tilde{p}_x}{L} \right), \quad U_z \sim \frac{C}{\rho g} \cdot \frac{\delta \tilde{p}_z}{h},$$

где  $\delta \tilde{p}_x$  и  $\delta \tilde{p}_z$  — характерные изменения  $\tilde{p}$  вдоль соответствующих осей. Эти соотношения представляют собой оценки по порядку, и с ними можно обращаться как с обычными равенствами (возможно, если это потребуется, меняя коэффициенты при одночленах в конечное число раз)<sup>1)</sup>. Отсюда получается оценка

$$\rho g \delta h \sim \delta \tilde{p}_x + \frac{L^2}{h^2} \delta \tilde{p}_z,$$

из которой, в предположении, что  $\delta \tilde{p}_z$  по крайней мере не меньше  $\delta \tilde{p}_x$  (поскольку на свободной поверхности  $\tilde{p} = 0$ ), а также  $L \gtrsim h$ , следует искомое соотношение

$$\delta \tilde{p}_z \sim \rho g h \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{\delta h}{L} \ll \rho g h.$$

**Уравнение Буссинеска** С использованием предположений гидравлической теории легко получить уравнение для высоты свободной поверхности  $h(x, t)$ , записав закон

<sup>1)</sup> Скажем, от сравнения типа  $\alpha \sim \frac{3}{4} \beta - 2\gamma$  можно перейти к сравнению  $\alpha \sim \beta + \gamma$ .

сохранения массы для части пористой среды между двумя произвольными сечениями  $x_1 = \text{const}$  и  $x_2 = \text{const}$  (рис. 19):

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho m h dx = (\rho h \cdot C h'_x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \rho C \left( \frac{h^2}{2} \right)' \Big|_{x_1}^{x_2} = C \rho \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{h^2}{2} \right)'' dx,$$

откуда получается нелинейное уравнение Буссинеска (Ж. Boussinesq, 1904)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{C}{2m} \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2}. \tag{9.3}$$

В общем случае зависимости высоты свободной поверхности от *двух* пространственных координат в горизонтальной плоскости уравнение для  $h = h(x, y, t)$  выглядит аналогично:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{C}{2m} \Delta (h^2).$$

В частном случае стационарных течений форма поверхности депрессии находится из уравнения Лапласа

$$\Delta (h^2) = 0.$$

**Формулы Дюпюи для безнапорных течений**

ЗАВИСИМОСТЬ

В случае стационарного плоскопараллельного течения уравнение Буссинеска дает для формы свободной поверхности

$$h^2(x) = Ax + B, \quad A, B = \text{const} \tag{9.4}$$

(для течения слева направо, показанного на рис. 19,  $A < 0$ ), для которой постоянный объемный расход жидкости (на единицу длины в поперечном направлении)

$$Q = -Ch'(x) \cdot h(x) = -C(h^2(x)/2)'_x = -CA/2.$$

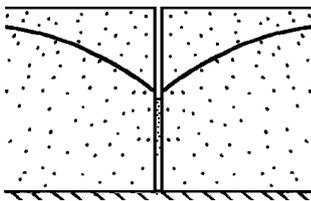


Рис. 20.

Записав (9.4) для двух сечений  $x_1$  и  $x_2$ , несложно получить выражение расхода через высоты свободной поверхности в этих точках:

$$Q = \frac{C}{2} \frac{h^2(x_1) - h^2(x_2)}{x_2 - x_1}. \tag{9.5}$$

Аналогичным образом для стационарного осесимметричного безнапорного течения получим решение

$$h^2(r) = A \ln \left( \frac{r}{r_0} \right), \quad A, r_0 = \text{const}$$

с расходом

$$Q = -Ch'(r) \cdot 2\pi r h(r) = -2\pi r C (h^2(r)/2)'_r = -\pi C A$$

(для притока к скважине, показанного на рис. 20,  $A > 0$  и расход  $Q$  отрицательный). Аналогично плоскому случаю, для расхода можно записать выражение

$$Q = -\pi C \frac{h^2(r_2) - h^2(r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (9.6)$$

Соотношения (9.5) и (9.6) называются *формулами Дюпюи* для пологой безнапорной фильтрации<sup>1)</sup>.

**Строгое доказательство формулы Дюпюи для фильтрации через прямоугольную плотину** Формулы Дюпюи являются приближенными, т.к. при их выводе использовалась приближенная теория. Однако, что любопытно, в случае стационарной фильтрации через прямоугольную перемычку (рис. 21) расход, определяемый по гидравлической теории, совпадает с точным значением, причем при любых (даже немалых) наклонах поверхности депрессии.

Этот результат, полученный в 1951 г. И. А. Чарным, легко получается с помощью интегральных соотношений. В самом деле, постоянный расход жидкости с помощью закона Дарси выражается через давление

$$Q = \int_0^{h(x)} u_x(x, z) dz = -\frac{C}{\rho g} \int_0^{h(x)} p'_x(x, z) dz,$$

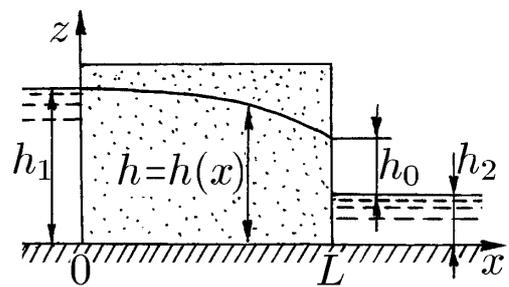


Рис. 21.

поэтому если ввести интеграл от давления по высоте

$$\mathcal{P}(x) \equiv \int_0^{h(x)} p(x, z) dz,$$

<sup>1)</sup> Сравните с формулой Дюпюи (7.5) на стр. 42.

то его производная явно вычисляется и оказывается равной константе:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = \cancel{p(x, h(x))} \cdot h'(x) + \int_0^{h(x)} p'_x(x, z) dz = -\frac{\rho g Q}{C}$$

(зачеркнутое слагаемое пропадает из-за равенства давления на свободной поверхности атмосферному давлению, которое мы полагаем нулевым). Поэтому функция  $\mathcal{P}(x)$  является линейной, а ее значения на границах пласта вычисляются через известные параметры:

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(0) - \frac{\rho g Q}{C} x,$$

$$\mathcal{P}(0) = \int_0^{h_1} \rho g (h_1 - z) dz = \frac{\rho g h_1^2}{2}, \quad \mathcal{P}(L) = \int_0^{h_2} \rho g (h_2 - z) dz = \frac{\rho g h_2^2}{2},$$

откуда получается выражение, совпадающее с (9.5):

$$Q = \frac{C}{2} \frac{h_1^2 - h_2^2}{L}.$$

Отметим, что если в этой задаче использовать гидравлическую теорию, то поверхность депрессии  $h(x)$  должна выходить на правом конце пласта на значение  $h_2$  (если мы хотим, чтобы в этой теории напор был непрерывен), тогда как в действительности выше поверхности воды имеется промежуток высачивания и  $h(L) = h_2 + h_0$ .

## § 10. Аналоговое моделирование фильтрации несжимаемой жидкости

До появления вычислительных машин точный расчет фильтрационных течений несжимаемой жидкости в сложных областях вызывал некоторые затруднения, что иногда заставляло прибегать к использованию аналогового моделирования, основанного на совпадении математических моделей для процессов, различных с физической точки зрения. Хотя в инженерной практике в настоящее время эти методы практически не применяются, они представляют познавательный и методический интерес, а один из них — моделирование с помощью целевого лотка — не потерял своего значения до сих пор и с успехом используется для

моделирования фильтрационных процессов, в частности задач со свободной поверхностью.

### Течение в лотке Хил-Шоу

Этот метод моделирования заключается в изучении медленного течения вязкой жидкости в тонком зазоре между двумя параллельными пластинами (рис. 22); экспериментальную установку, в которой осуществляется такое течение, называют *щелевым лотком* или *лотком (ячейкой) Хил-Шоу* (H.S.Hele-Shaw, 1898).

Предположим, что пластины расположены вертикально на расстоянии  $2h$ , а оси координат выбраны так, как показано на рис. 22. Если скорости  $v_x$  и  $v_y$  движения жидкости имеют порядок  $U$ , от из уравнения неразрывности

$$(v_x)'_x + (v_y)'_y + (v_z)'_z = 0$$

следует, что поперечная компонента скорости  $v_z$  мала и имеет порядок  $v_z \sim hU/L \ll$

$\ll U$ , где  $L \gg h$  — характерный размер пластин. Наличие малого параметра  $h/L$  позволяет существенно упростить стационарные уравнения Навье — Стокса, которые выписаны ниже с указанием отброшенных членов:

$$\rho(\cancel{v_x(v_x)'_x} + \cancel{v_y(v_x)'_y} + \cancel{v_z(v_x)'_z}) = -p'_x + \mu((v_x)''_{xx} + (v_x)''_{yy} + (v_x)''_{zz}),$$

$$\rho(\cancel{v_x(v_y)'_x} + \cancel{v_y(v_y)'_y} + \cancel{v_z(v_y)'_z}) = -p'_y + \mu((v_y)''_{xx} + (v_y)''_{yy} + (v_y)''_{zz}) - \rho g,$$

$$\rho(\cancel{v_x(v_z)'_x} + \cancel{v_y(v_z)'_y} + \cancel{v_z(v_z)'_z}) = -p'_z + \mu((v_z)''_{xx} + (v_z)''_{yy} + (v_z)''_{zz}).$$

Зачеркнутые слагаемые в правой части по порядку величины в  $(h/L)^2$  раз меньше соответствующего оставленного вязкого члена, а всеми слагаемыми в левой части можно пренебречь, как несложно проверить, при условии

$$\text{Re}_L \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2 = \text{Re}_h \cdot \frac{h}{L} \ll 1, \quad \text{Re}_L = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad \text{Re}_h = \frac{\rho U h}{\mu}, \quad (10.1)$$

где  $\text{Re}_L$  и  $\text{Re}_h$  — числа Рейнольдса, вычисленные по характерным размерам соответственно пластин и зазора. Далее, из упрощенных уравнений вытекает, что поперечный градиент давления  $p'_z$

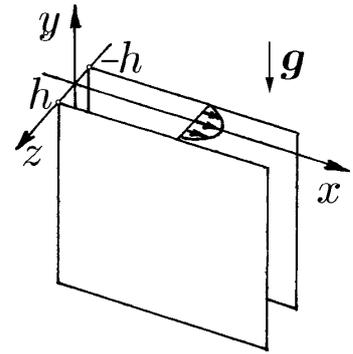


Рис. 22.

мал по сравнению с продольными градиентами:

$$\frac{p'_z}{p'_x} \sim \frac{p'_z}{p'_y + \rho g} \sim \frac{h}{L} \ll 1$$

и его можно положить равным нулю, поэтому из последнего уравнения (в рассматриваемом приближении) и условия прилипания получается  $v_z \equiv 0$ .

Таким образом, для ползущего течения между пластинами давление зависит только от продольных координат:  $p = p(x, y)$ , а уравнения Навье – Стокса сводятся к системе

$$p'_x = \mu(v_x)''_{zz}, \quad p'_y + \rho g = \mu(v_y)''_{zz},$$

интегрирование которой с учетом условия прилипания

$$v_x|_{z=\pm h} = 0, \quad v_y|_{z=\pm h} = 0$$

дает

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= -\frac{p'_x(x, y)}{2\mu}(h^2 - z^2), \\ v_y(x, y, z) &= -\frac{p'_y(x, y) + \rho g}{2\mu}(h^2 - z^2). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Если ввести средние значения скоростей по продольным направлениям

$$\langle v_x \rangle(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_x(x, y, z) dz, \quad \langle v_y \rangle(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_y(x, y, z) dz,$$

удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\langle v_x \rangle'_x + \langle v_y \rangle'_y = 0,$$

то решению (10.2) можно придать вид

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (\langle v_x \rangle; \langle v_y \rangle) = -C \text{ grad } H,$$

$$H(x, y) = \frac{p(x, y)}{\rho g} + y, \quad C = \frac{k\rho g}{\mu}, \quad k = \frac{h^2}{3},$$

который совпадает с уравнениями плоскопараллельной фильтрации тяжелой несжимаемой жидкости в среде с проницаемостью  $k$ .

В этом совпадении, в сущности, нет ничего удивительного, т.к. лоток Хил-Шоу можно рассматривать как пористую среду очень частного вида.

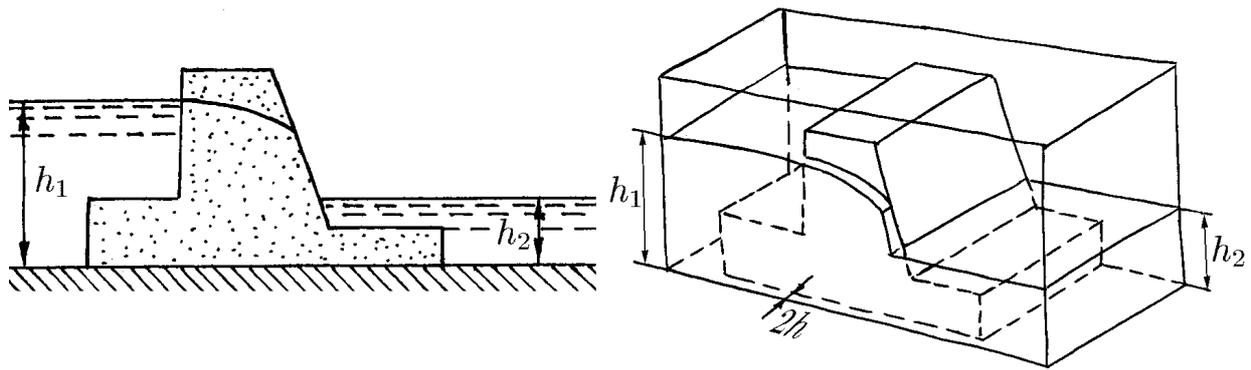


Рис. 23.

Граничные условия при течении в щелевом лотке также аналогичны условиям в теории фильтрации. На боковой поверхности непроницаемого твердого цилиндрического тела с образующими высотой  $2h$ , которое находится в зазоре и прижимается основаниями к пластинам (аналог *непроницаемого тела* в фильтрационном потоке), выполняется условие прилипания, однако вне тонкого пограничного слоя можно считать, что для средней скорости  $\langle v \rangle$  выполнено условие непротекания. В месте выхода жидкости на край пластин (аналог *промежутка высачивания*) и на границе жидкости и воздуха во внутренней области (аналог *поверхности депрессии*) давление в жидкости, в пренебрежении капиллярными явлениями, равно атмосферному (во втором случае для стационарного течения, очевидно, выполняется и условие непротекания — отсутствие потока массы через свободную границу жидкости). Наконец, *границу пористой среды с водоемом* можно моделировать как границу узкой щели с широким сосудом, в котором жидкость практически покоится (из-за его больших размеров) и давление распределено по гидростатическому закону.

Приведем для примера задачу о безнапорной фильтрации через проницаемую плотину на непроницаемом основании, показанную слева на рис. 23, аналоговое решение которой можно осуществить на установке, изображенной на том же рисунке справа. В этом случае свободная поверхность образуется автоматически и без внешнего воздействия принимает такую же форму, что и в фильтрационном процессе. Для наблюдения за формой свободной поверхности стенки лотка делают прозрачными, а для визуализа-

ции линий тока в жидкость вводят красящее вещество. Расстояние между пластинами выбирается с учетом требования (10.1), из которого, если принять, что  $U \sim C \sim \rho gh^2/\mu$ , получается оценка  $h \lesssim (\mu^2 L/(g\rho^2))^{1/4}$  (при  $L \sim 10^2$  см для лотка с водой  $h \sim 10^{-1}$  см).

В лотке Хил-Шоу можно моделировать и течение через границу двух пористых сред с различными проницаемостями. Для этого удобно работать не со средней скоростью  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , а с «вектором расхода»

$$\mathbf{Q}(x, y) = \int_{-h}^h \mathbf{v}(x, y, z) dz = -C_* \text{grad } H, \quad C_* = \frac{2\rho gh^3}{3\mu},$$

который удовлетворяет не только тем же уравнениям, что и  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , но и граничному условию  $[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}] = 0$  на стыке двух щелей с разными зазорами ( $\mathbf{n}$  — нормаль к границе щелей, расположенная в плоскости  $Oxy$ ).

**Метод электрогидродинамической аналогии** (сокращенно ЭГДА) основан на совпадении уравнений фильтрации несжимаемой жидкости с уравнениями, описывающими стационарное течение электрического тока в проводнике.

Напомним, что в ньютоновской механике силовое воздействие электромагнитного поля на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$ , характеризуется векторами *электрической напряженности*  $\mathbf{E}$  и *магнитной индукции*  $\mathbf{B}$  и сводится к силе Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right),$$

где  $c$  — скорость света (эта и последующие формулы написаны в так называемой симметричной гауссовой системе единиц). При описании электромагнитных явлений в веществе вводятся вектор *электрического смещения*  $\mathbf{D}$  и вектор *напряженности магнитного поля*  $\mathbf{H}$ , в простейшем случае связанные с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  соотношениями

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где  $\mu$  и  $\varepsilon$  — *магнитная* и *диэлектрическая проницаемости* вещества, которые далее считаются постоянными<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> В этом разделе не будет использоваться вязкость жидкости, обозначаемая в остальном тексте той же буквой  $\mu$ .

Электромагнитное поле описывается четырьмя дифференциальными уравнениями Максвелла, выражающими закон Кулона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e, \quad (10.3)$$

закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10.4)$$

условие отсутствия магнитных зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (10.5)$$

и возникновение магнитного поля вокруг проводника с током:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (10.6)$$

где  $\rho_e$  — объемная плотность свободных электрических зарядов,  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости.

Эти уравнения существенно упрощаются, если мы интересуемся только электрической частью стационарного электромагнитного поля<sup>1)</sup> в неподвижных хороших проводниках, для которых плотность свободных зарядов  $\rho_e$  практически равна нулю.

Последнее утверждение обосновывается следующим образом. Из уравнений (10.3) и (10.6) получается закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

который после подстановки закона Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , где  $\sigma$  — электрическая проводимость среды, и учета (10.3) дает уравнение

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho_e = 0,$$

откуда получается, что в каждой точке среды  $\rho_e$  экспоненциально падает:

$$\rho_e(t) = \rho_e(0) \exp(-t/\tau), \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}.$$

Для хороших проводников характерное время растекания заряда очень мало (например, для речной воды  $\tau \sim 10^{-7}$  с), поэтому любой искусственно созданный внутри проводника заряд практически мгновенно распределяется по его поверхности.

---

<sup>1)</sup> Естественно, магнитное поле в проводнике тоже существует при наличии тока.

Подчеркнем, что нулевое значение плотности свободных зарядов  $\rho_e$  никак не противоречит возможности протекания через среду электрического тока. В приведенном примере воды, представляющей собой электролит, в каждом объеме среды имеются как положительные, так и отрицательные ионы, которые при наложении электрического поля начинают двигаться в противоположных направлениях, что приводит к возникновению тока, однако *суммарная* плотность зарядов остается равной нулю.

Итак, в стационарном случае уравнения (10.3) и (10.4) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

откуда следует существование потенциала  $\varphi$  напряженности электрического поля, удовлетворяющего уравнению Лапласа:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \Delta \varphi = 0,$$

а закон Ома принимает вид  $\mathbf{j} = -\sigma \operatorname{grad} \varphi$ . Эти соотношения полностью аналогичны уравнениям теории фильтрации, причем потенциал  $\varphi$  играет роль напора  $H$ , а плотность тока  $\mathbf{j}$  — роль скорости фильтрации  $\mathbf{u}$ .

Обсудим теперь условия для вектора  $\mathbf{E}$  на границе двух сред с различными характеристиками. В рассматриваемом стационарном случае закон сохранения заряда дает (в отсутствие поверхностных токов) условие на разрыве  $[\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}] = 0$ , а из интегральной формулировки уравнений Максвелла получаются соотношения

$$[\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}] = \left[ \frac{\varepsilon}{\sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \right] = 4\pi \rho_{\text{пов}}, \quad [\mathbf{E}_\tau] = \left[ \frac{\mathbf{j}_\tau}{\sigma} \right] = 0,$$

где  $\rho_{\text{пов}}$  — поверхностная плотность электрического заряда на границе [14]. Эти равенства означают, что нормальная составляющая вектора  $\mathbf{j}$  непрерывна на разрыве, а касательные составляющие относятся как проводимости сред по разные стороны от разрыва<sup>1)</sup>, что полностью аналогично условиям на границе двух пористых сред, обсуждавшимся на стр. 36 (проводимости  $\sigma$  играют роль коэффициентов фильтрации  $C$ ).

---

<sup>1)</sup> Отметим, что на границе двух различных проводников при  $j_n \neq 0$  в общем случае образуется ненулевой поверхностный заряд с абсолютной величиной  $|\rho_{\text{пов}}| = |[\varepsilon/\sigma]j_n|/(4\pi)$ .

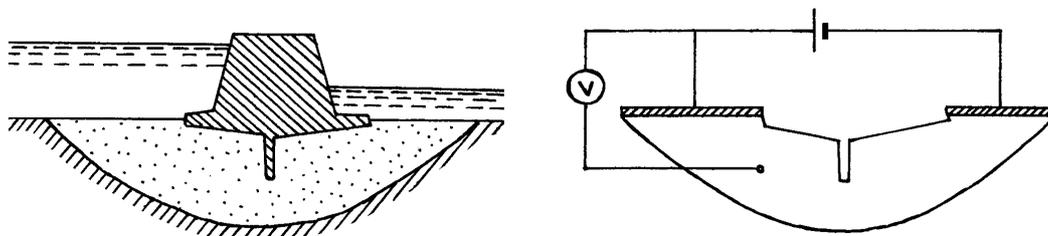


Рис. 24.

В частном случае *непроводящей границы*<sup>1)</sup> получается условие  $j_n = 0$ , аналогичное условию непротекания на непроницаемой границе, а в случае границы с *очень хорошо проводящим материалом*<sup>2)</sup> его поверхность можно считать эквипотенциальной, т.к. в нем проводимость настолько велика (по сравнению с проводимостью рассматриваемой среды), что для создания в хорошем проводнике тока (конечной величины) достаточно крайне малого перепада потенциала, который по сравнению с перепадом потенциала в основной среде можно считать нулевым. Это доказывается с помощью общего соотношения  $\sigma_1 / \operatorname{tg} \alpha_1 = \sigma_2 / \operatorname{tg} \alpha_2$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  — углы между нормалью к границе и векторами  $\mathbf{j}$  (ср. рис. 10 на стр. 36), из которого при  $\sigma_1 / \sigma_2 \rightarrow \infty$  получается  $\alpha_2 \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\mathbf{j}_{2\tau} = -\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \rightarrow 0$ , т.е. постоянство потенциала вдоль границы раздела.

Обсуждавшиеся только что границы — непроницаемая и эквипотенциальная — являются единственными типами границ, встречающихся при напорной фильтрации под гидротехническими сооружениями, поэтому эти задачи можно изучать с помощью метода ЭГДА. Для этого (в случае плоской задачи) берется проводник в форме сечения пласта (из металла, проводящей бумаги)<sup>3)</sup>, у которого границы, соответствующие непроницаемым стенкам, примыкают к изолирующей среде (например, находятся в воздухе), а эквипотенциальные границы контактируют с электродами из хорошо проводящего материала (рис. 24). При подключении электродов к батарее в проводнике возникает стационарный электрический ток, а значение потенциала в любой точке измеряется вольтметром.

<sup>1)</sup> Скажем, граница воды с пластмассовой водонепроницаемой стенкой.

<sup>2)</sup> Например, граница речной воды и стальной стенки (проводимость последней на девять порядков больше).

<sup>3)</sup> Или слой жидкого электролита (воды, раствора соли) в ванне, имеющий в плане такую же форму.

# Глава III. Фильтрационные течения с учетом сжимаемости флюида и пористой среды

## § 11. Изотермическая фильтрация газа в недеформируемой пористой среде

**Уравнение Лейбензона** При фильтрации газа в промышленных условиях становятся существенными эффекты, связанные с сжимаемостью флюида. В первом приближении можно пренебречь сжимаемостью пористого скелета по сравнению с сжимаемостью газа<sup>1)</sup>, считая пористость и проницаемость известными функциями только от пространственных координат:

$$m = m(x, y, z), \quad k = k(x, y, z),$$

а движение газа (в отсутствие дополнительных источников тепловой энергии) считать *изотермическим*:

$$T(x, y, z, t) = T_0 = \text{const.}$$

В этом случае замкнутая система уравнений состоит из уравнения неразрывности и закона Дарси<sup>2)</sup>

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p,$$

к которым добавляются известные уравнения состояния для газа:

$$\rho = \rho(p, T_0) = \rho(p), \quad \mu = \mu(p, T_0) = \mu(p).$$

Из этих уравнений можно получить одно уравнение относительно давления. Действительно, подставляя закон Дарси в уравнение неразрывности и для простоты полагая пористость и проницаемость постоянными величинами, получим уравнение

$$m \frac{d\rho(p)}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = k \text{div} \left( \frac{\rho(p)}{\mu(p)} \text{grad } p \right),$$

---

<sup>1)</sup> Обычно упругие модули материала скелета (например, модуль Юнга  $E$ ) на много порядков больше давления газа, поэтому относительное изменение удельного объема газа  $\delta V/V \sim \delta p/p$  много больше относительных деформаций материала скелета  $\varepsilon_{ij} \sim \delta p/E$ , вызванных изменениями давления газа.

<sup>2)</sup> Действием массовых сил при фильтрации газа можно пренебречь.

которое после введения *функции Лейбензона*<sup>1)</sup>

$$\mathcal{P}(p) = k \int_0^p \frac{\rho(p_1)}{\mu(p_1)} dp_1$$

приобретает вид нелинейного уравнения относительно  $\mathcal{P}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \kappa(\mathcal{P}) \cdot \Delta \mathcal{P}, \quad \kappa(\mathcal{P}) = \kappa(\mathcal{P}(p)) = \frac{k\rho(p)}{m\mu(p)} \frac{dp(\rho)}{d\rho}.$$

Обратим внимание, что функции  $\mathcal{P}(p)$  и  $\kappa(p)$  зависят только от свойств газа и являются *известными* до решения задачи.

В частном случае газа с уравнением состояния Менделеева – Клапейрона и постоянной вязкостью  $\mu = \text{const}$ <sup>2)</sup> эти формулы дают

$$p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho, \quad \mathcal{P}(p) = \frac{k\rho_0}{2\mu\rho_0} p^2, \quad \kappa(\mathcal{P}(p)) = \frac{k}{m\mu} p, \quad \frac{\partial(p^2)}{\partial t} = \frac{k}{m\mu} p \Delta(p^2),$$

откуда получается *уравнение Лейбензона*<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu} \Delta(p^2), \quad (11.1)$$

которое совпадает с уравнением Буссинеска (9.3) для формы пологой поверхности депрессии при безнапорной фильтрации несжимаемой жидкости.

### Граничные условия

При постановке краевых условий для уравнения Лейбензона нужно переформулировать обсуждавшиеся в § 6 соотношения в терминах давления. На *непроницаемой границе* в силу закона Дарси выполняется

<sup>1)</sup> Функция Лейбензона монотонно возрастает, и, следовательно, может быть обращена:  $p = p(\mathcal{P})$ .

<sup>2)</sup> Вязкость газа из невзаимодействующих частиц, как это устанавливается в молекулярно-кинетической теории, не зависит от давления и увеличивается с ростом температуры по закону  $\mu \sim \sqrt{T}$ . Вязкость реальных газов при  $T = \text{const}$  как правило возрастает с повышением давления.

<sup>3)</sup> Уравнение (11.1) было получено в начале 1920-х гг. академиком Л.С.Лейбензоном и несколько позже американским гидромехаником М.Маскетом (М. Muskat).

условие  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ , на границе со свободным газом (например, при выходе в атмосферу газа из пласта) ставится условие постоянства давления  $p = \text{const}$ . При выходе газа в ствол скважины, которая моделируется отрезком прямой, могут задаваться интегральные характеристики, например объемный расход газа, выражаемый поверхностным интегралом от  $\frac{\partial p}{\partial n}$ .

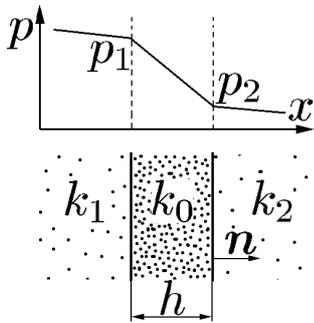


Рис. 25.

Еще одним примером границы является тонкая низкопроницаемая прослойка между двумя высокопроницаемыми пластами. Общее условие постоянства массового расхода  $[\rho(p)k/\mu(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial n}] = 0$  в силу непрерывности давления на разрыве приводит к соотношению  $[k \frac{\partial p}{\partial n}] = 0$ . Если проницаемость промежуточного пласта  $k_0$  много меньше проницаемостей  $k_1$  и  $k_2$  соседних пластов, то прослойка будет играть роль сопротивления, при фильтрации через которое образуется большой перепад давления (рис. 25).

Пользуясь малой толщиной  $h$  прослойки, можно приближенно заменить поперечный градиент давления  $\frac{\partial p}{\partial n}$  конечной разностью  $(p_2 - p_1)/h$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — (неизвестные) давления газа с обеих сторон от прослойки, и записать два условия

$$k_1 \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_1 = k_0 \frac{p_2 - p_1}{h}, \quad k_2 \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_2 = k_0 \frac{p_2 - p_1}{h}.$$

Отсюда, в частности, получается условие при истечении газа через граничную малопроницаемую прослойку в атмосферу с постоянным заданным давлением  $p_2$ :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{k_0}{k_1 h} p \right) \Big|_1 = \frac{k_0 p_2}{k_1 h} = \text{const}.$$

**Автомодельная задача о закачке газа в пласт** В качестве примера использования уравнения Лейбензона рассмотрим одномерную задачу о закачке газа в полубесконечный пласт (Г.И.Баренблатт, 1952). Предположим, что в начальный момент давление газа в пласте пренебрежимо мало:  $p(x, 0) = 0$ , а во входном сечении пласта  $x = 0$  давление поднимается по линейному закону:  $p(0, t) = \alpha t$ ,  $\alpha = \text{const}$  (рис. 26 а). После начала закачки по пласту будет распространяться волна

повышения давления, описываемая уравнением

$$p'_t = K(p^2)''_{xx}, \quad K = \frac{k}{2m\mu} = \text{const}, \quad (11.2)$$

причем на бесконечности возмущение давления должно стремиться к нулю:  $p(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Общий вид зависимости давления от времени и координаты устанавливается с помощью  $\pi$ -теоремы и имеет вид

$$p = p(x, t, K, \alpha) = \alpha t \cdot f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t\sqrt{K\alpha}},$$

после чего нахождение решения (11.2) с учетом начальных и граничных условий сводится к краевой задаче

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = (f^2(\xi))''_{\xi\xi}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0.$$

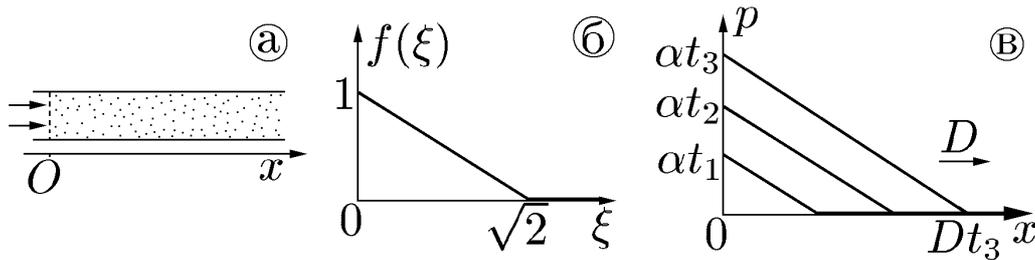


Рис. 26.

Можно заметить, что дифференциальное уравнение относительно  $f(\xi)$  имеет решение вида  $f(\xi) = A + B\xi$ , где  $A = 2B^2$ , причем из граничного условия при  $\xi = 0$ , соответствующего входу в пласт, получается  $A = 1$ ,  $B = \pm 1/\sqrt{2}$ . Решение, соответствующее знаку плюс, стремится к бесконечности и не удовлетворяет второму граничному условию при  $\xi \rightarrow \infty$ , а решение, отвечающее знаку минус, обращается в ноль при  $\xi = \sqrt{2}$  и может быть продолжено за эту точку тождественным нулем (рис. 26 б). При этом будут выполнены условие на бесконечности и, как в этом можно убедиться, соотношения (6.3) (с нулевыми источниковыми членами в правых частях) на слабом разрыве, соответствующем  $\xi = \sqrt{2}$ .

Таким образом, решение задачи имеет вид

$$p(x, t) = \begin{cases} \alpha t - \sqrt{\alpha/(2K)}x & \text{при } x \leq t\sqrt{2K\alpha}, \\ 0 & \text{при } x > t\sqrt{2K\alpha}, \end{cases}$$

причем передний фронт возмущения распространяется с конечной скоростью  $D = \sqrt{2K\alpha} = \sqrt{\alpha k / (m\mu)}$ . Качественный вид зависимости  $p(x)$  для трех моментов времени  $t_1 < t_2 < t_3$  показан на рис. 26 в.

## § 12. Фильтрация с учетом слабой сжимаемости жидкости и пористого скелета

### Упругий режим фильтрации

В отличие от газов, которые могут в разы менять свой объем, капельные жидкости (вода, нефть) являются *слабосжимаемыми* веществами, у которых в промышленных условиях относительное изменение объема составляет доли процента. Поэтому, во-первых, при изучении эффектов сжимаемости на фильтрацию жидкостей нужно одновременно учитывать и сжимаемость пористого скелета и, во-вторых, учет этих изменений можно проводить в линейном приближении.

В соответствии с этим к системе, состоящей из уравнения неразрывности и закона Дарси:

$$(m\rho)'_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p,$$

добавляются *линейные* соотношения, определяющие изотермические зависимости плотности  $\rho$ , пористости  $m$ , проницаемости  $k$  и вязкости  $\mu$  от возмущения давления жидкости в порах по сравнению с некоторым начальным состоянием  $p_0$ <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\rho}\right), & m(p) &= m_0 \cdot \left(1 + \frac{p - p_0}{K_m}\right), \\ k(p) &= k_0 \cdot \left(1 + \frac{p - p_0}{K_k}\right), & \mu(p) &= \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\mu}\right), \end{aligned} \quad (12.1)$$

где величины  $\rho_0$ ,  $m_0$ ,  $k_0$ ,  $\mu_0$  относятся к невозмущенному состоянию, а константы  $K_\rho$ ,  $K_m$ ,  $K_k$ ,  $K_\mu$  являются упругими модулями<sup>2)</sup>, которые характеризуют изменение свойств пористой среды

<sup>1)</sup> Тем самым мы предполагаем деформации жидкости и пористого скелета *обратимыми* (упругими), в связи с чем о процессах, при которых эта теория справедлива, говорят как об *упругом режиме фильтрации*.

<sup>2)</sup> Например, при 10°C для воды  $K_\rho \approx 2 \cdot 10^4$  атм,  $K_\mu \approx -2 \cdot 10^4$  атм; отрицательное значение  $K_\mu$  соответствует падению вязкости воды при не очень большом повышении давления.

и жидкости при всестороннем сжатии и по порядку величины много больше характерных возмущений давления:  $(p - p_0)/K \ll \ll 1$ .

Как и в случае фильтрации газа (§ 11), мы подставим закон Дарси в уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial(m(p) \rho(p))}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\rho(p) k(p)}{\mu(p)} \operatorname{grad} p \right),$$

что после преобразований дает

$$\rho t \left( \frac{m'_p}{m} + \frac{\rho'_p}{\rho} \right) p'_t = \frac{\rho k}{\mu} \left\{ \left( \frac{\rho'_p}{\rho} + \frac{k'_p}{k} + \frac{(1/\mu)'_p}{1/\mu} \right) |\operatorname{grad} p|^2 + \Delta p \right\},$$

и, поскольку мы хотим получить уравнения для *малых возмущений*, упростим коэффициенты при производных от давления: вместо значений  $k$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  и  $m$  возьмем их невозмущенные значения  $k_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$  и  $m_0$ , а при вычислении производных воспользуемся линейными уравнениями состояния (12.1), например:

$$\frac{\rho'_p}{\rho} \approx \frac{1}{K_\rho}, \quad \frac{(1/\mu)'_p}{1/\mu} \approx -\frac{1}{K_\mu}.$$

В результате получится уравнение с постоянными коэффициентами, в котором дополнительно можно отбросить нелинейное слагаемое<sup>1)</sup>:

$$\rho_0 m_0 \left( \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_\rho} \right) p'_t = \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \left\{ \left( \frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_k} - \frac{1}{K_\mu} \right) |\operatorname{grad} p|^2 + \Delta p \right\},$$

что в итоге дает *уравнение пьезопроводности*<sup>2)</sup>, полученное рядом исследователей в 1930 – 40-х гг. [11, 17]:

$$p'_t = \varkappa \Delta p, \quad \varkappa = \frac{k_0}{m_0 \mu_0} \left( \frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_m} \right)^{-1} = \operatorname{const}, \quad (12.2)$$

<sup>1)</sup> Зачеркнутый член имеет порядок  $(p - p_0)^2 / (KL^2)$ , где  $L$  — характерный размер задачи, а оператор Лапласа порядка  $(p - p_0) / L^2$ , так что отношение этих членов порядка  $(p - p_0) / K \ll 1$ .

<sup>2)</sup> Название (от греч.  $\pi\iota\epsilon\zeta\omega$  — «давлию») дано по аналогии с названием уравнения теплопроводности, совпадающего по форме с (12.2).

где  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности. Граничные условия для уравнения (12.2) ставятся аналогично условиям при изотермической фильтрации газа (стр. 67).

Коэффициент пьезопроводности одновременно учитывает сжимаемость жидкости и пористого скелета. Отметим, что в промысловых условиях встречаются ситуации, когда фильтрующаяся жидкость содержит пузырьки газа (например, газ, растворенный в жидкости, может выделяться при понижении давления). Это приводит к увеличению средней сжимаемости флюида и, как следствие, к резкому снижению эффективного коэффициента пьезопроводности  $\kappa$ .

**Распространение волны давления в пласте** Рассмотрим одномерную задачу движения плоской волны давления в полубесконечном пористом пласте. Предположим, что начальное давление флюида в пласте постоянно, а в нулевой момент времени давление на границе пласта скачком повышается на постоянную величину  $\delta p$  и далее все время поддерживается на этом уровне. Считая для простоты начальное давление нулевым:  $p_0 = 0$ <sup>1)</sup> и направляя ось  $Ox$  вдоль пласта, получим задачу

$$p'_t = \kappa p''_{xx}, \quad p(x, 0) = 0, \quad p(0, t) = \delta p, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = 0 \quad (12.3)$$

(начало координат выбрано на границе пласта). Решение задачи автомодельно и, в соответствии с  $\pi$ -теоремой, имеет вид

$$p = p(x, t, \kappa, \delta p) = \delta p \cdot f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}},$$

что сводит (12.3) к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$2f''(\xi) + \xi f'(\xi) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0,$$

решение которой выражается через функцию ошибок (рис. 27 а):

$$f(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi/2), \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\alpha^2) d\alpha.$$

В размерных переменных распределение давления дается выражением

$$p(x, t) = \delta p \cdot \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right);$$

<sup>1)</sup> В уравнение пьезопроводности входят только производные от давления.

качественный вид пространственного распределения давления для трех моментов времени  $t_1 < t_2 < t_3$  показан на рис. 27 б.

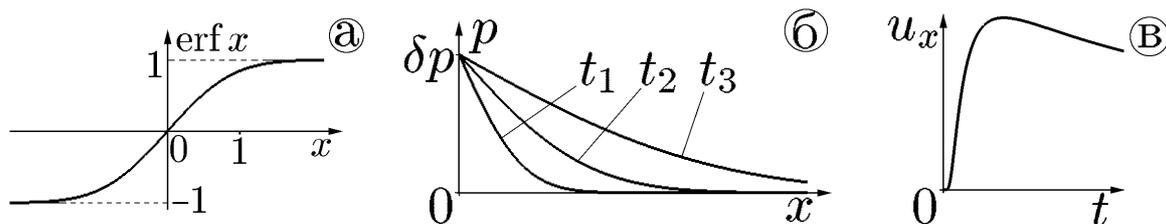


Рис. 27.

Скорость фильтрации, которая находится с помощью закона Дарси:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= -\frac{k(p(x, t))}{\mu(p(x, t))} p'_x(x, t) \approx -\frac{k_0}{\mu_0} p'_x(x, t) = \\ &= \frac{k_0 \delta p}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right), \end{aligned}$$

в каждой фиксированной внутренней точке пласта с течением времени сначала возрастает от нулевого значения до некоторого максимального, а затем постепенно падает до нуля при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 27 в).

С помощью этого решения несложно оценить характерное время  $\tau$  переходного процесса в упругом режиме:  $\tau \sim L^2/\kappa$ . При характерных параметрах  $K \sim 10^4$  атм,  $k \sim 10^{-8}$  см<sup>2</sup>,  $\mu \sim 10^{-2}$  г/(см·с),  $m \sim 1$  получим  $\kappa \sim 1$  м<sup>2</sup>/с, и если  $L \sim 10$  м, то  $\tau \sim 1$  мин, а при  $L \sim 10^3$  м  $\tau \sim 10$  сут.

### Пуск скважины с постоянным дебитом

В качестве второго примера использования уравнения пьезопроводности рассмотрим автомодельную задачу о пуске скважины с постоянным дебитом<sup>1)</sup>.

Пусть в тонкий однородный пласт, в котором первоначально находилась покоящаяся жидкость с постоянным давлением, в некоторый момент времени начинается закачка жидкости с постоянным объемным расходом  $Q$  (на единицу толщины пласта) через тонкую скважину. Полагая, как и раньше, начальное давление нулевым и пренебрегая толщиной скважины, получим систему для

<sup>1)</sup> Дебит (франц. débit — «расход» от лат. debitum — «долг») — объемный расход (колодца, скважины). Это название не следует путать с бухгалтерским термином *дебет*, восходящим к тому же латинскому корню, что и слово *дебит*.

нахождения распределения давления  $p(r, t)$ , где  $r$  — расстояние до скважины:

$$p'_t = \frac{\varkappa}{r} (r p'_r)'_r, \quad p(r, 0) = 0, \quad (12.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = 0, \quad Q = \lim_{r \rightarrow 0} \left( -2\pi r \frac{k_0}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial r} \right).$$

С учетом того, что параметры  $Q$ ,  $\mu_0$  и  $k_0$  входят в постановку задачи (12.4) только в комбинации  $Q\mu_0/k_0$ , вид зависимости давления от параметров задачи легко находится с помощью  $\pi$ -теоремы:

$$p = p(r, t, \varkappa, Q\mu_0/k_0) = \frac{Q\mu_0}{k_0} f(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\varkappa t}},$$

так что (12.4) сводится к краевой задаче

$$-f'(\xi)(1 + \xi^2/2) = \xi f''(\xi), \quad f(\infty) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi f'(\xi)) = -\frac{1}{2\pi},$$

решение которой имеет вид

$$f(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \text{Ei} \left( -\frac{\xi^2}{4} \right), \quad (12.5)$$

где  $\text{Ei}$  — интегральная показательная функция (рис. 28 а):

$$\text{Ei } x = \int_{-\infty}^x \frac{\exp \zeta}{\zeta} d\zeta, \quad x < 0.$$

Отсюда находятся распределения давления и скорости фильтрации:

$$p(r, t) = -\frac{Q\mu_0}{4\pi k_0} \text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4\varkappa t} \right), \quad u_r(r, t) = \frac{Q}{2\pi r} \exp \left( -\frac{r^2}{4\varkappa t} \right). \quad (12.6)$$

Качественный вид пространственного распределения давления  $p(r)$  при  $Q > 0$  (закачка в пласт) и при  $Q < 0$  (откачка из пласта или остановка работающей скважины) показан на рис. 28 б.

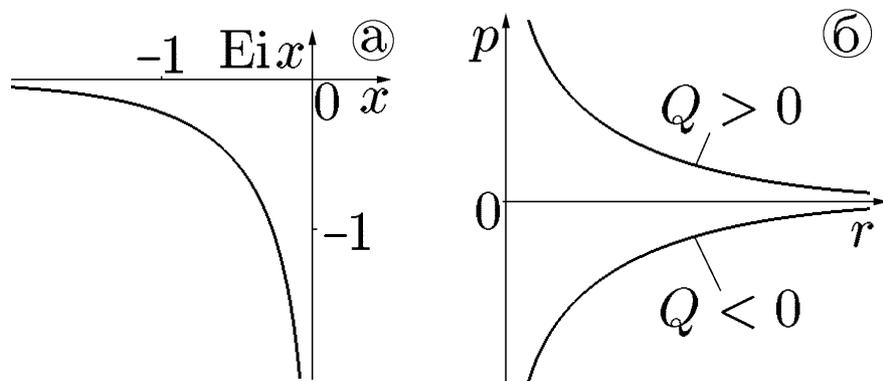


Рис. 28.

В фиксированной точке пласта  $r = r_0$  с течением времени давление возрастает от нулевого значения до бесконечности (рис. 29 а), а скорость фильтрации за время порядка  $\tau \sim r_0^2/\kappa$  становится практически постоянной, увеличиваясь от нуля до конечного асимптотического значения  $Q/(2\pi r_0)$ . При  $r_0 \sim 10^{-1}$  м, что соответствует радиусу реальных скважин, расход через поверхность  $r = r_0$  практически мгновенно становится постоянным ( $\tau \sim 10^{-2}$  с), поэтому это решение, несмотря на формальное обращение в бесконечность скорости фильтрации и давления при  $r \rightarrow \rightarrow 0$ , часто используется в гидрогеологических и нефтепромысловых расчетах.

### Об экспериментальном определении параметров пласта

Полученное решение (12.6) имеет важное значение потому, что оно позволяет определять неизвестные параметры пласта по экспериментальным временным зависимостям  $p(t)$ , измеряемым в самой скважине или в соседних измерительных скважинах<sup>1)</sup>.

Например, при больших временах (или вблизи скважины), что соответствует  $\xi \ll 1$ , формулу (12.5) можно упростить, воспользовавшись первыми двумя членами разложения интегральной показательной функции<sup>2)</sup>

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k! k} = C + \ln x - x + \frac{x^2}{4} - \dots, \quad x > 0,$$

<sup>1)</sup> График функции  $p(t)$  называют *кривой восстановления давления* (КВД).

<sup>2)</sup> Доказательство см., например, в книге: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1969.

где  $C = 0,577\dots$  — постоянная Эйлера – Маскерони, что приводит к асимптотической формуле

$$p(r_0, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi k_0} \ln \frac{2,25\kappa t}{r_0^2}.$$

На плоскости  $(\ln(\kappa t/r_0^2); p(r_0, t))$  этой зависимости соответствует прямая (пунктирная линия на рис. 29 б), к которой стремится действительная зависимость  $p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому построив в полулогарифмических координатах экспериментальную зависимость  $p(t)$  при известных  $r_0$  и  $Q\mu_0$  и определив касательную к прямолинейной части графика<sup>1)</sup>, можно найти значения  $\kappa$  и  $k_0$ .

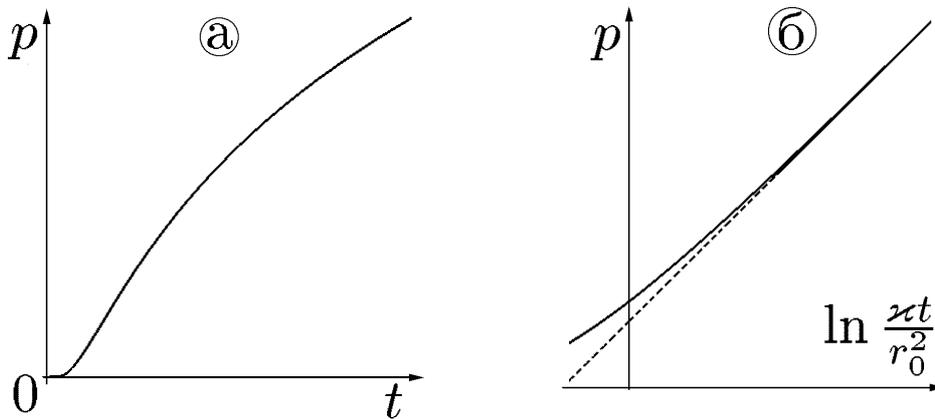


Рис. 29.

**О связи уравнений Лейбенсона, пьезопроводности и Лапласа**

С физической точки зрения три уравнения — Лейбенсона, пьезопроводности и уравнение Лапласа для фильтрации несжимаемой жидкости — являются уравнениями фильтрации упругой среды в трех характерных случаях, когда сжимаемость является соответственно сильной, слабой и бесконечно малой (отсутствует).

Правая часть уравнения Лейбенсона может быть преобразована к виду

$$\Delta(p^2) = \nabla_i(2p \nabla^i p) = 2(|\text{grad } p|^2 + p \Delta p),$$

и при малых возмущениях давления  $\delta p$  (по сравнению с фоновым значением  $p_0$ ) квадратом градиента давления можно пренебречь:

$$\frac{|\text{grad } p|^2}{p \Delta p} \sim \frac{(\delta p/L)^2}{p_0 \delta p/L^2} \sim \frac{\delta p}{p_0} \ll 1,$$

<sup>1)</sup> При достаточно больших временах на виде  $p(t)$  может сказываться влияние границ пласта.

что дает уравнение

$$p'_t = \frac{k p_0}{m\mu} \Delta p,$$

являющееся частным видом уравнения пьезопроводности в случае недеформируемого скелета ( $K_m \rightarrow \infty$ )<sup>1)</sup>.

Далее, при стремлении сжимаемостей флюида и скелета к нулю ( $K_\rho \rightarrow \infty$ ,  $K_m \rightarrow \infty$ ) коэффициент пьезопроводности  $\kappa$  обращается в бесконечность, и уравнение пьезопроводности переходит в уравнение Лапласа  $\Delta p = 0$ , описывающее фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемой среде.

### § 13. Неизотермическая фильтрация газа в недеформируемой пористой среде

При неизотермической фильтрации газа становятся важными эффекты, связанные с отличием его термодинамических свойств от свойств совершенного газа. Поэтому, прежде чем перейти к фильтрационным уравнениям, напомним общие соотношения для сред с произвольными уравнениями состояния.

**Термодинамика двухпараметрических сред** Первый и второй законы термодинамики постулируют для равновесных обратимых процессов существование двух функций состояния — массовых плотностей внутренней энергии  $U$  и энтропии  $S$ , для которых в случае двухпараметрического газа выполняется дифференциальное соотношение

$$\delta Q = T dS = dU + p dV, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad (13.1)$$

где  $\delta Q$  — массовая плотность притока тепла<sup>2)</sup>,  $T$  — абсолютная температура. Из равенства (13.1), записанного в виде

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + p dV = \left( \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \right) + p dV = \\ &= T dS = T \left( \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT \right) = T \left( \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT \right), \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Для газа модуль упругости  $K_\rho = p_0$ , т.к. изотермическое уравнение состояния  $\rho = \rho_0 p/p_0$  можно записать в виде  $\rho = \rho_0(1 + (p - p_0)/p_0)$ .

<sup>2)</sup> Приток тепла — дифференциальная форма  $\delta Q = f_1(p, V) dp + f_2(p, V) dV$ , в общем случае не являющаяся, в отличие от  $dS$  и  $dU$ , полным дифференциалом, что подчеркивается символом « $\delta$ » в обозначении.

легко получают выражения для удельных *теплоемкостей* при постоянном объеме  $c_v = c_v(V, T)$  и при постоянном давлении  $c_p = c_p(V, T)$ :

$$\begin{aligned} c_v &\equiv \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_{dV=0} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \\ c_p &\equiv \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_{dp=0} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left( \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p. \end{aligned} \quad (13.2)$$

В некоторых случаях удобно пользоваться не внутренней энергией  $U$ , а другими функциями состояния: *свободной энергией* (энергией Гельмгольца)  $F = U - TS$ , *энтальпией* (теплосодержанием)  $H = U + pV$ <sup>1)</sup> и *потенциалом Гиббса*  $\Phi = U - TS + pV$ , для которых из (13.1) получаются дифференциальные соотношения

$$dF = -p dV - S dT, \quad dH = T dS + V dp, \quad d\Phi = -S dT + V dp. \quad (13.3)$$

Эти равенства, между прочим, объясняют происхождение названий  $F$  и  $H$ : в *изотермическом* процессе изменение  $F$  равно (с точностью до знака) *работе* системы над внешними телами, т.е. выделению энергии в той форме, которой с практической точки зрения можно «свободно» распоряжаться<sup>2)</sup>, а в *изобарическом* процессе изменение энтальпии, получившей название от греческого  $\epsilon\nu\theta\alpha\lambda\pi\omega$  — «нагреваю», равно теплоте, подведенной к системе<sup>3)</sup>. В силу того, что правые части равенств в (13.3) являются полными дифференциалами, для перекрестных производных от коэффициентов в этих дифференциальных формах выполняются тождества Максвелла

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p, \quad - \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (13.4)$$

Для задания термодинамических свойств конкретной среды достаточно указать две функции: уравнение состояния  $p = p(V, T)$  и теплоемкость при постоянном объеме  $c_v = c_v(V, T)$  — как говорят, термическое и калорическое уравнения состояния<sup>4)</sup>. По этим данным все

<sup>1)</sup> В этом параграфе не используется пьезометрический напор, обозначаемый в остальном тексте тем же символом  $H$ .

<sup>2)</sup> Отметим, что другая форма обмена энергией с внешними телами — за счет теплообмена — в изотермическом процессе в общем случае также присутствует.

<sup>3)</sup> Поэтому энтальпию удобно использовать для расчета теплового эффекта химических реакций, происходящих при постоянном давлении.

<sup>4)</sup> Возможны и другие способы задания термодинамических свойств среды, например указание *одной* функции  $U(S, V)$ .

остальные термодинамические функции вычисляются с точностью до соответствующих постоянных.

Например, энтропия, с учетом (13.2) и первого равенства в (13.4), находится с помощью криволинейного интеграла

$$S = S_0 + \int \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT = S_0 + \int \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV + \frac{c_v}{T} dT, \quad (13.5)$$

который можно вычислять по *любому* пути на плоскости  $(V; T)$ . Далее с помощью (13.5) вычисляется удельная внутренняя энергия

$$U = U_0 + \int T dS - p dV = U_0 + \int \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right) dV + c_v dT, \quad (13.6)$$

зная которую легко определить теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  из второго равенства (13.2)<sup>1)</sup>:

$$c_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V - \left( \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right) \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V / \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T. \quad (13.7)$$

Отметим, что из (13.6) следует, что выражения для  $p(V, T)$  и  $c_v(V, T)$  нельзя задавать произвольно, т.к. между ними имеется связь

$$\left( \frac{\partial c_v}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right) \right)_V. \quad (13.8)$$

Далее нам понадобится еще дифференциальное равенство для энтальпии, которое получается из

$$dH = T dS + V dp = T \left( \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT \right) + V dp$$

с помощью второго равенства в (13.2) и последнего равенства в (13.4):

$$dH = T \left( - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp + \frac{c_p}{T} dT \right) + V dp = c_p (dT - J dp), \quad (13.9)$$

где введен коэффициент Джоуля – Томсона

$$J = \frac{T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V}{c_p} = - \frac{T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V / \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + V}{c_p}. \quad (13.10)$$

---

1) С использованием равенства  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V / \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$ , которое справедливо для любой функциональной зависимости  $f(p, V, T) = 0$  и в более симметричной форме имеет вид  $\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -1$ .

Физический смысл коэффициента Джоуля – Томсона  $J$  определяется тем, что он характеризует изменение температуры газа в процессе с постоянной энтальпией<sup>1)</sup>: если  $J > 0$ , то при изоэнтальпическом понижении давления газ охлаждается:  $dT = J dp < 0$ ; в противном случае ( $J < 0$ ) происходит нагревание газа. Отличие коэффициента Джоуля – Томсона от нуля связано с межмолекулярным взаимодействием и, как следствие, с термодинамическим несовершенством газа; для совершенного газа, для которого  $c_v = \text{const}$ ,  $pV = RT$ ,  $R = c_p - c_v = \text{const}$ , как легко убедиться с помощью (13.10),  $J \equiv 0$ .

В качестве простейшего примера несовершенного газа рассмотрим газ Ван-дер-Ваальса с постоянной теплоемкостью при постоянном объеме<sup>2)</sup>:

$$p(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \quad c_v(V, T) = \text{const},$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $R$  — некоторые положительные константы<sup>3)</sup>, для которого, заметим, выполняется (13.8). В этом случае формулы (13.5) и (13.6) дают

$$S(V, T) - S_0 = R \ln \frac{V - b}{V_0 - b} + c_v \ln \frac{T}{T_0},$$

$$U(V, T) - U_0 = -a \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) + c_v(T - T_0),$$

откуда, с учетом (13.7) и (13.10), получается несколько громоздкое выражение

$$J(V, T) = -\frac{(TRb - 2a)V^3 + 4abV^2 - 2ab^2V}{R(c_v + R)TV^3 - 2c_v aV^2 + 4c_v abV - 2c_v ab^2}, \quad (13.11)$$

которое с точностью до членов, линейных по  $\varepsilon_1 = b/V \ll 1$  и  $\varepsilon_2 =$

<sup>1)</sup> Таким процессом, например, приближенно является медленное стационарное течение газа, когда в интеграле Бернулли  $v^2/2 + H = \text{const}$  можно пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым.

<sup>2)</sup> Обратим внимание, что для такого газа теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$ , в отличие от совершенного газа с постоянной теплоемкостью  $c_v$ , уже не будет постоянной.

<sup>3)</sup> Например, при оценках для воздуха в окрестности нормальных условий можно принять  $a = 1,6 \cdot 10^2 \text{ м}^5/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ ,  $b = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}$ ,  $R = 2,9 \cdot 10^2 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  $c_v = 7,6 \cdot 10^2 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

$= a/(RTV) \ll 1^1)$ , дает

$$J \approx \frac{2a/(RT) - b}{c_v + R}.$$

### Анализ уравнения баланса энергии

При изучении фильтрационных процессов в уравнении энергии (5.8) (см. стр. 31) удобно вместо внутренней энергии  $U$  использовать энтальпию  $H = U + p/\rho$ . Делая соответствующую замену и используя уравнение неразрывности (3.1), получим уравнение

$$\rho m \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_c U_c(1-m)) + \rho \mathbf{u} \cdot \text{grad } H = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{q}_{\text{СУМ}}, \quad (13.12)$$

которое при постоянной пористости и в пренебрежении массовыми силами приводится, с учетом термодинамического соотношения для полных производных вдоль (макроскопического) движения материальных частиц

$$\frac{dH}{dt} = c_p \left( \frac{dT}{dt} - J \frac{dp}{dt} \right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u^i}{m} \cdot \nabla_i,$$

к виду

$$(\rho m c_p + \mathcal{K}) \frac{\partial T}{\partial t} - m(1 + \rho c_p J) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho c_p \mathbf{u} \cdot (J \text{ grad } p - \text{grad } T) - \text{div } \mathbf{q}_{\text{СУМ}}, \quad (13.13)$$

где предполагается, что для скелета выполнено соотношение  $\rho_c U_c(1-m) = \mathcal{K}T$ ,  $\mathcal{K} = \text{const}$ .

Если, в частности, газ в пористой среде покоится ( $\mathbf{u} = 0$  и, следовательно,  $p = \text{const}$ ), то в случае справедливости закона Фурье (5.7) уравнение (13.13) при  $\kappa_{\text{эф}} = \text{const}$  превращается в обычное уравнение теплопроводности

$$(\rho m c_p + \mathcal{K}) \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{\text{эф}} \Delta T.$$

<sup>1)</sup> При  $p = 10$  атм,  $T = 300$  К для воздуха  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim 10^{-2}$ . Для оценок приведем значения коэффициента Джоуля – Томсона, которые дает (13.11) при этих условиях: воздух – 0,23 К/атм, метан – 0,39 К/атм; для водорода  $J = -0,026$  К/атм  $< 0$ .

Для стационарной фильтрации (13.13) превращается в уравнение

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \text{grad } T = \rho c_p J \mathbf{u} \cdot \text{grad } p + \kappa_{\text{эф}} \Delta T. \quad (13.14)$$

Для условий, характерных для движения природного газа в подземных пластах, передача тепла *вдоль течения* за счет *теплопроводности* существенно меньше, чем за счет *конвекции*. В самом деле, если разложить вектор потока тепла на две составляющие — вдоль и поперек потока газа:

$$\mathbf{q}_{\text{сум}} = q_{\text{сум}}^{(n)} \mathbf{n} + \mathbf{q}_{\text{сум}}^{(\tau)},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении скорости фильтрации, то оценка отношения членов, соответствующих названным механизмам переноса энергии, дает, с учетом закона Дарси,

$$\frac{\text{div}(q_{\text{сум}}^{(n)} \mathbf{n})}{\rho c_p \mathbf{u} \cdot \text{grad } T} \sim \kappa_{\text{эф}} \frac{\delta T}{L^2} / \left( \rho c_p \frac{k}{\mu} \frac{\delta p}{L} \frac{\delta T}{L} \right) = \frac{\kappa_{\text{эф}} \mu}{\rho c_p k \delta p},$$

где  $L$  — характерный *продольный* размер задачи, так что при типичных параметрах  $\kappa_{\text{эф}} \sim 1$  Вт/(м·К),  $\mu \sim 10^{-5}$  Па·с,  $\rho \sim 10$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_p \sim 10^3$  Дж/(кг·К),  $k \sim 10^{-13}$  м<sup>2</sup>,  $\delta p \sim 10$  атм это отношение имеет порядок  $10^{-2} \ll 1$  и последний член в (13.14) можно записывать с учетом только *поперечного* теплообмена — в виде  $\text{div } \mathbf{q}_{\text{сум}}^{(\tau)}$ .

Если теплопроводностью можно *полностью* пренебречь, то из (13.12) следует постоянство энтальпии  $H$  вдоль линий тока при стационарной фильтрации<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } H = 0.$$

Обратим внимание, что несмотря на то, что в этом приближении рассматриваемый (необратимый) процесс является *адиабатическим* (объемные и поверхностные притоки тепла отсутствуют), он не является *изоэнтропическим*, т.к. энтропия газа возрастает

<sup>1)</sup> В частном случае *совершенного* газа ( $H = c_p T$ ,  $c_p = \text{const}$ ) это дает постоянство температуры вдоль линий тока.

за счет действия вязких сил<sup>1)</sup>), уравновешивающих отрицательный градиент давления вдоль линий тока:

$$dS = \frac{1}{T}(dH - V dp) = -\frac{V dp}{T} \geq 0.$$

**Процесс Джоуля — Томсона** В качестве примера неизо термического фильтрационного процесса рассмотрим одномерное стационарное движение несовершенного газа в пористом образце длиной  $L$ , заключенном в цилиндрический канал.

Пусть с одной стороны от пористой среды находится газ с постоянными заданными давлением  $p_1$  и температурой  $T_1$ <sup>2)</sup>, который фильтруется через пористую среду в область с постоянным заданным давлением  $p_2 < p_1$  (рис. 30). Постоянная температура газа  $T_2$  на выходе из образца заранее неизвестна и находится из решения задачи.

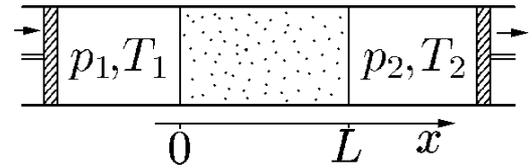


Рис. 30.

Пренебрегая теплопроводностью, можно записать систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности, закона Дарси и уравнения энергии:

$$(\rho u)'_x = 0, \quad p'_x = -\frac{k}{\mu} u, \quad \rho c_p u (T'_x - J p'_x) = 0, \quad (13.15)$$

к которой добавляются (известные) определяющие соотношения

$$\mu = \mu(p, T), \quad \rho = \rho(p, T), \quad J = J(p, T), \quad c_p = c_p(p, T)$$

и граничные условия

$$p(0) = p_1, \quad T(0) = T_1, \quad p(L) = p_2.$$

Из последнего уравнения (13.15) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{dp} = J(p, T), \quad T(p_1) = T_1,$$

<sup>1)</sup> На микроуровне рост энтропии описывается уравнением  $\rho \frac{dS}{dt} = \tau^{ij} e_{ij} / T \geq 0$ .

<sup>2)</sup> Параметры газа поддерживаются, например, с помощью соответствующего движения поршня.

из которого находится зависимость  $T = T(p)$  и, в частности, конечная температура газа  $T_2 = T(p_2)$ , после чего можно считать, что вязкость и плотность газа (в данном процессе) зависят только от давления известным образом:

$$\mu = \mu(p, T(p)) = \mu(p), \quad \rho = \rho(p, T(p)) = \rho(p).$$

Далее распределение давления находится интегрированием закона Дарси с учетом постоянства массового расхода  $Q_M = \rho(x)u(x) = \text{const}$ :

$$\int_{p(x)}^{p_1} \frac{\mu(\tilde{p})\rho(\tilde{p})}{kQ_M} d\tilde{p} = x, \quad Q_M = \int_{p_2}^{p_1} \frac{\mu(\tilde{p})\rho(\tilde{p})}{kL} d\tilde{p}.$$

Исторически рассмотренная задача связана с именами известных английских физиков Дж.Джоуля и У.Томсона (лорда Кельвина), которые в 1850-х гг. экспериментально обнаружили изменение температуры газа (*эффект Джоуля – Томсона*) при медленном течении через пористую перегородку, что связано, как мы видели, с отклонением от нуля коэффициента  $J$ . Этот эффект (в случае  $J > 0$ ) используется, например, в некоторых промышленных установках для сжижения газов при низких температурах.

## Литература

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
3. Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н. и др. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 304 с.
4. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
5. Бондаренко Н. Ф. Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 216 с.
6. Галин Г. Я., Голубятников А. Н., Каменярж Я. А. и др. Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М. Э. Эглит. М.: Московский лицей, 1996. Т. 1. Теория и задачи. 369 с. Т. 2. Ответы и решения. 394 с.
7. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Пер. с англ. под ред. Г. И. Баренблатта. М.: Мир, 1964. 352 с.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Под ред. И. А. Кибеля. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 584 с. Ч. 2. 728 с.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
10. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.
11. Михайлов Г. К., Николаевский В. Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. В 4-х т. Т. 2. Механика жидкости и газа. Под ред. Л. И. Седова, Я. Б. Зельдовича, А. Ю. Ишлинского и др. М.: Наука, 1970, с. 585–648.
12. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т. и др. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 336 с.

13. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
14. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды. СПб.: Лань, 2004. Т. 1. 528 с. Т. 2. 560 с.
15. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
16. Х а п п е л ь Дж., Б р е н н е р Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Пер. с англ. под ред. Ю. А. Буевича. М.: Мир, 1976. 632 с.
17. Ч а р н ы й И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
18. Ш е й д е г г е р А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. Пер. с англ. под ред. И. М. Муравьева. М.: Гостоптехиздат, 1960. 252 с.



*Учебное издание*

ЛЕОНТЬЕВ НИКОЛАЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Учебное пособие

Подписано в печать 23.03.2009.

Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Объем 5,5 печ.л.

Заказ 12.

Тираж 50 экз.

---

Издательство Центра прикладных исследований при  
механико-математическом факультете МГУ.  
119992, Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ им.  
М.В.Ломоносова, Главное здание, механико-матема-  
тический факультет.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механи-  
ко-математического факультета МГУ.