

УДК 532.529.5

© 2009 г. Е. С. АСМОЛОВ, Н. А. ЛЕБЕДЕВА, А. А. ОСИПЦОВ

**ИНЕРЦИОННАЯ МИГРАЦИЯ ОСАЖДАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ
ПРИ ТЕЧЕНИИ СУСПЕНЗИИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ–ШОУ**

В рамках модели двух взаимопроникающих континуумов исследуется горизонтальное ламинарное течение разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле–Шоу. С использованием метода сращиваемых разложений построена асимптотическая модель поперечной миграции осаждающихся частиц. Миграция в горизонтальном сечении ячейки вызвана инерционной боковой силой, возникающей за счет осаждения частиц и сдвигового характера течения несущей фазы. Найден характерный продольный масштаб длины, на котором частицы мигрируют поперек течения на расстояние порядка полуширины канала. Эволюция полей числовой концентрации и скорости среды частиц вдоль ячейки исследована с помощью полного лагранжева метода. В зависимости от параметра инерционности частиц обнаружены различные режимы миграции с пересечением и без пересечения частицами средней линии канала. Аналитически найдено критическое значение параметра инерционности, соответствующее смене режимов миграции. Установлены возможности пересечения траекторий частиц и появления сингулярностей в поле числовой концентрации дисперсной примеси.

Ключевые слова: боковая сила, гидроразрыв, инерционная миграция, осаждение, суспензия, частица, ячейка Хеле–Шоу.

Предмет исследования настоящей работы – инерционная миграция осаждающихся неброуновских частиц при горизонтальном течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле–Шоу [1]. Внимание к изучению течений суспензии в канале обусловлено широким кругом возможных приложений в биомеханических, химических и нефтегазовых технологиях. Построение полной модели переноса частиц в вертикальном плоском канале, и, в частности, рассмотрение задачи о миграции частиц в горизонтальном сечении канала представляет интерес в связи с необходимостью моделирования переноса расклинивающих частиц (проппанта) в трещине гидроразрыва [2–4]. Технология гидроразрыва, применяемая для интенсификации нефтеотдачи, основана на создании в нефтеносном пласте трещины, заполненной высокопроницаемым гранулированным материалом, путем закачивания суспензии в скважину под большим давлением. Так как минимальное главное напряжение в пласте, как правило, направлено горизонтально, трещина гидроразрыва находится в вертикальной плоскости и хорошо аппроксимируется моделью плоского канала, т.е. моделью ячейки Хеле–Шоу.

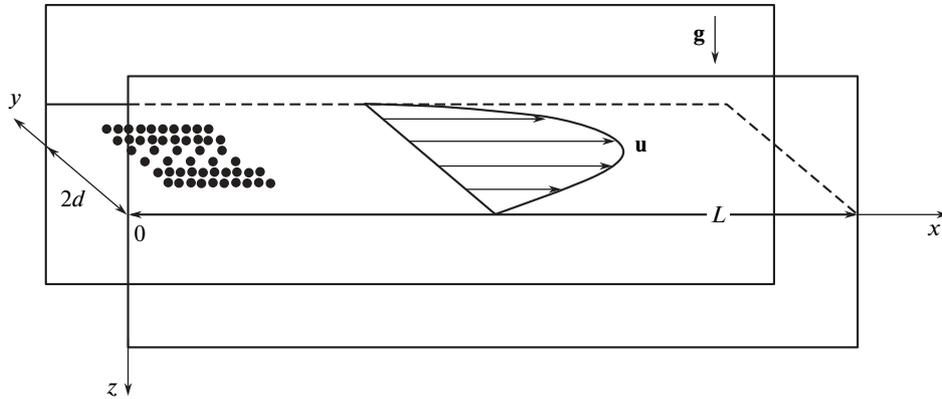
Общая задача о построении модели переноса и осаждения частиц в ячейке Хеле–Шоу решалась в ряде работ, в частности, в [2, 3]. В приближении тонкого слоя были получены двумерные уравнения переноса частиц, осредненные поперек канала. В большинстве работ при осреднении предполагалось, что поперечный профиль концентрации частиц является равномерным. В [2] был также рассмотрен предельный случай, когда в результате миграции частиц к центру канала на средней плоскости канала образуется слой плотно упакованных частиц. Было показано, что в этом случае закон переноса и осаждения частиц в ячейке существенно отличается от случая равномерного профиля концентрации частиц. Однако в литературе пока отсутствуют осредненные модели переноса частиц в ячейке Хеле–Шоу, которые бы учитывали неравно-

мерный поперечный профиль концентрации, формирующийся в результате миграции частиц. При построении такой модели требуется рассматривать течение в ячейке Хеле–Шоу на трех существенно различных характерных масштабах длины: радиус частицы, ширина ячейки и длина (высота) ячейки. Таким образом, эта задача распадается на три подзадачи: а) задача о боковой силе на частицу на масштабе радиуса частицы, б) задача о поперечной миграции частиц в горизонтальном сечении ячейки под действием боковой силы, найденной в результате решения задачи а), и в) задача о переносе и осаждении частиц на масштабе длины (высоты) ячейки.

Задача а) по определению боковой силы на частицу в сдвиговых потоках вязкой жидкости активно исследовалась как экспериментально [5–7], так и теоретически [8–13]. В экспериментах [5] было обнаружено, что под действием инерционной боковой силы нейтрально-плавучие частицы в течении Пуазейля в трубе при малых числах Рейнольдса канала аккумулируются на расстоянии 0.6 радиуса от оси трубы. Большинство теоретических работ посвящено расчету инерционной поперечной силы для случая, когда относительная скорость частицы параллельна скорости несущей фазы. Инерционная боковая сила, действующая на сферу в неограниченном линейном сдвиговом потоке, была найдена в [8] (сила Сэффмана). Также рассматривались задачи о боковой силе на частицу в линейном сдвиговом течении в присутствии стенок [9, 10] и в течении Пуазейля [11–13]. В недавней работе [14] была найдена поперечная сила на частицу, осаждающуюся в горизонтальном течении Пуазейля через вертикальный плоский канал. В данной конфигурации поперечная сила возникает из-за рассогласования скоростей фаз в направлении, перпендикулярном скорости течения несущей фазы.

Сравнительно меньшее число работ посвящено решению задачи б) о непрерывном моделировании инерционной миграции частиц при течении суспензии в каналах. Обзор работ по двухконтинуальному описанию течений разреженных дисперсных сред в пограничном слое в приложении к течениям запыленного газа можно найти в [15, 16]. Задача о миграции частиц под действием классической силы Сэффмана исследовалась в рамках лагранжева подхода в случае течения запыленного газа в канале [17], а также в рамках эйлера подхода в случае течения разреженной суспензии в пограничном слое [18]. Было показано, что поперечный профиль числовой концентрации частиц содержит неинтегрируемую особенность на стенке канала, которая была впервые обнаружена в задаче о течении запыленного газа в пограничном слое с учетом только силы Стокса [19]. В работе [18] было высказано предположение, что сингулярность в профиле концентрации частиц на стенке канала не разрешается с учетом силы Сэффмана, и было предложено рассмотреть модель суспензии с учетом конечности объемной доли частиц. Однако позднее в [20] в задаче о миграции частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке канала было показано, что неинтегрируемая особенность в поле концентрации частиц разрешается с учетом поправки к силе Сэффмана за счет присутствия стенок.

В настоящей работе рассматривается задача о поперечной миграции осаждающихся частиц под действием инерционной боковой силы [14] при течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле–Шоу. Цель работы – построение асимптотической двухконтинуальной модели миграции частиц, а также изучение эволюции поперечного профиля концентрации частиц вдоль канала. Найденный поперечный профиль концентрации может затем быть использован для замыкания двумерных осредненных моделей переноса частиц в вертикальных плоских каналах [2]. Течение рассматривается вдали от начального участка канала, где можно считать установившимся профиль Пуазейля для скорости несущей фазы. Решение будет асимптотически срачиваться с решением задачи о миграции частиц в начальном участке канала, которое было найдено в [20] при отсутствии силы тяжести. Для расчета эволюции поля концентрации частиц вдоль канала будет использован полный лагранжев метод [21],



Фиг. 1. Схема течения и система координат

который можно применять в случаях пересечения траекторий частиц и формирования сингулярностей в поле числовой концентрации частиц, когда эйлеровы методы уже не позволяют получить корректное решение [22].

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное ламинарное течение разреженной суспензии в вертикальном плоском канале ширины $2d$ с непроницаемыми стенками в поле силы тяжести (фиг. 1). Несущая фаза — вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость с вязкостью μ и плотностью ρ . Дисперсная фаза состоит из одинаковых неброуновских сферических частиц радиуса σ и массы m с плотностью материала ρ_s . Движение суспензии рассматривается в рамках модели двух взаимопроникающих континуумов [15]. Предполагается, что объемная концентрация частиц φ мала, а отношение материалов плотностей фаз $\eta = \rho/\rho_s$ имеет порядок единицы, так что массовая концентрация частиц мала: $\alpha = \varphi/\eta \ll 1$. При данных предположениях можно не учитывать влияние частиц на течение несущей фазы, а тензор напряжений в среде частиц считать пренебрежимо малым [15].

Вводится декартова система координат с началом на стенке канала. Ось x направлена горизонтально вдоль течения, ось y — поперек канала, а ось z — вертикально вниз (фиг. 1). Течение происходит под действием постоянного горизонтального градиента давления, не зависящего от пространственных координат. Будем рассматривать течение вне начального участка канала, где можно считать, что профиль скорости несущей фазы $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$ уже не зависит от продольной координаты x и описывается законом Пуазейля:

$$u^* = U_m \left(\frac{2y^*}{d} - \frac{y^{*2}}{d^2} \right), \quad v^* = 0, \quad w^* = 0 \quad (1.1)$$

При $x = 0$ заданы следующие условия. Профиль числовой концентрации частиц поперек канала известен из условия сращивания с решением в начальном участке канала $n_s^* = f^*(y^*)$ [20]. Относительная скорость частиц в горизонтальном направлении равна нулю, а в вертикальном постоянна. Ниже будет показано, что при таких граничных условиях поле гидродинамических параметров среды частиц не зависит от вертикальной координаты z . Таким образом, рассматривается двумерное течение в горизонтальном сечении ячейки Хеле–Шоу. Так как течение симметрично относительно средней

линии канала, будем рассматривать область между одной из стенок и средней линией канала.

На частицу действуют сила тяжести, сила Стокса \mathbf{F}_{St} , сила Архимеда \mathbf{F}_A , сила присоединенных масс \mathbf{F}_{am} [23], а также инерционная боковая сила \mathbf{F}_l :

$$m \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{St} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{am} + \mathbf{F}_l$$

$$\mathbf{F}_{St} = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*), \quad \mathbf{F}_A = \rho\tau_s \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} - \mathbf{g} \right), \quad \mathbf{F}_{am} = \rho \frac{\tau_s}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} \right)$$

Здесь $\mathbf{v}_s^* = (u_s^*, v_s^*, w_s^*)$ – поле скорости дисперсной фазы, τ_s – объем одной частицы, $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ – ускорение силы тяжести.

Так как ускорение жидкости в течении Пуазейля равно нулю $d\mathbf{v}^*/dt^* = 0$, силы Архимеда и присоединенных масс принимают вид

$$\mathbf{F}_A = -\rho\tau_s\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_{am} = -\rho \frac{\tau_s}{2} \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*}$$

Инерционная боковая сила \mathbf{F}_l , вызывающая поперечную миграцию, обусловлена рассогласованием скоростей фаз и сдвиговым характером течения несущей фазы. Выражение для этой силы зависит от направления относительной скорости частицы по отношению к скорости жидкости. В рассматриваемой постановке вертикальное осаждение частиц приводит к возникновению силы \mathbf{F}_{lz} . Выражение для поперечной силы \mathbf{F}_{lz} на частицу, осаждающуюся в горизонтальном течении Пуазейля через вертикальный плоский канал, было найдено в [14]:

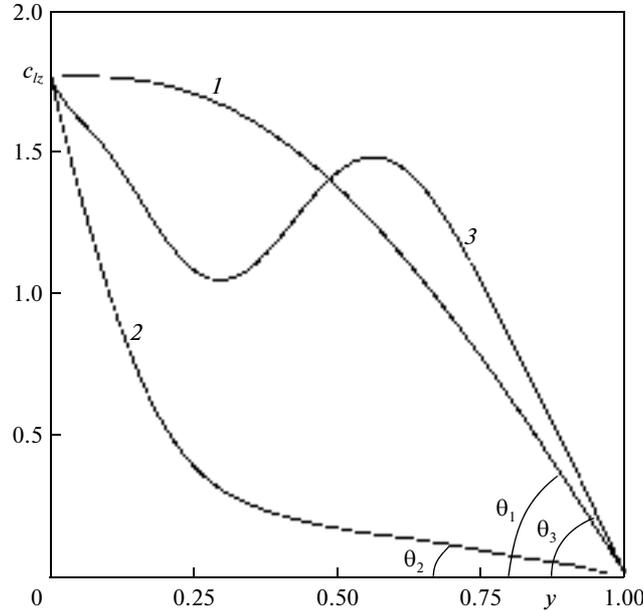
$$\mathbf{F}_{lz} = \rho w_s^{*2} \sigma^2 c_{lz}(y, w_{s0}, \text{Re}) \mathbf{j}, \quad \text{Re} = \frac{\rho d U_m}{\mu}, \quad w_{s0} = \frac{w_s^*}{U_m}, \quad y = \frac{y^*}{d}$$

Здесь Re – число Рейнольдса канала, w_{s0} – безразмерная скорость осаждения частицы, y – безразмерная поперечная координата, \mathbf{j} – единичный вектор оси y . Данное выражение было получено для малых чисел Рейнольдса частиц Re_G и Re_s , вычисленных по характерному градиенту скорости несущей фазы $G = U_m/d$ и скорости осаждения w_s^* :

$$\text{Re}_G = \frac{\sigma^2 G \rho}{\mu} = \text{Re} \frac{\sigma^2}{d^2} \ll 1, \quad \text{Re}_s = \frac{\sigma w_s^* \rho}{\mu} = w_{s0} \text{Re} \frac{\sigma}{d} \ll 1 \quad (1.2)$$

$$\chi = \text{Re}_s \sqrt{\text{Re}_G} \sim 1$$

Сила \mathbf{F}_{lz} направлена перпендикулярно стенкам к центру канала. Коэффициент силы c_{lz} достигает максимума на стенках канала и обращается в нуль на оси канала (фиг. 2) [14]. При числе Рейнольдса порядка единицы меньше зависимость коэффициента c_{lz} от координаты y является монотонной. При увеличении Re зависимость $c_{lz}(y)$ становится немонотонной. Появляются локальные максимум и минимум боковой силы (фиг. 2, кривая 3). Такая немонотонность имеет место при малых значениях безразмерной скорости осаждения w_{s0} и исчезает с увеличением w_{s0} . В данной работе будем рассматривать три характерные зависимости $c_{lz}(y)$ [14]: монотонно убывающая, монотонная и быстро убывающая вблизи стенки, немонотонная (фиг. 2).



Фиг. 2. Коэффициент боковой силы c_{lz} для $Re = 1$ (1), $Re = 100, w_{s0} = 0.4$ (2) и $Re = 100, \sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$ (3)

Боковая сила F_{lz} вызывает миграцию частиц от стенок к центру канала, что приводит к рассогласованию скоростей фаз в продольном направлении. Таким образом, помимо боковой силы F_{lz} , вызванной рассогласованием скоростей фаз в направлении z , появляется боковая сила F_{lx} за счет рассогласования скоростей в направлении x :

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_{lz} + \mathbf{F}_{lx} \tag{1.3}$$

Векторы сил F_{lx} и F_{lz} параллельны оси y . Компонента поперечной силы F_{lx} была рассчитана в рамках предположений (1.2) для одиночной частицы в течении Пуазейля [12, 13]:

$$\mathbf{F}_{lx} = c_{lx} \sigma^2 \sqrt{\mu \rho \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|} (u^* - u_s^*) \text{sign} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \mathbf{j}$$

В случае движения частицы в неограниченном линейном сдвиговом потоке данное выражение для инерционной боковой силы было получено при условии сильного сдвига $\chi \ll 1$, причем коэффициент силы равен $c_{lx} = 6.46$ (сила Сэффмана) [8]. С учетом сделанных предположений уравнения неразрывности и движения для среды частиц можно переписать в виде:

$$\text{div}(n_s^* \mathbf{v}_s^*) = 0, \quad m \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*) + \tau_s(\rho_s - \rho)\mathbf{g} - \rho \frac{\tau_s}{2} \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} + \tag{1.4}$$

$$+ c_{lx} \sigma^2 \sqrt{\mu \rho \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|} (u^* - u_s^*) \mathbf{j} + \rho w_s^{*2} \sigma^2 c_{lz}(y, w_{s0}, Re) \mathbf{j}$$

Рассматриваемое течение, по предположению, стационарное, поэтому можно считать, что частицы осаждаются без ускорения, и решение уравнения движения (1.4) в проекции на ось z дает известную формулу Стокса для скорости осаждения:

$$w_s^* = \frac{2\sigma^2(\rho_s - \rho)g}{9\mu} \quad (1.5)$$

Таким образом, параметры дисперсной фазы не зависят от координаты z и рассматриваемое течение является плоским.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x^* = Lx, y^* = dy, u_s^* = U_m u_s, v_s^* = Vv_s, w_s^* = U_m w_{s0} \quad (1.6)$$

$$t^* = Lt / U_m, n_s^* = n_0 n_s, (u^* - u_s^*) = U_x (u - u_s)$$

Здесь L – характерный продольный масштаб длины, на котором происходит миграция частиц поперек канала; V – характерная скорость поперечной миграции частиц; U_x – характерный масштаб рассогласования скоростей фаз в продольном направлении; n_0 – характерная величина числовой концентрации частиц. Величины V и L находятся из следующих соотношений:

$$6\pi\sigma\mu V = \rho w_s^{*2} \sigma^2, L/U_m = d/V \quad (1.7)$$

Первое равенство найдено из условия, что вызванная осаждением боковая сила имеет такой же порядок величины, как и поперечная компонента силы сопротивления частицы [14]. Так как $Re_s \ll 1$, силу сопротивления можно записать по формуле Стокса, где в качестве относительной скорости частицы следует подставить скорость миграции. Второе соотношение следует из уравнения неразрывности (1.4). На выбранном масштабе длины L частицы мигрируют в поперечном направлении на расстояние порядка полуширины канала d , а их поперечная скорость меняется на величину порядка V .

Масштаб продольного рассогласования скоростей фаз U_x находится из уравнения движения (1.4) в проекции на ось x при условии, что в безразмерных переменных все члены в этом уравнении имеют один порядок величины, т.е. ускорение частиц по порядку величины сравнимо с силой Стокса:

$$U_x = \frac{mU_m^2}{6\pi\sigma\mu L} \quad (1.8)$$

Подставляя формулы (1.6) в (1.4) и принимая во внимание (1.1), (1.7) и (1.8), получаем уравнения движения частиц в безразмерной форме:

$$\frac{\partial(n_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial(n_s v_s)}{\partial y} = 0, \frac{du_s}{dt} = \beta(2y - y^2 - u_s) \quad (1.9)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = \beta \left(-v_s + c_{Iz}(y, w_{s0}, Re) + \kappa \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} (u - u_s) \right)$$

Здесь β – параметр инерционности частиц, пропорциональный отношению продольного масштаба задачи L к длине релаксации стоксовской частицы $l = mU_m/6\pi\sigma\mu$:

$$\beta = \frac{2L}{(2 + \eta)l} = \frac{54\pi}{(2 + \eta)(\sigma/d)^3 w_{s0}^2 Re^2}$$

Безразмерный параметр κ определяется по формуле

$$\kappa = \frac{c_{lx}(2 + \eta)}{54\pi} \text{Re}^{3/2} \frac{\sigma^3}{d^3}$$

Используя условие $c_{lx} \sim 1$ и принимая во внимание первое неравенство из (1.2), получаем, что $\kappa \ll 1$. Таким образом, на рассматриваемом масштабе длины можно пренебречь боковой силой \mathbf{F}_{lx} , вызванной продольным рассогласованием скоростей фаз.

Граничные условия при $x = 0$ в безразмерных переменных имеют вид

$$x = 0 : u_s = u = 2y - y^2, v_s = v = 0, n_s = f(y) \quad (1.10)$$

Исследуется эволюция однородного и неоднородного профилей концентрации частиц:

$$\text{I. } f(y) = 1, \text{ II. } f(y) = \begin{cases} 0, & y < \varepsilon \\ \sqrt{\delta - \varepsilon y - \varepsilon}, & \varepsilon \leq y \leq \delta \\ 0, & \delta < y \leq 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь $y = 0$ на стенке и $y = 1$ на средней линии канала. Профиль II содержит область постоянной концентрации вблизи средней линии канала, свободную от частиц пристеночную область ширины ε и промежуточную область ширины $(\delta - \varepsilon)$, где концентрация неоднородна и возрастает от единицы до бесконечности (фиг. 3 в, кривая $x = 0$). Такая зависимость аппроксимирует поперечный профиль числовой концентрации, который формируется в начальном участке канала в результате миграции частиц под действием инерционной боковой силы за счет продольного рассогласования скоростей фаз [20]. Из этой же работы следуют оценки для параметров: $\varepsilon \approx 0.1$, $\delta \approx 4\varepsilon$. В [20] использовалось выражение для силы \mathbf{F}_{lx} с учетом влияния стенки и конечности отношения χ [9, 10]. Результирующий профиль числовой концентрации поперек канала содержит свободные от частиц пристеночные слои. Профиль между слоями ядре течения неоднородный с особенностями концентрации на границах слоев. Эти особенности в профиле концентрации интегрируемы [20].

Уравнения (1.9) с граничными условиями (1.10) образуют замкнутую систему для описания среды частиц. Система содержит три безразмерных параметра β , Re и w_{s0} , причем параметры Re и w_{s0} входят только как аргументы функции $c_{lx}(y, w_{s0}, \text{Re})$.

В предельных случаях сильноинерционных ($\beta \rightarrow 0$) и безынерционных ($\beta \rightarrow \infty$) частиц из (1.9), (1.10) получаем аналитические решения

$$\beta \rightarrow \infty : u_s(x, y) = 2y - y^2, v_s(x, y) = c_{lx}(y, w_{s0}, \text{Re}) \quad (1.12)$$

$$\beta \rightarrow 0 : u_s(x, y) = 2y - y^2, v_s(x, y) = 0, n_s(x, y) = f(y)$$

В общем случае для решения уравнений (1.9) с граничными условиями (1.10) используется полный лагранжев метод [21], который позволяет вычислить параметры дисперсной фазы, включая числовую концентрацию, вдоль выбранных траекторий движения частиц.

2. Применение полного лагранжева метода для расчета параметров среды частиц. Запишем уравнения (1.9) в лагранжевых переменных (x_0, y_0, t) , где x_0, y_0 — фиксированные координаты начала траектории частицы, а $t \geq 0$ — безразмерное время движения частицы вдоль траектории:

$$n_s |J| = f(y_0), \quad |J| = \left| \frac{\partial x_s \partial y_s}{\partial x_0 \partial y_0} - \frac{\partial y_s \partial x_s}{\partial x_0 \partial y_0} \right| \quad (2.1)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \quad \frac{du_s}{dt} = \beta(2y_s - y_s^2 - u_s)$$

$$\frac{dy_s}{dt} = v_s, \quad \frac{dv_s}{dt} = \beta(-v_s + c_{Iz}(y_s, w_{s0}, \text{Re}))$$

Здесь $|J|$ – модуль якобиана перехода от эйлеровых координат (x, y) к лагранжевым (x_0, y_0) . Так как течение стационарное, две из четырех компонент якобиана выражаются через компоненты скорости [21]:

$$|J| = \left| u_s u_0 \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - v_s u_0 \frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right| \quad (2.2)$$

Здесь $u_0 = (2y_0 - y_0^2)$ – начальная продольная скорость частицы. Дополнительные уравнения для нахождения производных $\partial y_s / \partial y_0$ и $\partial x_s / \partial y_0$ получаются путем дифференцирования уравнений движения частиц по лагранжевой координате y_0 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial u_s}{\partial y_0}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y_0} \right) = \beta \left(2(1 - y_s) \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - \frac{\partial u_s}{\partial y_0} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial v_s}{\partial y_0}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_s}{\partial y_0} \right) = \beta \left(-\frac{\partial v_s}{\partial y_0} + \frac{\partial c_{Iz}(y_s, w_{s0}, \text{Re})}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right)$$

Начальные условия при $t = 0$ находятся из (1.10)

$$x_s = 0, \quad y_s = y_0, \quad u_s = 2y_0 - y_0^2, \quad v_s = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = 1, \quad \frac{\partial u_s}{\partial y_0} = 2 - 2y_0, \quad \frac{\partial v_s}{\partial y_0} = 0$$

При $\beta \rightarrow \infty$ поле скоростей дисперсной фазы известно (1.12), поэтому уравнения упрощаются:

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s = 2y_s - y_s^2, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s = c_{Iz}(y_s, w_{s0}, \text{Re}) \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial u_s}{\partial y_0} = 2(1 - y_s) \frac{\partial y_s}{\partial y_0}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial v_s}{\partial y_0} = \frac{\partial c_{Iz}(y_s, w_{s0}, \text{Re})}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial y_0}$$

Начальные условия для (2.5) имеют вид

$$x_s = 0, \quad y_s = y_0, \quad \frac{\partial x_s}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = 1 \quad (2.6)$$

Уравнения (2.1)–(2.3) с начальными условиями (2.4) для конечных β и уравнения (2.2), (2.5) с условиями (2.6) для $\beta \rightarrow \infty$ составляют замкнутые системы обыкновенных дифференциальных уравнений на выбранной траектории частицы. Данны-

есистемы решались для различных траекторий частиц методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Траектории частиц создают лагранжеву сетку, которая покрывает всю область движения частиц. Количество траекторий определяется требуемой степенью подробности лагранжевой сетки, на которой ищется решение для среды частиц. Для вычисления значений коэффициента боковой силы c_{lz} и его производной $\partial c_{lz}/\partial y$ использовались многочлены, аппроксимирующие кривые на фиг. 2 из работ [11, 14]

$$\zeta = y/2 - 0.5$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.3125\zeta + 0.0996\zeta^3 - 14.34\zeta^5 + 116.3\zeta^7 - 403.7\zeta^9 + 518\zeta^{11}) \quad (2.7)$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.03925\zeta - 0.1373\zeta^3 + 2.724\zeta^5 - 41.46\zeta^7 + 342.4\zeta^9 - 693.8\zeta^{11}) \quad (2.8)$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.4399\zeta + 1.742\zeta^3 - 118.7\zeta^5 + 1116\zeta^7 - 4014\zeta^9 + 5086\zeta^{11}) \quad (2.9)$$

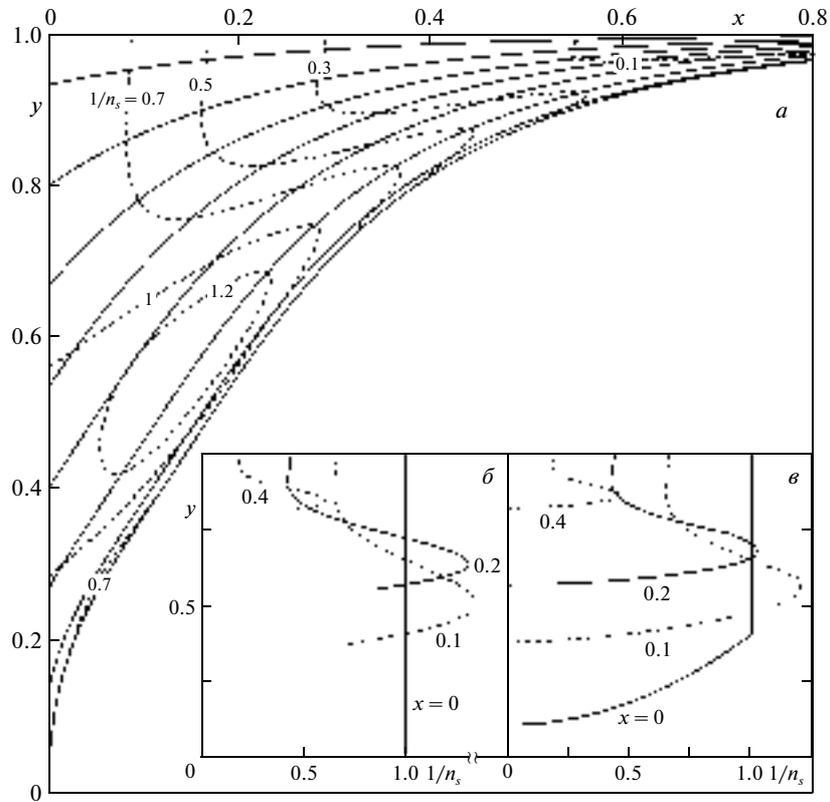
Выражение (2.7) получено в работе [11] для $Re \ll 1$ и с хорошей точностью совпадает с результатами из [14] для $Re = 1$ (фиг. 2, кривая 1). Многочлены (2.8) и (2.9) аппроксимируют данные из [14] при $Re = 100$ для $w_{s0} = 0.4$ и $\sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$ соответственно (фиг. 2, кривые 2 и 3 соответственно). Неравенство $\sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$ означает, что скорость осаждения мала, но не равна нулю, т.е. частицы не являются нейтрально-плавающими.

3. Результаты расчетов. В зависимости от параметра β реализуются несколько качественно различных режимов течения.

Рассмотрим сначала асимптотический случай, когда $\beta \rightarrow \infty$, а скорость осаждения мала, но не равна нулю: $\sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$. В этом случае поле скоростей дисперсной фазы имеет вид (1.12). Такой режим соответствует движению безынерционных частиц. В расчетах для аппроксимации коэффициента боковой силы $c_{lz}(y)$ используется немонотонная зависимость (2.9) (фиг. 2, кривая 3). Расчеты показали, что частицы, двигаясь вниз по течению, мигрируют к центру канала без пересечений траекторий (фиг. 3, а). Как видно из (1.12), скорость дисперсной фазы в эйлеровых координатах $\mathbf{v}_s = (2y - y^2, c_{lz}(y))$ не меняется вниз по течению и зависит только от координаты y . Вдоль отдельной траектории частицы скорость непостоянна. По мере приближения к центру канала компонента u_s увеличивается, а компонента v_s уменьшается до нуля.

Профиль числовой концентрации значительно меняется вниз по течению (фиг. 3, а–в). Числовая концентрация возрастает с увеличением x . В случае однородного граничного профиля n_s в поле числовой концентрации не возникает особенностей и значение n_s конечно при конечных x (фиг. 3, а, б). Неоднородный начальный профиль концентрации с неограниченным значением на предельной траектории, стартовавшей при $y_0 = \varepsilon$, порождает область высокой плотности числа частиц в окрестности этой траектории во всем течении (фиг. 3, в). На самой предельной траектории числовая концентрация бесконечна. Из-за немонотонности боковой силы в течении дисперсной фазы возникает ограниченная область пониженной концентрации частиц, где $n_s < 1$ (фиг. 3, а).

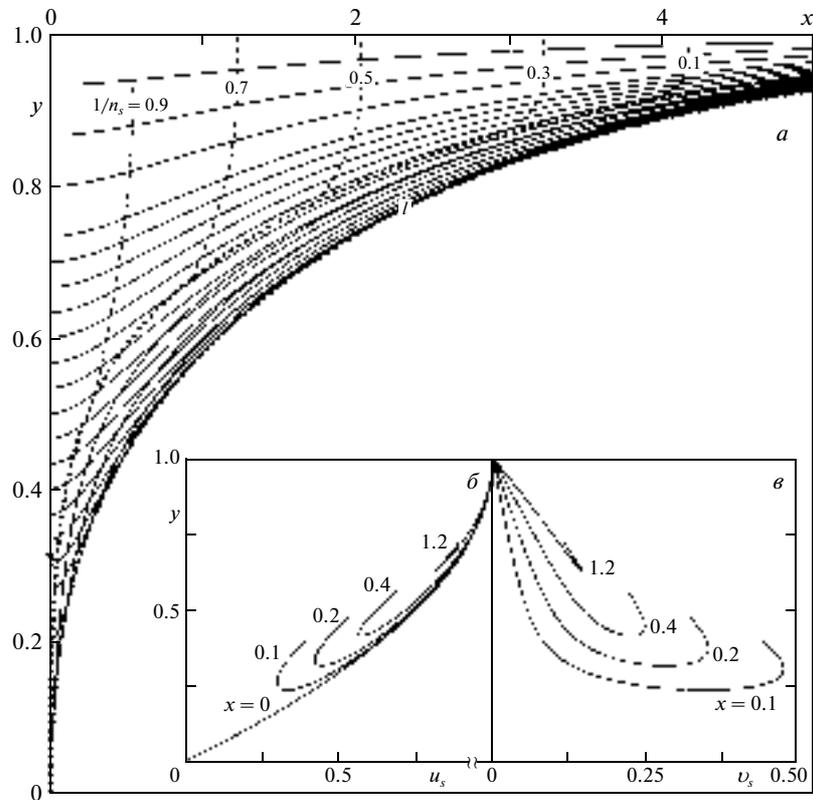
В случае конечных значений β возможны два различных режима миграции, когда траектории частиц пересекают либо не пересекают центральную ось канала. Существует критическое значение параметра инерционности β_c , соответствующее смене режимов миграции. В случае больших, но конечных значений параметра инерционности $\beta_c < \beta < \infty$ (малоинерционные частицы) реализуется режим, при котором частицы монотонно накапливаются вблизи средней линии канала и не пересекают ее. На фиг. 4 показана типичная картина течения для монотонной быстро убывающей зависимости



Фиг. 3. Траектории частиц (сплошные линии) и изолинии $1/n_s$ (штриховые линии с числами) для однородного начального профиля n_s (а); распределения $1/n_s$ для однородного (б) и неоднородного (в) начального профиля n_s при $b \rightarrow \infty$, $Re = 100$, $\sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$

$c_{tz}(y)$ (2.8) (фиг. 2, кривая 2). При таких параметрах возможны пересечения траекторий частиц. Таким образом, в среде частиц формируется “складка”, т.е. область течения, где параметры дисперсной фазы двузначны. Сверху эта область ограничена траекторией, стартовавшей с наименьшего значения y_0 , а снизу – огибающей траекторий частиц l (пунктирные линии на фиг. 4, а).

Существует критическое значение начальной координаты y_{0c} такое, что траектории с началом в точках $y_0 < y_{0c}$ пересекаются с траекториями с началом в $y > y_0$ и формируют “складку”. В то же время траектории с началом в $y_0 > y_{0c}$ не пересекаются с траекториями, стартующими в точках $y > y_0$. Следовательно, если ширина пристеночного слоя чистой жидкости (без частиц) меньше y_{0c} , траектории частиц пересекаются и возникает “складка”. В случае, если ширина пристеночного слоя чистой жидкости больше y_{0c} , “складка” не возникает. С увеличением β от β_c до бесконечности значение y_{0c} падает (фиг. 5) и ширина слоя частиц, формирующего “складку”, уменьшается. Это приводит к уменьшению ширины “складки” вплоть до ее исчезновения при $\beta \rightarrow \infty$.



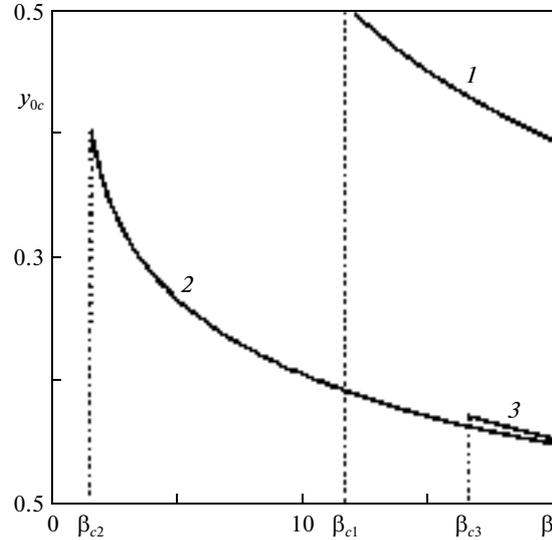
Фиг. 4. Траектории частиц (сплошные линии), границы “складок” в среде частиц (пунктир), изолинии $1/n_s$ (штриховые линии с числами) для однородного начального профиля n_s (а) профили скорости частиц (б, в) при $\beta = 3 > \beta_c$, $\text{Re} = 100$, $w_{s0} = 0.4$

Так же, как и в случае безынерционных частиц, для малоинерционных частиц скорость u_s увеличивается по мере приближения к центру (фиг. 4, б). Компонента v_s равна нулю в начальном сечении. Вниз по потоку v_s сначала возрастает под действием боковой силы, а затем снова убывает по мере приближения частицы к центру канала (фиг. 4, в).

Концентрация дисперсной примеси увеличивается вниз по потоку (фиг. 4, а; б, а, б) и обращается в бесконечность на каустике l (фиг. 6, а, б). Расчеты показали, что каустика l стремится к началу координат O . На линии l якобиан J обращается в нуль, а $n_s \rightarrow \infty$. Это противоречит начальному условию $n_s(0, y) = 1$. Таким образом, O особая точка. В вычислениях предполагалось, что из точки O траектории частицы не стартуют, но они могут начинаться из любой ее малой окрестности.

В случае однородного начального распределения частиц $f(y) = 1$ концентрация в “складке” существенно уменьшается по мере удаления от l (фиг. 6, а). Для неоднородного граничного профиля $f(y)$ (1.11) на верхней границе “складки” концентрация бесконечна (фиг. 6, б). Эта сингулярность наследуется из граничного условия и распространяется вдоль предельной траектории.

Движение достаточно инерционных частиц при $0 < \beta < \beta_c$ для монотонно убывающей зависимости $c_{l_z}(y)$ (2.7) (фиг. 2, кривая 1) показано на фиг. 7. Частицы по мере



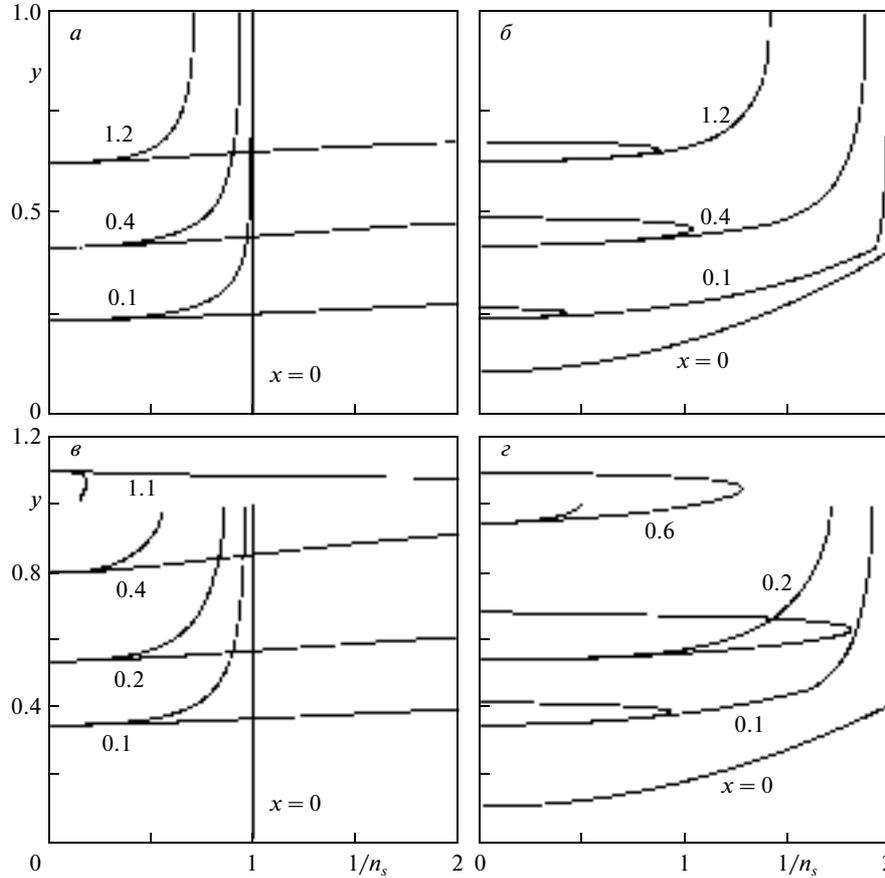
Фиг. 5. Зависимости y_{0c} от β и критические значения β_c для $Re = 1$ (1), $Re = 100$, $w_{s0} = 0.4$ (2) и $Re = 100$, $\sigma/d \ll w_{s0} \ll 1$ (3)

движения также аккумулируются на центральной линии, но при этом многократно пересекают ее. В дисперсном континууме формируются многочисленные “складки”, ограниченные предельной траекторией и каустиками. В случае однородного начального распределения частиц числовая концентрация обращается в бесконечность на каустиках, а для неоднородного начального распределения — еще и на предельной траектории (фиг. б, в, г).

В приведенных выше результатах численных расчетов получено, что числовая концентрация частиц n_s неограниченно возрастает на границах одной или нескольких “складок”. Помимо этого, дополнительная особенность в поле концентрации частиц наследуется из неоднородного начального профиля концентрации. В работах [20, 24] было показано, что если на линии накопления частиц, где $n_s \rightarrow \infty$, составляющая скорости несущей фазы по нормали к этой линии не равна нулю, то функция n_s ведет себя как обратный корень из расстояния до особой линии. Следовательно, особенность в поле числовой концентрации интегрируема. В случае, когда особенность в поле числовой концентрации среды частиц интегрируема, среднее расстояние между частицами существенно превышает радиус частиц в окрестности особенности [19]. Следовательно, приближение разреженной суспензии остается применимым во всей области течения, включая окрестность особенности. В полученных решениях границы складок и предельные траектории, на которых концентрация обращается в бесконечность, наклонены к потоку несущей фазы, поэтому, согласно изложенному выше, особенности в поле числовой концентрации интегрируемы. Следовательно, для полученных выше решений приближение разреженной суспензии остается применимым во всей области течения.

4. Течение в окрестности средней линии канала. В окрестности центра канала $c_{Iz}(y)$ ведет себя как линейная функция [14]:

$$c_{Iz}(y, w_{s0}, Re) = c(1 - y) + \dots, y \rightarrow 1, c = \left. \frac{\partial c_{Iz}(y, w_{s0}, Re)}{\partial y} \right|_{y=1} \quad (3.1)$$



Фиг. 6. Профили $1/n_s$ для однородного (а, в) и неоднородного (б, г) начального профиля n_s при $Re = 100$, $w_{s0} = 0.4$ (а, б) и $Re = 1$ (в, г) при $\beta = 3$

Здесь $c = \text{tg}\theta$, где θ – угол наклона графика функции $c_{l_z}(y)$ к оси y в окрестности средней линии канала (фиг. 2). При $Re \gg 1$ коэффициент c зависит только от комбинации $w_{s0}Re^{2/3}$, тогда как в общем случае $c = c(w_{s0}, Re)$ [14]. Из представлений (2.7)–(2.9) легко найти значения c для рассматриваемых вариантов зависимости $c_{l_z}(y)$.

Анализируя фиг. 4, б, в, можно заметить, что для малоинерционных частиц при $\beta_c < \beta < \infty$ компоненты скорости u_s и v_s при больших x ведут себя, как квадратичная и линейная функции соответственно:

$$u_s = 1 - a(1 - y)^2, v_s = k(1 - y), x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1 \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1), (3.2) в уравнения движения частиц в эйлеровой форме (1.9), где $\kappa = 0$, получаем

$$k = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - c\beta}, a = \frac{\beta}{\beta - k}$$

Выражение для коэффициента k существует только при $\beta \geq 4c = 4tg\theta$. Следовательно, критическое значение параметра инерционности, разделяющее режимы миграции частиц с пересечением и без пересечения центральной линии, имеет вид $\beta_c = 4tg\theta$. Значения β_c для рассмотренных вариантов зависимости $c_{Iz}(y)$ отмечены на фиг. 5.

Из фиг. 6, а, б, видно, что при приближении к центру канала функция n_s не зависит от y и стремится к постоянному значению: $n_s = n_c(x)$ при $y \rightarrow 1$. Тогда из уравнения неразрывности (1.9) для достаточно больших значений x таких, что справедливо (3.2), получаем

$$n_s \sim e^{kx}, x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1 \quad (1.3)$$

Далее проанализируем уравнения движения частиц в лагранжевой форме (2.1)–(2.4). Вычислим параметры дисперсной фазы на средней линии канала в лагранжевых координатах. Вдоль траектории, совпадающей с осью канала, где $u_s = 1, v_s = 0, c_{Iz} = 0$, из (2.1)–(2.4) получаем

$$x_s = t, y_s = 1, n_s = |J|^{-1} = \left| \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right|^{-1}$$

$$\beta > 4c : \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad n_s \sim e^{-\lambda_2 t} = e^{-\lambda_2 x}, \quad t \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$$

$$\beta < 4c : \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = e^{-\beta t/2} (\cos \omega t + \beta/2 \omega \sin \omega t), \quad n_s \sim e^{\beta t/2} = e^{\beta x/2}, \quad t \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta/2 \pm \sqrt{\beta^2/4 - c\beta}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad \omega = \sqrt{c\beta - \beta^2/4}$$

Асимптотика n_s при больших t совпадает с (3.3), так как $k = -\lambda_2$. Аналогично из (2.2), (2.5), (2.6) можно показать, что на оси канала при $\beta \rightarrow \infty$

$$n_s \sim e^{cx}, x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1$$

Итак, на оси канала числовая концентрация всегда конечна при конечных значениях x .

Рассмотрим течение в окрестности оси канала при $y \rightarrow 1$, когда справедливо представление (3.1). В этом случае для лагранжевой координаты $y_s(t)$ имеется обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y}_s + \beta \dot{y}_s + \beta c y_s = \beta c, \quad y_s(0) = y_0, \quad \dot{y}_s(0) = 0$$

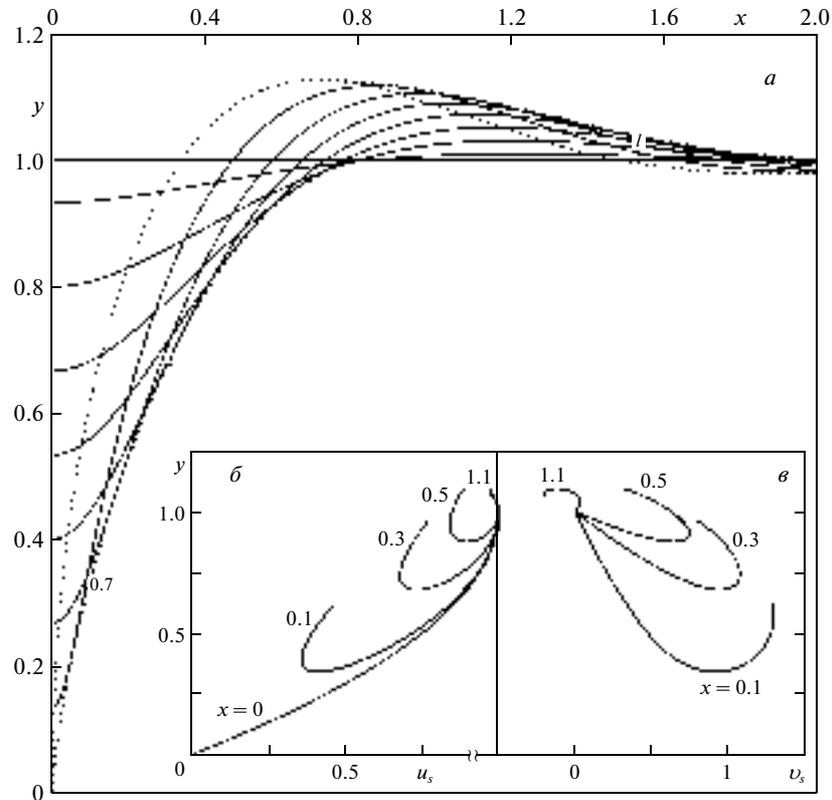
В зависимости от значения β возможны различные решения:

$$\beta > 4c : y_s = 1 - \frac{1 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t})$$

$$\beta = 4c : y_s = 1 - (1 - y_0)(1 + 2ct)e^{-2ct}$$

$$\beta < 4c : y_s = 1 - (1 - y_0)e^{-\beta t/2} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega t \right)$$

Как видно из решения, при $4c \leq \beta < \infty$ частицы стремятся к центральной линии, не пересекая ее, а при $\beta < 4c$ частицы осциллируют вблизи центральной линии, многократно пересекая ее. Данный вывод подтверждает найденные на основании числен-



Фиг. 7. Траектории частиц (сплошные линии), границы “складок” в среде частиц (пунктир) (а); профили скорости дисперсной фазы (б, в) при $\beta = 3 < \beta_c$, $Re = 1$

ных расчетов возможные режимы миграции частиц, а также полученное ранее значение $\beta_c = 4c$.

Заключение. Построена двухконтинуальная модель инерционной миграции осаждающихся неброуновских частиц при горизонтальном ламинарном течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле–Шоу. В межфазном обмене импульсом учтены силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс, а также инерционная боковая сила, возникающая за счет осаждения частиц и сдвигового характера течения жидкости. Задача о миграции частиц сведена к рассмотрению двумерного стационарного течения в горизонтальном сечении ячейки. Эволюция гидродинамических параметров среды частиц исследована численно с помощью полного лагранжева метода. Под действием инерционной боковой силы частицы мигрируют к средней линии канала. Вблизи стенок формируются свободные от частиц слои, расширяющиеся вниз по потоку. На основании численных расчетов выявлены различные режимы миграции частиц в зависимости от параметра инерционности частиц. Безынерционные частицы движутся без пересечения траекторий. В случае слабоинерционных частиц в дисперсном континууме возникают две “складки”, граничащие с пристеночными слоями чистой жидкости. В случае сильноинерционных частиц формируются множественные “складки” в дисперсном континууме и траектории частиц многократно пересекают среднюю линию канала.

Аналитически получено выражение для критического значения параметра инерционности, при котором происходит смена режимов миграции. Данное критическое значение зависит только от тангенса угла наклона зависимости боковой силы от поперечной координаты в окрестности средней линии канала. Установлено, что на огибающих траекторий частиц числовая концентрация неограниченно возрастает. Показано, что данные особенности интегрируемы, а следовательно, модель разреженной суспензии применима во всей области течения. Найденный в данной работе поперечный профиль концентрации может служить для замыкания макромасштабных моделей переноса частиц в ячейке Хеле–Шоу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского научно-исследовательского центра компании Шлюмберге. Авторы выражают благодарность руководству компании Шлюмберге за разрешение опубликовать данную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Hammond P.S. Settling and slumping in a Newtonian slurry, and implications for proppant placement during hydraulic fracturing of gas wells // Chem. Engng. Sci. 1995. V. 50. № 20. P. 3247--3260.
3. McCaffery S.J., Elliott L., Ingham D.B. Enhanced sedimentation in inclined fracture channels // Topics in Engineering. V. 32 CD-ROM, 1997.
4. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation, John Wiley N, Y.: Wiley, 2000. 750 p.
5. Segre G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Pt 2. Experimental results and interpretation // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 1. P. 136--157.
6. Jeffrey R.C., Pearson J.R.A. Particle motion in laminar vertical tube flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 4. P. 721--735.
7. Matas J.-P., Morris J.F., Guazzelli E. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 2004. V. 515. 171--195.
8. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385--400. Corrigendum // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 624.
9. Асмолов Е.С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 91--96.
10. McLaughlin J.B. The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 246. P. 249--265.
11. Vasseur P., Cox R.G. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 385--413.
12. Hogg A.J. The inertial migration of neutrally-buoyant spherical particles in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. 1994. V. 272. P. 285--318.
13. Asmolov E.S. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number // J. Fluid Mech. 1999. V. 381. P. 63--87.
14. Asmolov E.S., Osipsov A.A. The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // Phys. Fluids. 2009. V. 21. № 8.
15. Марбл Ф. Динамика запыленных газов // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М.: 1971. № 6. С. 48--89.
16. Osipsov A.N. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. № 6. P. 357--370.
17. Осипцов А.Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала или круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 80--87.
18. Foster M.R., Duck P.W., Hewitt R.E. Boundary layers in a dilute particle suspension // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2006. V. 462. № 2068. P. 1145--1166.

19. *Осипцов А.Н.* Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 46–52.
20. *Osiptsov A.A., Asmolov E.S.* Asymptotic model of the inertial migration of particles in a dilute suspension flow through the entry region of a channel // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. № 12. P. 123301.1--123301.15.
21. *Osiptsov A.N.* Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // *Astrophys. Space Sci.* 2000. V. 274. № 1–2. P. 377–386.
22. *Slater S.A., Young J.B.* The calculation of inertial particle transport in dilute gas-particle flows // *Intern. J. Multiphase Flow*. 2001. V. 27. № 1. P. 61–87.
23. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26. № 4. P. 883–889.
24. *Чернышенко С.И.* О среднем расстоянии между частицами в запыленном газе при наличии особенностей размазанной плотности частиц // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 1984. № 1. С. 69–70.

Москва

Поступила в редакцию
11.XI.2008