

УДК 532.529.5

ДВУХКОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ В ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА

© 2010 г. С. А. Боронин, А. А. Осипцов

Представлено академиком А.С. Коротеевым 11.11.2009 г.

Поступило 11.11.2009 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы является построение асимптотической двухконтинуальной модели течения суспензии в вертикальной трещине гидроразрыва с учетом конечной объемной доли частиц и рассогласования скоростей фаз. Изучение данного явления представляет интерес в связи с необходимостью построения математических моделей для внедрения в коммерческие программные комплексы, которые используются при численном моделировании течения суспензии в трещине в приложении к технологии гидроразрыва нефтеносного пласта [1]. Существующие модели переноса частиц в трещине [2–4] были постулированы в рамках приближения эффективной жидкости, где суспензия считается вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью и вязкостью, зависящими от объемной концентрации частиц.

Рассматривается трехмерное нестационарное ламинарное течение суспензии в вертикальной трещине гидроразрыва в поле силы тяжести \mathbf{g} . Несущая фаза – вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость плотности ρ_f^0 и вязкости μ_0 . Дисперсная среда состоит из одинаковых неколлоидных сферических частиц радиуса σ с плотностью материала ρ_p^0 и массой одиночной частицы m . Трещина считается вертикальным каналом переменной ширины w . Вводится система координат $Oxyz$ с осями x и y , направленными по горизонтали и вертикали, и с осью z , направленной перпендикулярно срединной плоскости трещины. Единичные орты системы координат обозначены $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Суспензия рассматривается как комбинация двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов: среды частиц и несущей фазы. Среда частиц характеризуется объемной концентрацией

C , числовой концентрацией n_p , плотностью $\rho_p = C\rho_p^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_p . Несущая фаза описывается осредненной плотностью $\rho_f = (1 - C)\rho_f^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_f .

В рамках двухконтинуального подхода [5] дифференциальные уравнения законов сохранения массы и импульса для каждой фазы записываются в размерной форме:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla(\rho_p \mathbf{v}_p) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_f \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} = -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_f \mathbf{g} - n_p \mathbf{F}_p, \quad (2)$$

$$\rho_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = -\nabla p_p + \nabla_j \tau_p^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_p \mathbf{g} + n_p \mathbf{F}_p, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_f}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \nabla) \mathbf{v}_f, \quad \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \nabla) \mathbf{v}_p.$$

Граничные условия в размерной форме имеют вид

$$x = 0: \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0}(t, y, z), \quad C = C_0(t, y, z),$$

$$z = \pm \frac{w}{2}: u_f = v_f = 0, \quad w_f = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \pm v_l, \quad (4)$$

$$w_p = 0.$$

На входе в трещину задается скорость жидкости \mathbf{v}_{f0} и концентрация частиц C_0 . На стенках трещины задана нормальная скорость жидкости v_l , а также условие отсутствия оттока частиц. Предполагается, что при гравитационном осаждении хаотическая скорость частиц мала, поэтому можно пренебречь тензором напряжений в среде частиц:

$p_p = 0, \tau_p^{ij} = 0$ [6]. Вследствие конечности объемной доли частиц и рассогласования скоростей фаз плотности среды частиц, несущей фазы и суспензии переменны, а следовательно, среднемассовые скорости фаз и смеси являются дивергентными. Будем считать, что тензор напряжений для несущей фазы можно принять как для вязкой сжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от объемной концентрации частиц [6]:

Московский научно-исследовательский центр
компании Шлюмберже

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

$$\tau_f^{ij} = 2\mu_0\mu(C)\left(e^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\nabla\mathbf{v}_f\right), \quad \mu(0) = 1$$

$$\mu(C) = \left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right)^{-1.89}, \quad C_{\max} = 0.65.$$

Зависимость вязкости от объемной доли частиц определяется формулой Скотта [7]. В выражении для межфазной силы учитывается сила Стокса с поправкой на конечную объемную долю частиц $f(C)$, а также сила Архимеда

$$\mathbf{F}_p = 6\pi\sigma\mu_0(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)\frac{1}{f(C)} - \frac{4}{3}\pi\sigma^3\rho_f^0\mathbf{g}.$$

ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В безразмерных переменных с использованием характерных масштабов скорости U , длины (высоты) L и ширины d трещины из (1)–(3) получены следующие уравнения:

$$\nabla[(1-C)\mathbf{v}_f + C\mathbf{v}_p] = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(C\mathbf{v}_p) = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{-1}\text{Re}\left[(1-C)\frac{d\mathbf{v}_f}{dt} + \eta C\frac{d\mathbf{v}_p}{dt}\right] =$$

$$= -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i - \text{Bu}_0[1 + C(\eta - 1)]\mathbf{e}_2, \quad (6)$$

$$\varepsilon \text{St} \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)\frac{1}{f(C)} - \frac{\text{St}}{\text{Fr}^2}\left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)\mathbf{e}_3, \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{d}{L}, \quad \text{St} = \frac{mU}{6\pi\sigma\mu_0 d}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gd}},$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_f^0 U d}{\mu_0}, \quad \eta = \frac{\rho_p^0}{\rho_f^0}, \quad \text{Bu}_0 = \frac{\text{Re}}{\varepsilon^2 \text{Fr}^2}.$$

В первом уравнении (5) выражение в скобках – среднеобъемная скорость суспензии. Используется приближение тонкого слоя и рассматривается следующий асимптотический предел:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \nabla w \ll 1, \quad \text{St} \sim 1, \quad \text{Fr} \sim 1, \quad (8)$$

$$\text{Re} \sim 1, \quad \eta \sim 1.$$

Вводятся новые функции, осредненные поперек трещины:

$$H(t, x, y) = \frac{1}{2} \int_{-w/2}^{w/2} h(t, x, y, z) dz.$$

Как и в существующих моделях, предполагается, что профиль концентрации частиц поперек трещины является однородным. Из (5)–(7) в асимптотическом пределе (8) получены следующие двумерные осредненные уравнения:

$$\frac{\partial wC}{\partial t} + \nabla(wC\mathbf{v}_p) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \left[\frac{w^3}{12\mu(C)} (\nabla P + \text{Bu}[1 + C(\eta - 1)]\mathbf{e}_2) - wC\mathbf{v}_s \right] - 2v_l, \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_f = -\frac{w^2}{12\mu(C)} (\nabla P + \text{Bu}[1 + C(\eta - 1)]\mathbf{e}_2), \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_s,$$

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\text{St}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) f(C) \mathbf{e}_2,$$

$$f(C) = \left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right)^\alpha, \quad \text{Bu} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2}.$$

Для решения уравнения (9) задаются начальные и краевые условия для концентрации (4):

$$t = 0: C = 0, \quad (x, y) \in \left[0, \frac{L}{H}\right] \times [0, 1];$$

$$x = 0: C = C_0, \quad y \in [y_1, y_2].$$

Граничные условия для уравнения (10) следуют из (4):

$$x = 0: \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu(C)}{w^2}, \quad y \in [y_1, y_2];$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, y_1], [y_2, 1],$$

$$x = \frac{L}{H}: \frac{\partial p}{\partial y} = -\text{Bu};$$

$$y = 0, 1: \frac{\partial p}{\partial y} = -\text{Bu}(1 + C|_{y=0,1}(\eta, 1)).$$

Скорость осаждения частиц определяется эмпирической формулой, которая учитывает уменьшение скорости осаждения включений при увеличении их объемной доли. Существующие модели эффективной жидкости содержат предположение, что среднеобъемная скорость суспензии описывается законом Пуазейля, тогда как в данной работе в рамках двухконтинуального подхода на основе законов сохранения показано, что формулой Пуазейля описывается среднеобъемная скорость несущей фазы (11). Также в ранних моделях выражение для скорости частиц (11) вместо среднеобъемной скорости жидкой фазы содержало среднеобъемную скорость суспензии. Как следствие, в отличие от существующих моделей, двухконтинуальная модель содержит дополнительное слагаемое $-\nabla(wC\mathbf{v}_s)$ в правой части уравнения для давления (10), учитывающее двухскоростные эффекты.

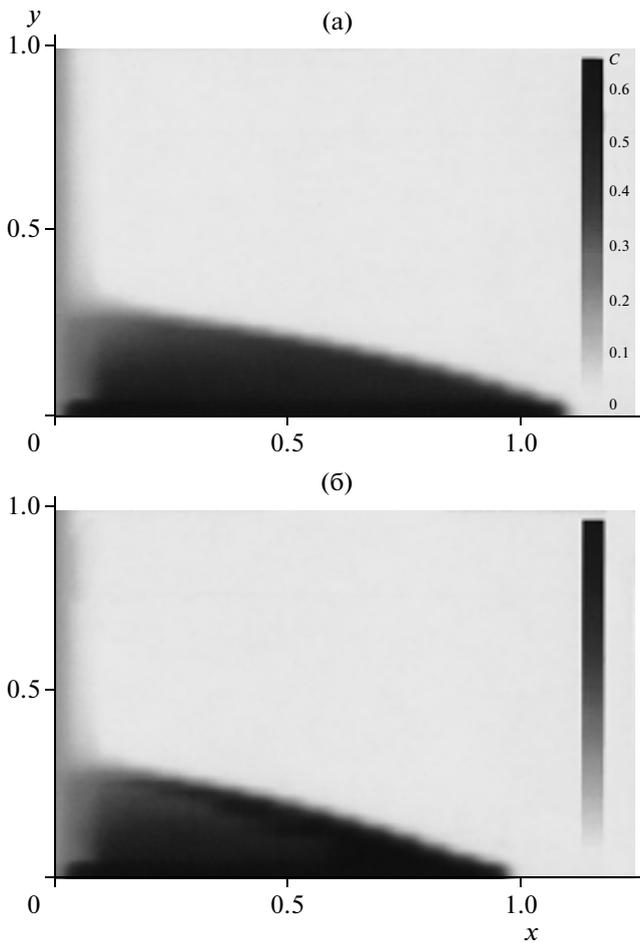


Рис. 1. Распределения концентрации частиц в трещине эллиптического сечения в момент $t = 0.5$, полученные в рамках односкоростной (а) и двухконтинуальной (б) моделей при $Vu = 3260$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для оценки влияния двухскоростных эффектов на перенос и оседание частиц в трещине гидроразрыва проведено численное решение системы уравнений (9)–(10) на равномерной прямоугольной сетке. Решение эллиптического уравнения (10) получено конечно-разностным методом с погрешностью аппроксимации второго порядка. Найденная система линейных уравнений с пятидиагональной матрицей решена методом сопряженных градиентов. Для решения уравнения переноса (9) использована TVD-схема с погрешностью аппроксимации второго порядка по пространству и первого порядка по времени [8]. Расчеты проводили при соотношении сторон расчетной области $\frac{L}{H} = 5$ для двух типов трещин: с прямоугольным или с эллиптическим вертикальным поперечным сечением при $v_1 = 0, \alpha = 5, y_1 = 0, y_2 = 1, \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{6}$,

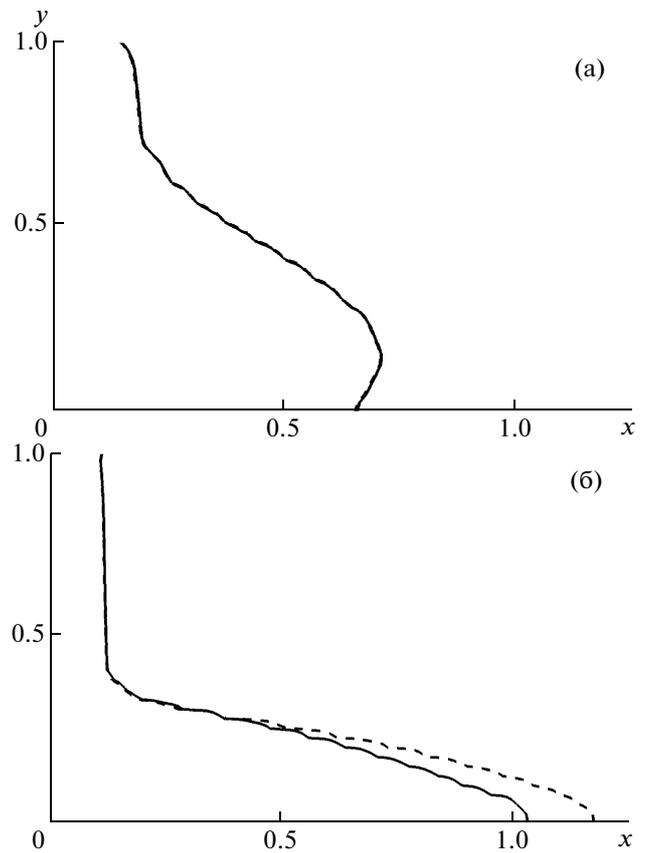


Рис. 2. Положение фронта концентрации частиц в трещине эллиптического сечения в момент $t = 0.5$ для $Vu = 326$ (а) и 3260 (б). Результаты получены при использовании односкоростной (штриховая линия) и двухскоростной (сплошная линия) моделей.

$\eta = 3, C_0 = 0.2$. Для проверки достоверности результатов предпринята серия расчетов на сгущающихся сетках. Итоговые результаты были получены на сетке, обеспечивающей необходимую точность вычислений.

Проведено параметрическое исследование. На рис. 1 представлены характерные распределения концентрации частиц через некоторое время после начала закачки суспензии в трещину, полученные в рамках модели эффективной жидкости и двухконтинуальной модели, предложенной в настоящей работе. Для расчетов по модели эффективной жидкости использовались уравнения (9), (10) без дополнительных членов за счет двухконтинуальных эффектов. Показано, что отношение дополнительного слагаемого к числу плавучести Vu в (10) пропорционально $\xi = \left(\frac{\sigma}{d}\right)^2 (\eta - 1)$.

При фиксированном ξ увеличение Vu приводит к увеличению влияния двухскоростных эффектов на распределение концентрации частиц в трещине (рис. 2). При $Vu > 10^3$ различие между расчета-

ми по модели эффективной жидкости и по двухконтинуальной модели достигает 15% и более (рис. 2б). Влияние двухконтинуальных эффектов на распространение трещины гидроразрыва было предварительно исследовано численно с помощью коммерческого программного комплекса. Установлено, что двухконтинуальные эффекты оказывают незначительное влияние на закон роста трещины в рассмотренном диапазоне параметров.

Построена двухконтинуальная модель течения суспензии в вертикальной трещине гидроразрыва. По сравнению с существующими в литературе моделями, полученными в приближении эффективной жидкости, двухконтинуальные уравнения включают дополнительный дифференциальный член, содержащий объемную долю и скорость осаждения частиц. Проведен ряд численных расчетов для оценки влияния дополнительного слагаемого на перенос и осаждение частиц. Показано, что различия между моделью течения суспензии, построенной ранее на основе эвристического односкоростного подхода, и двухконтинуальной моделью, предложенной в данной работе на основе законов сохранения механики многофазных сред, являются существенными, однако оказывают малое влияние на закон роста трещины гидроразрыва по результатам предварительного исследования со-

пряженной задачи. В дальнейшем представляют интерес учет полидисперсности суспензии и взаимодействия частиц между собой, сравнение предложенной модели с экспериментом, а также более детальное исследование сопряженной задачи о росте трещины гидроразрыва и о транспорте частиц в рамках двухскоростной модели течения суспензии, предложенной в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Economides M.J., Nolte K.G.* Reservoir Stimulation. N.Y.: Wiley, 2000.
2. *Pearson J.R.A.* // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1994. V. 54. P. 503–513.
3. *Hammond P.S.* // Chem. Eng. Sci. 1995. V. 50. № 20. P. 3247–3260.
4. *McCaffery S.J., Elliott L., Ingham D.B.* Enhanced Sedimentation in Inclined Fracture Channels // Topics Eng. 1997. V. 32. (CD-ROM ISBN 1–85312–546–6).
5. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1/2.
6. *Боронин С.А.* // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 40–53.
7. *Thomas D.G.* // J. Colloid. Sci. 1965. V. 20. P. 267–277.
8. *Hirsch C.* Numerical Computation of External and Internal Flows. 2nd ed. The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. N.Y.: Elsevier, 2007. (ISBN: 978–0–7506–6594–0).