

УДК 533.6.013.42

© 2007 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

**НЕЛИНЕЙНЫЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ФЛАТТЕР ПЛАСТИНЫ**

В недавних исследованиях задачи о линейной устойчивости пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, наряду с классическим (“низкочастотным”) типом флаттера был найден новый (“высокочастотный”) тип флаттера, который не может быть получен с помощью обычно используемой в таких задачах поршневой теории. В настоящей работе предложен новый способ вычисления давления, действующего на пластину при ее высокочастотных колебаниях, с его помощью исследован высокочастотный флаттер в нелинейной постановке и определены амплитуды, возникающие при флаттерных колебаниях.

*Ключевые слова:* нелинейный флаттер, нелинейные колебания, высокочастотный флаттер, флаттер пластины, панельный флаттер.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается упругая изотропно растянутая пластина, обтекаемая с одной стороны плоскопараллельным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа – с другой стороны, к которой приложено постоянное давление, уравновешивающее ее. Пластина вмонтирована в абсолютно жесткую плоскость, отделяющую поток газа от области постоянного давления. В работах [1–3] изучалась задача об устойчивости этой системы. Помимо классического, хорошо изученного (“низкочастотного”) типа флаттера, который обнаруживается при исследовании задачи с помощью поршневой теории, был найден новый (“высокочастотный”) тип флаттера, который не может быть получен с помощью поршневой теории. Настоящая работа посвящена исследованию высокочастотного флаттера в нелинейной постановке и определению амплитуд, возникающих при флаттерных колебаниях.

Будем предполагать, что нелинейность задачи вызвана геометрической нелинейностью поведения пластины – наличием мембранных напряжений, возникающих при ее изгибе (модель больших прогибов Кармана). Возмущение давления газа, действующее на пластину, будем считать линейно зависящим от прогиба, так как аэродинамическая нелинейность существенно влияет на колебания пластины лишь при очень больших числах Маха (порядка 20) [4, § 4.18]. Сначала рассмотрим задачу в двумерной постановке, вопрос о перенесении результатов на прямоугольные пластины будет рассмотрен в конце.

Безразмерное уравнение движения пластины имеет вид [5, § 24]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left( M_w^2 + K \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial w(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P\{w\} = 0$$

$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)a^2\rho_m}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a}, \quad K = \frac{E}{(1-\nu^2)a^2\rho_m} = 12D \quad (1.1)$$

$$L = \frac{L_w}{h}, \quad M = \frac{u}{a}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

Здесь  $w(x, t)$  – прогиб пластины, отнесенный к толщине,  $E, \nu, \rho_m$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность ее материала,  $L_w$  и  $h$  – ширина и толщина пластины,  $u, \rho$

и  $a$  – скорость, плотность и скорость звука газа. Натяжение пластины (коэффициент при  $\partial^2 w / \partial x^2$ ) складывается из двух частей: постоянного приложенного к пластине натяжения (первое слагаемое,  $\sigma$  – растягивающее напряжение) и дополнительного нелинейного натяжения, возникающего при изгибе пластины (второе слагаемое). Параметры  $D$  и  $L$  есть безразмерная жесткость и ширина пластины,  $M_w$  и  $K$  характеризуют ее натяжение и нелинейность,  $M$  и  $\mu$  – число Маха и безразмерная плотность газа. Выражение для  $K$  написано в предположении, что кромки пластины не смещаются при изгибе, в противном случае  $K$  меньше приведенного.

Оператор  $P\{w(x, t)\}$  есть возмущение давления газа; в случае гармонического колебания он имеет вид [4, § 4.7]:

$$P\{W(x) \cos \omega t\} = -\operatorname{Re} \frac{\mu}{\sqrt{M^2 - 1}} e^{-i\omega t} \left( -i\omega + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-L/2}^x \left( -i\omega W(\xi) + M \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \right) \exp \left( \frac{iM\omega(x - \xi)}{M^2 - 1} \right) J_0 \left( \frac{-\omega(x - \xi)}{M^2 - 1} \right) d\xi \quad (1.2)$$

В случае негармонического колебания для вычисления  $P\{w\}$  нужно представить прогиб в виде ряда или интеграла Фурье и воспользоваться линейностью оператора  $P$ .

Пластина занимает область  $-L/2 \leq x \leq L/2$ , на кромках заданы условия защемления или шарнирного опирания.

Приведем характерные значения параметров для стальной пластины, обтекаемой потоком воздуха при нормальных условиях ( $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 330$  м/с,  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_m = 8500$  кг/м<sup>3</sup>). Для определения максимального возможного  $M_w$  возьмем  $\sigma = \sigma_B = 2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> – предел прочности стали, тогда получим

$$D = 19.8, \quad M_w = 1.5, \quad K = 237, \quad \mu = 1.2 \cdot 10^{-4} \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие  $M > M_w + 1$ , необходимое для возникновения высокочастотного флаттера [1], а величину  $\mu$  будем считать малым параметром.

**2. Результаты исследования линейной устойчивости.** Сформулируем метод вычисления собственных частот линеаризованной задачи (1.1) [1, 2]. Рассмотрим комплексную плоскость собственных частот  $\omega$  (колебания считаются зависящими от времени как  $e^{-i\omega t}$ ). Нанесем на нее собственные частоты  $\omega_{0n}$  пластины, находящейся в вакууме; все они лежат на вещественной оси. Рассмотрим на этой плоскости кривую  $\Omega$ , являющуюся асимптотическим положением спектра пластины в потоке газа при больших  $L$  [1], показанную на фиг. 1. В точках  $\omega^*$ ,  $\omega^{**}$  она пересекается с вещественной осью, на отрезке  $\omega^{**} < \operatorname{Re} < \omega^*$  она лежит в верхней полуплоскости, вне него – в нижней. При

$$\operatorname{Re} \omega = \omega_{\max} = (M - 1) \sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2) / D} \quad (2.1)$$

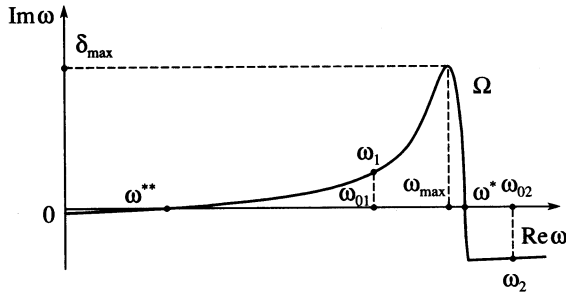
мнимая часть точек, лежащих на  $\Omega$ , достигает максимума

$$\operatorname{Im} \omega = \delta_{\max} = \mu \frac{2^{2/3} \sqrt{3} \left( \frac{(M - 1)^2 - M_w^2}{D} \right)^{1/6} (2(M - 1)^2 - M_w^2)^{1/3}}{(M - 1)^{4/3}} - \mu \frac{(2M - 1)^2}{4(M - 1) \sqrt{(2M - 1)^2 - 1}}$$

Расстояние  $|\omega^* - \omega_{\max}| \sim \mu^{2/3}$ , поэтому  $\omega^* \approx \omega_{\max}$ . Значение

$$\omega^{**} = \sqrt{(M^2 + 1 - \sqrt{4M^2 + 1})(M^2 + 1 - \sqrt{4M^2 + 1 - M_w^2}) / D}$$

вещественно при  $M > \sqrt{\sqrt{4M_w^2 + 1} + M_w^2 + 1}$ , в противном случае кривая  $\Omega$  лежит в верхней полуплоскости на всем отрезке  $0 < \operatorname{Re} \omega < \omega^*$ .



Фиг. 1. Часть кривой  $\Omega$ , соответствующая высокочастотному флаттеру. Характерный масштаб по вертикальной оси в 100 раз меньше, чем по горизонтальной

Проведя эти построения, собственные частоты  $\omega_n$  системы пластина – газ приближенно определяются так: они лежат на кривой  $\Omega$ , а их вещественные части равны  $\omega_{0n}$ . Для примера на фиг. 1 показано положение первых двух собственных частот. Заметим, что расположение  $\Omega$  зависит только от параметров  $M, M_w, D, \mu$  и не зависит от ширины пластины  $L$  и граничных условий, заданных на ее кромках.

Пусть число Маха достаточно мало (но превышает  $M_w + 1$ ), так что все частоты пластины в вакууме  $\omega_{0n} > \omega^*$ . Система в этом случае линейно устойчива, так как  $\text{Im} \omega_n < 0$ . При увеличении числа Маха  $M$  кривая  $\Omega$  сдвигается вправо; при  $M = M^*$  становится верным равенство  $\omega_{01} = \omega^*$ . Это число Маха лежит на границе области устойчивости. При дальнейшем увеличении  $M$  низшая мода колебаний становится растущей ( $\text{Im} \omega_1 > 0$ ) – возникает высокочастотный флаттер. Он имеет место пока  $\omega^{**} < \omega_{01} < \omega^*$ . При  $M = M^{**}$  становится верным равенство  $\omega_{01} = \omega^{**}$ , и при  $M > M^{**}$  первая мода колебаний снова становится затухающей. Аналогично можно проследить поведение второй и последующих мод, по которым возникает высокочастотный флаттер, если их частоты попадают в интервал  $\omega^{**} < \omega_{0n} < \omega^*$ .

При дальнейшем увеличении  $M$  для мод, прошедших через область высокочастотной неустойчивости ( $\omega_{0n} \ll \omega^{**}$ ), описанный метод вычисления собственных частот перестает быть верным. Действие потока на эти моды становится существенным, и  $\text{Re} \omega_n \neq \omega_{0n}$ ; собственные частоты при этом могут взаимодействовать и уходить в верхнюю полуплоскость. При этом возникает низкочастотный флаттер – неустойчивость связанного типа, которая выявляется при исследовании задачи с помощью поршневой теории [1]. В настоящей работе низкочастотный флаттер не рассматривается, и всегда предполагается, что число Маха не слишком велико, так что может возникать лишь высокочастотный флаттер.

**3. Вывод уравнения для амплитуды.** Пусть имеется какое-нибудь решение уравнения (1.1). Разложим его по собственным формам колебаний пластины в вакууме:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x) A_j(t) \tag{3.1}$$

с неизвестными пока амплитудами  $A_j(t)$ . Такое разложение существует и единственно в силу полноты системы собственных функций пластины.

Подставим это разложение в (1.1) и воспользуемся методом Бубнова–Галеркина, умножив (1.1) на  $W_n(x)$  и проинтегрировав по  $x$  от  $-L/2$  до  $L/2$ . В силу ортонормированности собственных функций справедливы равенства

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left( D \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} - M_w^2 \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} \right) W_n dx = \omega_{0n}^2 \delta_j^n, \quad \int_{-L/2}^{L/2} W_j W_n dx = \delta_j^n$$

Здесь  $\delta_j^n$  – символ Кронекера. Обозначая

$$a_{jn} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial W_j}{\partial x} \frac{\partial W_n}{\partial x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} W_n dx$$

$$P_{jn}(t) = \int_{-L/2}^{L/2} P\{W_j A_j\} W_n dx$$

получаем уравнение для  $n$ -й амплитуды

$$\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} + \omega_{0n}^2 A_n + K \sum_{m, k, j=1}^{\infty} a_{mk} a_{jn} A_m A_k A_j - \sum_{j=1}^{\infty} P_{jn} = 0 \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) есть бесконечная система уравнений для амплитуд  $A_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При этом  $a_{jn} = a_{nj}$ ,  $a_{jj} > 0$ , а в частном случае шарнирного опирания по обеим кромкам  $a_{jn} = 0$  при  $j \neq n$ .

Нелинейные колебания, как будет показано ниже, близки к гармоническим, поэтому для вычисления давления можно использовать формулу (1.2). Однако ввиду сложности ее прямого применения воспользуемся следующим приближенным способом вычисления давления.

Рассмотрим сначала линеаризованные уравнения (3.2)

$$\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} + \omega_{0n}^2 A_n - \sum_{j=1}^{\infty} P_{jn} = 0 \quad (3.3)$$

Из результатов исследования линейной устойчивости известно, что в случае высокочастотного флаттера или устойчивости собственные моды колебаний пластины в потоке близки к собственным модам пластины в вакууме. Другими словами, рассматривая решение системы уравнений (3.3) в виде

$$A_j(t) = C_j e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

получим счетное число собственных значений  $\omega_n$ , таких что  $|\omega_n - \omega_{0n}| \sim \mu \ll 1$ ,  $|C_j|/|C_n| \sim \mu \ll 1$ ,  $j \neq n$ . Из последней оценки следует, что  $|P_{jn}|/|P_{nn}| \sim \mu \ll 1$ ,  $j \neq n$ , и ряд в (3.3) можно заменить членом  $P_{nn}$ .

Изучим структуру величины  $P_{nn}$ . Из (1.2) видно, что при гармоническом колебании ( $A_n(t) = e^{-i\omega t}$ ) можно записать:  $P_{nn}(t) = p_{n1} e^{-i\omega t} + 2p_{n2} e^{-i\omega t}(-i\omega)$ , где  $p_{n1}$ ,  $p_{n2}$  есть функции  $\omega$ . Выражая  $P_{nn}$  через  $A_n$ , получим более удобную формулу, которую будем применять в нелинейном случае

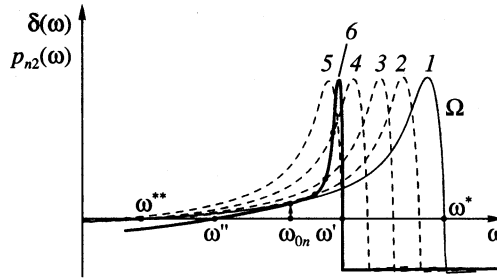
$$P_{nn}(t) = p_{n1}(\omega) A_n(t) + 2p_{n2}(\omega) \frac{\partial A_n(t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

Далее подставим выражение (3.4) в (3.3), оставив только основную –  $n$ -ю – гармонику, и используем (3.5):

$$-\omega_n^2 + 2i\omega_n p_{n2}(\omega_n) + \omega_{0n}^2 - p_{n1}(\omega_n) = 0,$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_{0n}^2 - p_{n1}(\omega_n) - p_{n2}^2(\omega_n)} + i p_{n2}(\omega_n) = \sqrt{\omega_{0n}^2 - p_{n1}(\omega_{0n}) - p_{n2}^2(\omega_{0n})} + i p_{n2}(\omega_{0n})$$

Последнее равенство верно с точностью до величин порядка  $\mu$ . Так как  $p_{nj} \sim \mu \ll 1$ , то величина  $p_{n2}$  является мнимой частью собственной частоты, то есть показателем усиле-



Фиг. 2. Построение зависимости  $p_{n2}(\omega)$ : кривая 1 –  $\Omega$ ; кривые 2–5 – она же, смещенная влево при увеличении  $\omega$ , кривая 6 – результирующая зависимость  $p_{n2}(\omega)$

ния колебаний, а  $p_{n1}$  отвечает только за малое изменение вещественной части собственной частоты под действием газа.

Обозначив  $\delta \equiv \text{Im}\omega$ ,  $\omega \equiv \text{Re}\omega$ , представим кривую  $\Omega$  (фиг. 1) как график зависимости  $\delta(M, M_w, D, \mu, \omega)$  при заданных  $M, M_w, D, \mu$ . Выше показано, что  $p_{n2}(\omega_{0n}) = \delta(M, M_w, D, \mu, \omega_{0n})$ . Пусть теперь колебание по  $n$ -й моде совершается с частотой  $\omega$ , отличной от  $\omega_{0n}$ . С точки зрения газа неважно, под действием каких причин произошло изменение частоты – нелинейности или, например, пропорционального изменения жесткости и натяжения пластины, так как форма колебания  $W_n(x)$  не зависит ни от того, ни от другого. Поэтому, найдя такое фиктивное значение жесткости  $D'(\omega)$ , что

$$\omega_{0n}(D', M'_w(D'), L) = \omega, \quad M_w'^2(D'(\omega)) = M_w^2 D'(\omega) / D \tag{3.6}$$

получаем, что  $p_{n2}(\omega) = \delta(M, M'_w(D'(\omega)), D'(\omega), \mu, \omega)$ .

Изучим поведение  $p_{n2}(\omega)$ . При  $\omega = \omega_{0n}$  величина  $p_{n2}(\omega_{0n}) = \delta(M, M_w, D, \mu, \omega_{0n})$  определяется непосредственно по фиг. 1. Будем увеличивать  $\omega$ . Тогда решение (3.6)  $D'(\omega)$  увеличивается. В свою очередь, кривая  $\Omega$  при увеличении жесткости смещается влево, так как  $\omega_{\max}$  (2.1) – уменьшается, и в результате  $p_{n2}(\omega)$  определяется по смещенной  $\Omega$ . Аналогично, при уменьшении частоты  $p_{n2}(\omega)$  определяется по кривой  $\Omega$ , смещенной вправо. В результате получаем зависимость  $p_{n2}(\omega)$ , показанную на фиг. 2. Фактически она представляет собой кривую  $\Omega$ , сжатую относительно вертикальной прямой  $\omega = \omega_{0n}$ .

Описанный способ не позволяет найти величину  $p_{n1}(\omega)$ , но поскольку в высокочастотной области она имеет порядок  $\mu$  и существенного влияния на колебания не оказывает, в дальнейшем положим  $p_{n1}(\omega) \equiv 0$ .

**4. Поведение мод, затухающих в линейном приближении.** Пусть в линейном приближении растет только первая мода, а остальные затухают. Покажем, что в нелинейном случае можно считать, что их амплитуды малы по сравнению с амплитудой первой моды.

Сгруппируем в (3.2) слагаемые с разными степенями  $A_n$  и учтем (3.5):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} - 2p_{n2}(\omega) \frac{\partial A_n}{\partial t} + \left( \omega_{0n}^2 + K \sum_{\substack{m, k = 1 \\ m, k \neq n}}^{\infty} (a_{mk} a_{nn} + 2a_{mn} a_{kn}) A_m A_k \right) A_n + \\ & + 3K \left( \sum_{\substack{m = 1 \\ m \neq n}}^{\infty} a_{mn} a_{nn} A_m \right) A_n^2 + K a_{nn}^2 A_n^3 + K \sum_{\substack{m, k, j = 1 \\ m, k, j \neq n}}^{\infty} a_{mk} a_{jn} A_m A_k A_j = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Зависимость  $p_{n2}(\omega)$  следует понимать как зависимость от характерной частоты колебания.

Предположим, что начальное возмущение мало, и все нелинейные члены тоже малы. Тогда квадрат характерной частоты  $\omega$  – это множитель, стоящий при  $A_n$ . Так как

$$\sum_{\substack{m, k = 1 \\ m, k \neq n}}^{\infty} (a_{mk}a_{nn} + 2a_{mn}a_{kn})A_m A_k = \frac{a_{nn}}{\sqrt{2L}} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{\partial W_j(x)}{\partial x} A_j(t) \right)^2 dx + \\ + \frac{1}{L} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial W_j(x)}{\partial x} \frac{\partial W_n(x)}{\partial x} A_j(t) dx \right)^2 > 0$$

то  $\omega > \omega_{0n}$ . Поскольку  $n$ -я мода линейно устойчива, то  $\omega > \omega_{0n} > \omega^*$ , и  $p_{n2}(\omega) < 0$ . Тогда член с первой производной в (4.1) можно представлять как действие искусственной внутренней вязкости в материале пластины.

Ниже будет показано, что под действием потока газа колебание по первой моде близко к гармоническому. Но с точки зрения уравнений (4.1) для высших мод неважно, под действием каких причин происходят эти колебания – например, можно считать, что по первой моде происходят вынужденные колебания с заданной частотой. Таким образом, вопрос о поведении высших мод сводится к задаче о форме собственных нелинейных колебаний пластины. Она подробно исследовалась в плоской [6] и пространственной [7] постановках, и для характерных значений параметров показано, что формы нелинейных колебаний при амплитудах, не превышающих  $1.5h$ , близки к линейным. В терминах уравнений (4.1) это означает, что решения  $|A_n(t)| \ll |A_1(t)|$ .

При амплитудах, сильно превышающих указанную, возможно возникновение внутреннего параметрического резонанса и изменение форм колебаний.

**5. Поведение моды, растущей в линейном приближении.** Считая, что  $|A_n| \ll |A_1|$ ,  $n > 1$ , в уравнении для  $A_1$  можно отбросить все члены, содержащие амплитуды с индексом выше 1. Тогда уравнение (4.1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} - 2p_{12}(\omega) \frac{\partial A_1}{\partial t} + \omega_{01}^2 A_1 + Ka_{11}^2 A_1^3 = 0 \quad (5.1)$$

Найдем предельные циклы этого уравнения. Поскольку они являются периодически решениями, то их можно искать в виде

$$A_1(t) = C \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} (C_{n1} \cos n\omega t + C_{n2} \sin n\omega t) \quad (5.2)$$

Предположим, что колебание близко к гармоническому, т.е.  $|C| \gg |C_{nj}|$ . После подстановки в (5.1), оставляя только линейные по  $C_{nj}$  члены, получим

$$-\omega^2 C \cos \omega t - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \omega^2 (C_{n1} \cos n\omega t + C_{n2} \sin n\omega t) + 2p_{12}(\omega) \omega C \sin \omega t + \\ + \omega_{01}^2 C \cos \omega t + \omega_{01}^2 \sum_{n=2}^{\infty} (C_{n1} \cos n\omega t + C_{n2} \sin n\omega t) - p_{11}(\omega) C \cos \omega t + \\ + Ka_{11}^2 C^3 \left( \frac{3 \cos \omega t}{4} + \frac{\cos 3\omega t}{4} \right) = 0$$

Приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах, получаем решение в первом приближении:

$$A_1(t) = C \cos \omega t + C_{31} \cos 3\omega t,$$

$$C = \sqrt{\frac{4(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{3Ka_{11}^2}}, \quad C_{31} = \frac{Ka_{11}^2}{4(9\omega^2 - \omega_{01}^2)} C^3 \quad (5.3)$$

$$p_{12}(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega', \quad \omega = \omega''$$

Здесь  $\omega'$ ,  $\omega''$  (фиг. 2) – соответственно решения уравнений

$$\omega = \omega^*(D'(\omega)), \quad \omega = \omega^{**}(D'(\omega)) \quad (5.4)$$

где  $D'(\omega)$  – фиктивная жесткость (3.6).

Так как в случае, когда первая мода является растущей в линейном приближении,  $\omega'' < \omega_{01} < \omega'$ , то из (5.3) получаем, что колебания с частотой  $\omega''$  невозможны, и есть только один предельный цикл, имеющий частоту  $\omega'$ .

Рассмотрим физический смысл полученных результатов. Представим, что в пластине возбуждается малое начальное возмущение по низшей моде колебаний. Соответствующая собственная частота лежит на кривой  $\Omega$  в области  $\omega^{**} < \text{Re}\omega < \omega^*$ . Неустойчивость возмущения в линейном приближении приводит к росту его амплитуды. Однако благодаря нелинейному члену в (5.1) амплитуда и частота связаны между собой, и частота вслед за амплитудой также начинает увеличиваться. Увеличение частоты означает движение вправо по кривой  $p_{12}(\omega)$  (фиг. 2). Так как без учета действия газа решения уравнения (5.1) имеют вид нейтральных колебаний с произвольной амплитудой, то нелинейность сама по себе не может привести к прекращению роста амплитуды. В результате, пока  $p_{12}(\omega) > 0$  увеличение амплитуды, а следовательно и частоты, будет продолжаться. Когда частота  $\omega$  достигнет  $\omega'$ , величина  $p_{12}(\omega)$  станет равной нулю, и усиление сменится нейтральным колебанием. Внутреннего резонанса при этом не произойдет, так как  $\omega' < \omega^* < \omega_{0n}$ ,  $n > 1$ .

Приведенные рассуждения можно подтвердить энергетическими оценками. Умножим (5.1) на  $\partial A_1 / \partial t$  и преобразуем к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial A_1}{\partial t} \right)^2 + \omega_{01}^2 A_1^2 + Ka_{11}^2 \frac{A_1^4}{2} \right) = 2p_{12}(\omega) \left( \frac{\partial A_1}{\partial t} \right)^2 \quad (5.5)$$

Левая часть полученного равенства представляет собой изменение полной энергии колебания. При  $p_{12}(\omega) > 0$  она увеличивается, при  $p_{12}(\omega) < 0$  – уменьшается, и только в случае  $p_{12}(\omega) = 0$  колебания нейтральны.

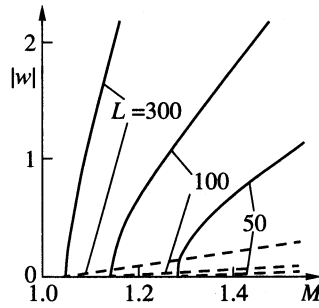
Из уравнения (5.5) сразу следует, что полученный предельный цикл с частотой  $\omega'$  устойчив, так как увеличение (уменьшение) амплитуды приводит к увеличению (уменьшению) частоты и обратному эффекту со стороны давления – уменьшению (увеличению) энергии и амплитуды.

Найдем пределы применимости формул (5.3), для чего вычислим амплитуды  $C$ ,  $C_{31}$  в явном виде. Для простоты рассмотрим случай шарнирного опирания по обоим кромкам и отсутствия натяжения ( $M_w = 0$ ). Тогда

$$\omega_{01} = \sqrt{D} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \Rightarrow D'(\omega) = \omega^2 \left( \frac{L}{\pi} \right)^4$$

Так как

$$\omega^*(D) \approx \omega_{\max} = (M-1)^2 / \sqrt{D}$$



Фиг. 3. Амплитуды прогиба пластины, отнесенные к толщине (выражения (5.6), умноженные на  $\sqrt{2/L}$ ), при параметрах (1.3) и  $L = 50, 100, 300$ . Сплошными линиями показаны  $C(M)$ , штриховыми –  $C_{31}(M)$

то, решая уравнение  $\omega = \omega^*(D'(\omega))$ , окончательно получаем частоту колебаний предельного цикла:

$$\omega' = (M - 1)(\pi/L).$$

Далее, так как при числе Маха  $M^*$  система находится на границе устойчивости и  $\omega_{01} = \omega^* = \omega'$ , то  $\omega_{01} = (M^* - 1)(\pi/L)$ . Тогда из (5.3) получаем

$$C = \frac{2\pi\sqrt{M + M^* - 2}}{\sqrt{3Ka_{11}^2 L}} \sqrt{M - M^*}, \quad a_{11} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2L}^{5/2}} \quad (5.6)$$

$$C_{31} = \frac{2\pi(M + M^* - 2)^{3/2}}{\sqrt{27Ka_{11}^2 L(9(M - 1)^2 - (M^* - 1)^2)}} (M - M^*)^{3/2}$$

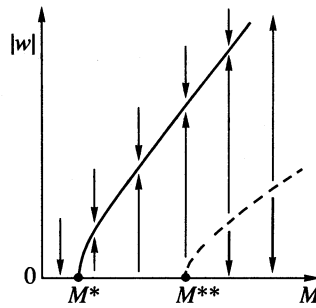
В силу условия нормировки собственных форм  $W_1(x) = \sqrt{2/L} \cos(\pi x/L)$ , поэтому для получения “физической” амплитуды (отнесенной к толщине) значения (5.6) нужно умножить на  $\sqrt{2/L}$ . Графики этих зависимостей показаны на фиг. 3 для параметров (1.3) и различных  $L$ . Видно, что условие  $C_{31} \gg C$  выполнено во всем диапазоне чисел Маха, представляющем практический интерес, т.е. колебания близки к гармоническим.

Отметим, что зависимость амплитуд (5.3) от частоты такая же, как и при нелинейных колебаниях пластины в вакууме. Отличие состоит в том, что в вакууме колебания могут происходить с произвольной частотой (и амплитудой), а в потоке частота определена условием  $\omega = \omega'$ .

**6. Поведение пластины при увеличении  $M$ .** Как показывают формулы (5.3), (5.4), амплитуды колебаний монотонно увеличиваются при повышении числа Маха  $M$ . При достижении  $M^{**}$  частота  $\omega_{01}$  становится равной  $\omega^{**}$  и затем выходит из области неустойчивости:  $\omega_{01} < \omega^{**}$ . В то же время колебания, описываемые полученным в предыдущем разделе предельным циклом, будут непрерывно продолжаться, поскольку он устойчив. Два устойчивых решения – предельный цикл и невозмущенное состояние – разделяет появляющийся при  $M > M^{**}$  неустойчивый предельный цикл с частотой  $\omega''$ . Его неустойчивость видна из (5.5): при сколь угодно малом уменьшении амплитуды колебание затухнет, а при сколь угодно малом увеличении – разовьется до предельного цикла с частотой  $\omega'$ .

Таким образом, получаем картину областей притяжения решений, показанную на фиг. 4. Она позволяет сделать вывод о типе возбуждения флаттерных колебаний. При





Фиг. 4. Области притяжения решений (5.1). Сплошной линией показан устойчивый предельный цикл, штриховой – неустойчивый

увеличении числа Маха от 1 до \$M^\*\$ и далее происходит мягкое возбуждение флаттера: амплитуда предельного цикла равна нулю при \$M = M^\*\$ и постепенно увеличивается с увеличением \$M\$. Это показывают, в частности, формулы (5.6). Увеличим число Маха до \$M > M^{\*\*}\$ и подавим колебания, переведя пластину в устойчивое состояние покоя. Начнем теперь уменьшать число Маха. Когда оно станет равным \$M^{\*\*}\$, произойдет жесткое возбуждение флаттера: амплитуда резко увеличится от нуля до амплитуды устойчивого предельного цикла. В этом заключается различие в поведении пластины при увеличении и уменьшении числа Маха.

**7. Колебания прямоугольных пластин.** Рассмотрим изменения, возникающие в проведенном выше анализе, при рассмотрении нелинейных колебаний прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа параллельно одной из ее кромок. Ось \$x\$ примем параллельной вектору скорости газа, ось \$y\$ – перпендикулярной ему и лежащей в плоскости пластины. Как и раньше, используем модель Кармана [5, § 7]. Безразмерные уравнения движения изотропно растянутой пластины состоят из двух уравнений относительно прогиба \$w\$ и функции напряжений Эри \$\Phi\$:

$$D\Delta^2 w - M_w^2 \Delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P\{w\} = \Lambda(w, \Phi) \tag{7.1}$$

$$\frac{1}{12(1 - \nu^2)D} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} \Lambda(w, w)$$

Здесь \$\Delta\$ – двумерный оператор Лапласа, все безразмерные параметры – те же, что и в разд. 1,

$$\Lambda(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Пластина занимает область \$-L\_x/2 \le x \le L\_x/2, -L\_y/2 \le y \le L\_y/2\$. Для прогиба \$w\$ на кромках выставляются граничные условия шарнирного опирания или защемления. При построении приближенных решений для \$\Phi\$ обычно используются интегральные граничные условия, связывающие смещения кромок пластины с жесткостью ребер конструкции, в которую она вмонтирована.

Сначала рассмотрим изменения, связанные с давлением \$P\{w\}\$. Рассматривая прогиб в виде собственной формы колебаний и считая зависимость от времени гармонической, используем метод вычисления давления, предложенный в [3]. Оно вычисляется так же, как и в плоском случае (разд. 3), но число Маха \$M\$ нужно заменить на \$M \cos \alpha\$, где \$\alpha\$ есть

угол между плоскостью бегущих волн, из которых состоит собственное колебание, и осью  $x$  [3]. В частности, при шарнирном опирании по всем кромкам  $\alpha = \arctg(L_x n / (L_y m))$ , где  $m$  и  $n$  – числа полуволн собственной функции в направлении  $x$  и  $y$  соответственно.

Перейдем к изменениям, связанным с нелинейными членами. Пусть для определенности имеется высокочастотный флаттер по первой моде колебаний, и согласно методу Бубнова–Галеркина положим  $w(x, y, t) = W_1(x, y)A_1(t)$ , причем  $W_1(x, y)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\iint W_1^2 dx dy = 1$$

интегрирование производится по всей поверхности пластины. Методом, описанным в [5, § 19–20], система (7.1) сводится к уравнению для амплитуды

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} - 2p_{12}(\omega) \frac{\partial A_1}{\partial t} + \omega_{01}^2 A_1 + K_1 A_1^3 = 0$$

В частности, при шарнирном опирании по всем кромкам и условии несмещаемости кромок (абсолютно жесткие ребра конструкции, в которую вмонтирована пластина) выражение для  $K_1$  имеет вид

$$K_1 = D\pi^4 \frac{3(1 - \nu^2)(L_x^2 + L_y^4) + 6(L_x^4 + 2\nu L_x^2 L_y^2 + L_y^4)}{L_x^5 L_y^5}$$

Полученное уравнение по форме полностью совпадает с (5.1), если заменить  $K a_{11}^2 \leftrightarrow K_1$ ,  $M \leftrightarrow M \cos \alpha$ . Это позволяет прямо использовать результаты разд. 5. Устойчивый предельный цикл в нулевом приближении имеет вид

$$A_1(t) = C(\omega) \cos(\omega t), \quad C(\omega) = \sqrt{\frac{4(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{3K_1}}, \quad \omega = \omega'(M)$$

где  $\omega'(M)$  – решение уравнения  $p_{12}(\omega) = 0$ , такое, что  $\omega' > \omega_{01}$ .

В качестве примера вычислим амплитуду предельного цикла колебаний шарнирно опертой пластины при  $M_w = 0$ , считая, что флаттер возникает по низшей моде ( $m = n = 1$ ). Так как

$$\omega_{01} = \sqrt{D} \frac{\pi^2 (L_x^2 + L_y^2)}{L_x L_y}$$

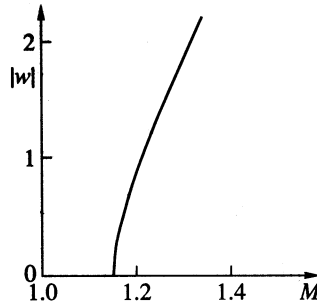
то, повторяя выкладки разд.5, находим

$$\omega'(M) = (M \cos \alpha - 1) \frac{\pi \sqrt{L_x^2 + L_y^2}}{L_x L_y}$$

Так как  $\omega_{01} = \omega'(M^*)$ , то окончательно получаем

$$C(M) = \frac{2\pi \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \sqrt{(M + M^*) \cos \alpha - 2}}{\sqrt{3K_1} L_x L_y} \sqrt{(M - M^*) \cos \alpha} \quad (7.2)$$

Рассмотрим стальную пластину размерами  $220 \times 750 \times 1.5$  мм, поставленную широкой стороной поперек потока. Используем параметры (1.3),  $L_x = 146.67$ ,  $L_y = 500$ . Расчет, ос-



Фиг. 5. Амплитуды прогиба прямоугольной пластины, отнесенные к толщине (выражения (7.2), умноженные на  $2/\sqrt{L_x L_y}$ ), при параметрах (1.3),  $L_x = 146.67$ ,  $L_y = 500$

нованный на [3], дает  $M^* = 1.15$ , причем первой в область неустойчивости попадает низшая мода, для которой  $\alpha = 0.29$ . Поскольку

$$W_1(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right)$$

то для получения амплитуды, отнесенной к толщине пластины, выражение (7.2) нужно умножить на  $2/\sqrt{L_x L_y}$ . Результат вычислений показан на фиг. 5. Как видно, скорость увеличения амплитуды при углублении в область флаттера имеет такой же порядок, как и в плоском случае (фиг. 3). Следующая мода колебаний (она имеет 2 полуволны в направлении потока и 1 в поперечном направлении) становится неустойчивой при  $M = 1.21$ ; при этом числе Маха амплитуда низшей моды примерно равна толщине пластины.

**8. Сравнение амплитуд при высокочастотном и низкочастотном флаттере.** При низкочастотном флаттере зависимость амплитуды колебаний, отнесенной к толщине, от числа Маха для шарнирно опертой прямоугольной пластины, вычисленная по [4, § 4.15–4.18], в используемых здесь обозначениях имеет вид

$$A(M) = A_0 \sqrt{\frac{M}{M_{cr}} - 1}, \quad A_0 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{6L_x^2 + 15L_y^2}{12L_x^2 + (45 - 15v^2)L_y^2}} \quad (8.1)$$

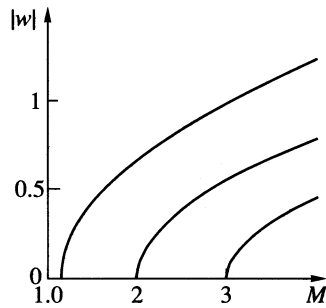
Здесь  $M_{cr}$  – критическое число Маха для низкочастотного флаттера

$$M_{cr} = \frac{D}{\mu L_x^3} \frac{9\pi^4}{16} \left( 5 + 2 \frac{L_x^2}{L_y^2} \right)$$

Эти формулы получены с использованием линейной поршневой теории для давления газа и двухчленного приближения Бубнова–Галеркина. Из-за использования только двух членов  $M_{cr}$  для пластин, удлиненных в направлении, перпендикулярном потоку, примерно на 20% занижено по сравнению с точным [8]. Тем не менее, формула (8.1) вполне годится для оценки возникающих при флаттере амплитуд.

Для пластины, рассмотренной в примере разд. 7, критическое число Маха низкочастотного флаттера  $M_{cr} = 15.3$ , что лежит далеко за пределами применимости поршневой теории. Поэтому в расчетах рассмотрим пластины с теми же относительными размерами ( $L_x/L_y = 220/750$ ), но имеющими за счет других механических свойств более низкие  $M_{cr}$ . Зависимость  $A(M)$  для нескольких случаев показана на фиг. 6.

Сравнивая рост амплитуды при углублении в область неустойчивости для низкочастотного (фиг. 6) и высокочастотного (фиг. 3 и 5) флаттера, легко заметить, что при высокочастотном флаттере увеличение амплитуды происходит намного быстрее. Это связано с механизмом поддержания нелинейных колебаний при высокочастотном флатте-



Фиг. 6. Амплитуды прогиба прямоугольной пластины, отнесенные к толщине, при низкочастотном флаттере:  $L_x/L_y = 146.67/500$ ,  $M_{cr} = 1.15, 2$  и  $3$

ре: поток газа “выбирает” частоту колебаний  $\omega(M)$ , сильно зависящую от числа Маха. Благодаря нелинейности эта частота, в свою очередь, однозначно определяет амплитуду, которая в результате сильно растет при увеличении  $M$ .

**Заключение.** Предложен новый метод вычисления давления, действующего на пластину при ее высокочастотных колебаниях. С его помощью исследованы амплитуды нелинейных колебаний, возникающих при высокочастотном флаттере пластины в двумерной (полоса) и трехмерной (прямоугольная пластина) постановках.

В случае неустойчивости по одной моде частота устойчивого предельного цикла определяется условием равенства нулю работы, совершаемой давлением газа на периоде колебания. Амплитуды растущей и затухающих мод вычисляются по частоте из обычных уравнений нелинейных колебаний пластины в вакууме, т.е. высокочастотные флаттерные колебания пластины в потоке можно представлять как вынужденные колебания в вакууме с заданной частотой растущей моды.

Получена явная зависимость амплитуды и частоты предельного цикла от параметров задачи. Показано, что при увеличении числа Маха возникает второй предельный цикл, он неустойчив и разделяет области притяжений состояния покоя и устойчивого предельного цикла.

Проведено сравнение скорости роста амплитуды при углублении в область неустойчивости при высокочастотном и низкочастотном флаттере и показано, что при высокочастотном флаттере рост намного более сильный.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 05-01-00219) и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4710.2006.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
2. Веденеев В.В. О высокочастотном флаттере пластины // Известия РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163–172.
3. Веденеев В.В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173–181.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
6. Ribeiro P., Petyt M. Non-linear vibrations of beams with internal resonance by the hierarchical finite element method // J. Sound and Vibrat. 1999. V. 224. № 4. P. 591–624.
7. Han W., Petyt M. Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method. Pt I: The fundamental mode of isotropic plates // Comput. and Structures. 1997. V. 63. № 2. P. 295–308.
8. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.