

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ**

Выпуск 7

Издание выходит с 2003 года

А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова

Классические и неклассические
разрывы и их структуры
в нелинейно-упругих средах
с дисперсией и диссипацией



Москва
2007

УДК 531.01
ББК (В)22.251
С56

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, В. С. Владимиров,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь),
А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Коновалов, С. П. Новиков,
А. Н. Паршин (заместитель главного редактора),
Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. А. Славнов, Д. В. Трещёв, Е. М. Чирка*

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2007. Вып. 7 : Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией / Куликовский А. Г., Чугайнова А. П. — 150 с.

ISBN 5-98419-019-2

Серия “Современные проблемы математики” — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-019-2

© Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2007

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
§ 1. Нелинейные волны малой амплитуды в упругих средах	19
1.1. Волны Римана.	21
1.2. Ударные волны.	23
1.3. Автомодельные задачи и неединственность решения.	27
§ 2. Нелинейные волны в вязкоупругих средах и проблемы устойчивости ударных волн	32
2.1. Структура квазипоперечных ударных волн.	32
2.2. Одномерные нестационарные решения. Описание решений в условиях неединственности автомодельных асимптотик.	37
2.3. Взаимодействие нелинейных волн в слабоанизотропной среде.	43
2.4. Перестройка нелинейной упругой волны в среде с малой анизотропией.	52
2.5. Исследование устойчивости структуры ударных волн в вязкоупругой среде при взаимодействии с одномерными неоднородностями.	60
2.6. Устойчивость к двумерным возмущениям метастабильной ударной волны в вязкоупругой среде.	66
§ 3. Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией	80
3.1. Структура разрывов.	81
3.2. Неединственность решений автомодельной волновой задачи.	95
3.3. Построение автомодельных асимптотик в области неединственности как предела нестационарных решений системы уравнений в частных производных.	98
3.4. Выводы.	108
§ 4. Неклассические разрывы при распространении продольных волн в вязко-упругих стержнях со сложной нелинейностью	110
4.1. Разрывы со стационарной структурой. Задача о распаде произвольного разрыва.	110
4.2. Описание численных экспериментов.	116

4.3. Выводы.	123
§ 5. Заключение	126
§ 6. Приложение 1. Упрощенные уравнения одномерной теории упругости для квазипоперечных волн	129
6.1. Эквивалентная несжимаемая среда при описании квазипоперечных волн.	130
6.2. Упрощенные уравнения для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону.	133
6.3. Движения вязко-упругих сред. Модель Кельвина–Фойхта.	135
6.4. Подобие нелинейных эффектов.	137
§ 7. Приложение 2. Достаточный признак несуществования или неединственности решений гиперболических уравнений, выражающих законы сохранения	139

Предисловие

Предлагаемая работа посвящена изучению аналитическими и численными методами задач, связанных с распространением одномерных нелинейных волн в упругих средах. Уравнения нелинейной теории упругости относятся к классу гиперболических систем, выражающих законы сохранения. Для возможности однозначного построения решений оказывается необходимым дополнить эти уравнения членами, позволяющими адекватно описывать реальные мелкомасштабные явления, в частности структуру возникающих разрывов. Рассмотрено поведение нелинейных волн в двух случаях: когда мелкомасштабные процессы обусловлены вязкостью и когда помимо вязкости существенную роль играет дисперсия. Решения в этих случаях отличаются кардинально. Обнаружено сложное поведение решений, содержащих разрывы, качественно отличающееся от поведения нелинейных волн в других ранее исследованных моделях сплошных сред. Выявленные особенности поведения решений не связаны с какой-либо спецификой уравнений нелинейной теории упругости и являются одним из случаев общего положения систем уравнений с частными производными со сложной гиперболической частью.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов, вошедших в цикл работ “Нелинейные волны в сплошных средах, описываемые гиперболическими системами уравнений высокого порядка: структуры и их разрывы”, за который авторам в составе авторского коллектива была присуждена в 2003 году Государственная премия Российской Федерации. В обзор вошли также новые результаты авторов.

Работа выполнена в рамках научной программы Российской академии наук “Математические методы нелинейной динамики” и при финансовой поддержке этой программы, а также работа поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований и грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

Введение

Проблема адекватного математического описания нелинейных волн в сплошных средах с учетом влияния реальных факторов является одной из центральных в механике. Потребности практики приводят к необходимости использования все более сложных математических моделей, учитывающих комплексное взаимодействие разнообразных процессов, происходящий в сплошной среде. Классические модели, использовавшиеся при изучении волн, усложняются путем включения в рассмотрение новых физических эффектов. Исследование поведения таких сложных сред, описываемых системами уравнений высокого порядка, требует развития новых методов и средств анализа.

Во многих случаях основной вклад в развитие нелинейных волновых процессов в сплошных средах вносят крупномасштабные возмущения, эволюция которых может быть описана, как правило, нелинейными гиперболическими уравнениями. Влияние мелкомасштабных процессов, таких как дисперсия и диссипация, проявляется в узких высокоградиентных зонах, моделируемых в рамках гиперболических уравнений поверхностями разрыва основных параметров течения.

Существенным этапом исследования является необходимый во многих случаях выход за рамки гиперболических уравнений и использование усложненных уравнений с целью изучения структуры разрывов и для выбора единственного решения в случае, когда решения гиперболической системы неединственны.

Предлагаемая работа посвящена изучению задач, связанных с распространением одномерных нелинейных волн в упругих средах при различных дополнительных предположениях относительно процессов, происходящих в структуре ударных волн и в других высокоградиентных слоях. Обнаружено сложное поведение решений, содержащих разрывы, во многом не совпадающее с поведением нелинейных волн в других ранее исследованных случаях. Обнаруженные особенности решений не связаны с какой-либо спецификой уравнений теории упругости, а являются общим случаем для достаточно сложных гиперболических систем уравнений.

Уравнения нелинейной теории упругости относятся к классу гиперболических систем, выражающих законы сохранения. Ввиду этого в решениях возникают особенности, приводящие к образованию разрывов, на которых должны выполняться граничные условия в виде равенств, следующие из законов сохранения, связывающие искомые функции по разные стороны разрыва. Если не предполагается выполнения других соотношений на разрыве, отличных от законов сохранения, то разрыв при выполнении некоторых неравенств, выражающих условие *неубывания энтропии* и *корректности граничных условий* на разрыве, будем называть классическим или *ударной волной*. В ряде случаев оказывается необходимым рассмотрение и введение в решения задач неклассических, *особых разрывов*, на которых кроме соотношений, следующих из законов сохранения, должны выполняться также некоторые *дополнительные соотношения*.

Известно, что существуют гиперболические системы уравнений такие, что построение решений автомодельных задач с использованием непрерывных решений и ударных волн оказывается неоднозначным (см., например, [1]–[3]). Неоднозначность с “гиперболической” точки зрения имеет место также при построении решений автомодельных задач, связанных с распространением особых разрывов, свойства которых заведомо не определяются только законами сохранения. Для выделения единственных физически обоснованных решений гиперболическая система уравнений дополнялась членами, которые пренебрежимо малы в областях, где изменение решений характеризуется некоторым большим или конечным пространственным масштабом L , а в узких областях, ширины много меньше L , оказывают существенное влияние на решение, делая его непрерывным. Такую систему уравнений будем называть расширенной или *полной системой уравнений*. Разрывам в решениях гиперболических систем уравнений соответствуют узкие переходные зоны в решениях полных систем уравнений. Решение полной системы уравнений внутри переходной зоны называется *структурой* разрыва. Требование существования структуры разрывов приводит к выделению разрывов, которые часто рассматриваются как реально существующие [4].

К особым разрывам относятся хорошо известные фронты горения в газах [5], которые распространяются по горючей смеси так, что относительная скорость газа с обеих сторон от фронта меньше скорости звука. В качестве дополнительного условия

на фронте обычно задается скорость фронта по отношению к газу перед фронтом. Эта скорость теоретически определяется как условие существования структуры фронта горения с учетом химической кинетики, теплопроводности и вязкости. Известны и другие задачи, в решениях которых существенную роль играют особые разрывы. В частности, исследованы разрывы, требование существования структуры которых приводит к нескольким дополнительным условиям, как, например, это имеет место, если газ, проходя через разрыв, приобретает или теряет электропроводность в присутствии магнитного поля [6]–[8].

Если известно, что особые фронты не входят в решение, то требование существования структуры у используемых разрывов в ряде случаев приводит к отбрасыванию некоторой части ударных волн, в результате чего решение задачи может стать единственным, как это показано в [2, 3]. При этом может оказаться, что требование допустимости выделяет то или иное множество разрывов в зависимости от мелкомасштабных процессов, которые тем самым определяют решение задач в целом. Это было продемонстрировано на примерах [9, 10], а в [11] приведен пример гиперболической системы, для которой требование допустимости разрывов не приводит к единственности решений.

Во всех перечисленных случаях проводился выход за рамки гиперболической системы уравнений, причем добавляемые в эти уравнения члены существенно влияли на множество допустимых разрывов и их свойства и, следовательно, и на решения задач в целом. Поэтому оказывается недостаточным знание только вида гиперболических уравнений, а требуется знание полной системы уравнений, которая описывает как крупномасштабные, так и мелкомасштабные явления. Однако при рассмотрении явлений с точки зрения крупного масштаба часто бывает достаточно меньшего объема дополнительных сведений. Например, как уже упомянуто, в задачах с фронтами горения достаточно знания скорости этих фронтов. Будем называть *гиперболической моделью* гиперболическую систему уравнений для описания непрерывных решений и множество разрывов, которые могут использоваться при построении решений. Эти разрывы будем называть *допустимыми*.

Множество допустимых разрывов для одной и той же гиперболической системы уравнений может определяться различным образом, порождая разные гиперболические модели. В идеале мно-

жество допустимых разрывов совпадает с множеством разрывов, которые могут физически осуществляться. Однако последнее не всегда заранее известно. Уже упоминалось, что во многих случаях множество допустимых разрывов определяется как множество разрывов, которым соответствует решение задачи о структуре в рамках некоторой полной системы уравнений. При этом обычно дополнительно считается, что структура одномерна и стационарна, т.е. представляется бегущей волной. Такой подход к определению множества допустимых разрывов будет использоваться ниже в этой работе. Однако в § 4 будет показано, что при определенных условиях структура разрывов не представляется бегущей волной, а в ней происходят внутренние периодические колебания. Возможны также внутренние колебания и неоднородность движения внутри структуры, которые ранее изучались в других задачах механики сплошной среды и, в частности, в теории горения и детонации [12]–[15].

Излагаемые ниже результаты относятся к проблеме нелинейных волн в упругих средах и могут иметь, таким образом, прикладное значение. Уравнения нелинейной теории упругости [16, 17] представляют собой квазилинейную гиперболическую систему уравнений в частных производных, выражающую законы сохранения массы, импульса и энергии. Если в среде помимо упругих имеются также вязкие напряжения, то система приобретает свойства параболичности. Оказалось, что многие, упомянутые выше, особенности поведения решений уравнений, выражающих законы сохранения, присущи уравнениям нелинейной теории упругости. В тех случаях, когда в мелкомасштабных явлениях проявляются эффекты дисперсии, обнаружены новые свойства решений, которые, несомненно, имеют место для других систем уравнений, мелкомасштабные явления в которых включают в себя диссипацию и дисперсию. Наибольший интерес представляют задачи, для которых гиперболическая модель дает неединственное решение. Эти случаи подробно исследованы в предлагаемой работе с помощью численного построения решений полных систем уравнений с частными производными с выявлением гиперболических асимптотик.

В изотропных упругих средах волны малых возмущений, рассматриваемые в линейном приближении, делятся на продольные и поперечные [16, 17]. В продольных волнах движение среды происходит по нормали к фронту волны, а в поперечных – в направ-

лениях, параллельных фронту. Если нелинейность и анизотропия среды малы, то свойства волн меняются мало. В продольных волнах появляется малая поперечная составляющая движения, а в поперечных – малая продольная. Такие волны называются соответственно *квазипродольными* и *квазипоперечными*. Как было выяснено в [19] (см. также [8]), наиболее интересное поведение уже в случае малой нелинейности проявляют квазипоперечные волны. Ниже, в § 1–§ 3, дается обзор результатов исследования нелинейных квазипоперечных волн малой амплитуды в упругих и вязко-упругих слабоанизотропных средах. Параграф 4 посвящен изучению распространения нелинейных продольных волн в стержнях, когда существенны эффекты дисперсии.

Свойства упругой среды определяются зависимостью ее внутренней энергии от деформации и энтропии. Ввиду предполагаемой малости деформаций внутренняя энергия представляется всюду в дальнейшем в виде многочлена по деформациям, причем в разложении по деформациям учитывались члены до четвертой степени включительно. Среда предполагалась слабоанизотропной и свойства анизотропии в силу ее малости учитывались лишь в квадратичных членах. Эта модель используется всюду ниже при рассмотрении квазипоперечных волн.

В § 1 показано, что при наличии общего типа малой анизотропии свойств среды, имеющей место в плоскостях постоянной фазы (*волновой анизотропии*), поведение нелинейных квазипоперечных волн, а также решений начально-краевых задач качественным образом отличается от случаев, когда такая анизотропия отсутствует, как это имеет место в магнитной гидродинамике [18] или в частных случаях в упругой среде [16]. Важно заметить, что наличие анизотропии в упругой среде может рассматриваться как случай общего положения, поскольку она проявляется и в исходно изотропной среде, подвергнутой предварительной деформации. В пп. 1.1 и 1.2 приведены результаты исследований поведения волн Римана и ударных волн в такой среде. В п. 1.3 проведен анализ автомодельной задачи о волнах в нелинейно-упругом полупространстве, возбуждаемых внезапным изменением касательных напряжений на границе. Такую задачу часто называют *задачей о поршине*. Анализ проводился в предположении, что допустимые разрывы это ударные волны.

Одной из основных особенностей нелинейной теории упругости является неединственность решений задач [19] (см. также [8]).

Упомянутая задача о поршне может иметь два решения в некоторой области задаваемых параметров. Решения этих задач строились из автомодельных волн Римана и ударных волн, т.е. разрывов, удовлетворяющих условиям корректности Лакса [20] (условиям корректности, или эволюционности, в предположении, что соотношения на разрывах представлены только законами сохранения).

При изложении результатов в § 1 использовалась не система уравнений теории упругости, а приближенная упрощенная система, состоящая из двух гиперболических уравнений, описывающая распространение двух взаимодействующих между собой квазипоперечных волн. Эта система справедлива, когда волны, связанные с другими семействами характеристик достаточно малы. Вывод этой системы дается в Приложении 1. Решения упрощенной системы уравнений тем меньше отличаются от решений системы уравнений теории упругости, чем меньше амплитуда рассматриваемых волн. Упрощенные уравнения – это аналог уравнений Хопфа в случае, когда описываемые возмущения связаны не с одним, а с двумя семействами характеристик. Автомодельная задача, изученная в п. 1.3, – это одновременно задача о распаде произвольного разрыва для обсуждаемой системы уравнений. Решение задачи о распаде произвольного разрыва для системы уравнений теории упругости содержит две системы квазипоперечных волн, распространяющихся в разные стороны. Число решений этой задачи может достигать четырех [19].

В § 2 и § 3, используются расширенные системы уравнений, описывающие распространение квазипоперечных волн малой амплитуды в одну сторону, причем в § 2 эта система снабжается членами, описывающими влияние вязкости, а в § 3 – влияние вязкости и дисперсии. Эти системы могут рассматриваться как аналоги уравнений Бюргерса и Кортевега–де Фриза–Бюргерса.

В Приложении 1 (п. 6.3) указываются условия подобия одномерных решений нелинейной теории упругости для одномерных задач с малыми возмущениями и доказывается, что обнаруженная неединственность может иметь место в исходно изотропной однородной среде при сколь угодно малых отклонениях от ненапряженного состояния.

В Приложении 2 установлены причины неединственности решений системы уравнений нелинейной теории упругости и получено легко проверяемое достаточное условие неединственности

или несуществования решений произвольной гиперболической системы, выражающей законы сохранения.

В §2 (см. также Приложение 1) в уравнения движения добавлены члены, описывающие вязкие напряжения (модель упруго-вязкой среды Кельвина–Фойхта) и используется система уравнений для квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону. В п. 2.1 изучена стационарная структура разрывов, т.е. структура, которая представляется бегущей волной. Показано, что разрывам, удовлетворяющим условиям Лакса, соответствуют решения, представляющие их упруго-вязкую структуру и что нет других разрывов со структурой. Таким образом, исследование вязкой структуры ударных волн не привело к сокращению множества допустимых разрывов, использовавшихся в п. 1.3 для построения решений, и к единственности решений автомодельных задач.

В п. 2.2 представлены результаты численного решения неавтомодельных задач о поршне с неединственной автомодельной асимптотикой. Если решается система уравнений в частных производных с учетом вязкости в случае, когда граничные условия меняются в течение конечного интервала времени, а затем остаются неизменными, то при больших временах можно ожидать формирование автомодельной асимптотики. Численные эксперименты показали, что может реализовываться любое из имеющихся автомодельных решений, и качественно описано при каких условиях (т.е. функциях задающих изменение граничных условий) какая автомодельная асимптотика возникает. Если величину вязкости устремить к нулю, то интервал времени, в течении которого следует определенным образом менять граничные условия для формирования автомодельной асимптотики того или иного типа, можно также устремить к нулю. В пределе при вязкости, обращаемой в нуль, не остается критерия для выбора автомодельного решения.

Еще одна группа вопросов, ответы на которые могли бы привести к выделению единственного решения автомодельных задач в гиперболической постановке, – это изучение устойчивости волн, входящих в автомодельные решения. Одна из ударных волн вызывает особые подозрения. Если состояния впереди и сзади этой ударной волны задать как начальные условия в задаче о распаде произвольного разрыва, то в последующее время с гиперболической точки зрения возможны два решения. Эта волна либо про-

должит свое существование, либо она распадется и далее решение будет представлено некоторой системой волн, имеющих различные скорости.

В связи с этим в § 2 рассмотрены задачи о взаимодействии ударных волн между собой (п. 2.3) и с неоднородностями фона (пп. 2.5, 2.6). Рассматривались задачи, когда одна ударная волна догоняет другую, причем обе ударные волны представлялись своими стационарными структурами. Также изучались задачи о встречном столкновении ударных волн. Во всех случаях, когда после взаимодействия ударных волн с гиперболической точки зрения существовало решение с “подозрительной” ударной волной, результатом численного эксперимента было формирование при больших временах решения именно с такой асимптотикой. При взаимодействии с неоднородностями фона “подозрительная” ударная волна, представленная своей стационарной структурой, проявляла незаурядную устойчивость (п. 2.5). Её распад происходил только при взаимодействии с достаточно большими и протяженными возмущениями фона. Это позволяет квалифицировать эту ударную волну как *метастабильную*.

В п. 2.6 рассмотрена двумерная устойчивость упомянутой выше метастабильной ударной волны по отношению к двумерным возмущениям. Слабые ударные волны эффективно взаимодействуют только с возмущениями, имеющими близкую ориентацию, т.е. слабо зависящими от тангенциальной координаты. Исследование таких решений было проведено с помощью выведенных в [22] простых уравнений, аналогичных известным уравнениям Хохлова–Заболотской и Кадомцева–Петвиашвили. В отличие от последних, в рассматриваемом случае – это система двух уравнений. Численно строились решения с начальными данными, периодическими по переменной вдоль фронта. Часть этого фронта представляла невозмущенную стационарную структуру ударной волны, а другая часть – результат её необратимого распада на систему волн, взятую из решения одномерной задачи. Оказалось, что если отрезок невозмущенного фронта достаточно велик, то невозмущенная структура восстанавливается всюду. Таким образом, взаимодействие с неодномерными возмущениями подтвердило квалификацию изучаемой ударной волны как метастабильной и, следовательно, имеющей право на существование. Заметим, что в ряде работ (см., например, [21]) метастабильные разрывы считаются нереализующимися. Этим предположением

достигается единственность решений задач, которая, как показали упомянутые выше исследования, отсутствует, если рассматривать гиперболическую модель среды, как предел вязко-упругой при характерном масштабе $L \rightarrow \infty$ (или, что то же самое, при вязкости, стремящейся к нулю).

В п. 2.4 аналитически и численно изучается явление, имеющее место при взаимодействии ударной волны с догоняющей её волной Римана. При определенных условиях происходит *распад* ударной волны и образование на её месте некоторой определенной системы волн.

Параграфы 3 и 4 посвящены изучению нелинейных волн в упругих средах, в которых в мелкомасштабных процессах наряду с диссипацией большое значение имеет дисперсия. Как известно, дисперсионные эффекты возникают в уравнениях, описывающих волны в упругих композитах [23]. Кроме того, дисперсия характерна для волн, распространяющихся в стержнях [24]. Вообще, дисперсионные эффекты появляются, когда свойства изучаемых объектов характеризуются или некоторым линейным размером, или характерным временем.

Как было показано [25], влияние мелкомасштабной дисперсии (наряду с вязкостью) приводит к колебаниям в стационарных структурах ударных волн (которые рассматриваются как бегущие волны). Если состояние за ударной волной, движущейся по заданному состоянию с заданной скоростью, не определяется законами сохранения однозначно (что характерно для не слишком простых гиперболических уравнений), то наличие колебаний в стационарных структурах кардинально меняет множество допустимых разрывов. Действительно, как показано в § 3 и § 4, интегральная кривая уравнений, описывающих стационарную структуру разрыва, вышедшая из особой точки, соответствующей состоянию перед разрывом, за счет влияния дисперсии испытывает колебания, прежде чем приходит в особую точку, соответствующую одному из возможных состояний за разрывом. Если этих колебаний много, то достаточно малого изменения параметров, например, скорости разрыва, чтобы колебания закончились в другой особой точке, соответствующей другому возможному состоянию за разрывом. При промежуточном значении скорости интегральная кривая приходит в третью особую точку, также соответствующую состоянию за разрывом. Интегральные кривые, входящие в нее, образуют линию или поверхность, разделяющие

множества интегральных кривых, входящих в упомянутые выше первые две особых точки. Поскольку приход интегральной кривой в эту особую точку возможен только при выделенных значениях скорости разрыва, то соответствующий разрыв является особым разрывом. Описанные особенности поведения структуры разрывов приводят к распаду множества допустимых разрывов на много частей, число которых тем больше, чем больше относительное влияние дисперсии в мелкомасштабных явлениях по сравнению с диссипацией. Кроме того, появляются приблизительно в том же количестве особые разрывы.

В § 3 исследуются нелинейные волны в одной из моделей упругого композита. Гиперболическая часть выбирается такой же, как в предыдущих параграфах. Для описания мелкомасштабных явлений в качестве диссипативных членов, как и в § 2, взяты вязкие члены, а в качестве дисперсионных членов – дисперсионные члены с производными по координате второго, самого низкого порядка дифференцирования, из модели, описывающей волны в композите [23]. Аналитически и численно исследованы стационарные структуры разрывов и на этом основании исследовано множество допустимых разрывов (п. 3.1).

Показано, что с помощью допустимых разрывов и волн Римана можно построить множество решений одной и той же автомодельной задачи, такой как задача о распаде произвольного разрыва и автомодельная задача о распространении волн в полупространстве (задача о “поршне”). Число особых разрывов и, как следствие, число возможных решений неограниченно растет вместе с ростом относительного влияния дисперсии по сравнению с диссипацией (п. 3.2).

Для выявления единственного физически обоснованного решения исследовались решения задачи для полной системы уравнений с учетом вязкости и дисперсии с начальными данными в виде различным образом сглаженных ступенек. При этом численно строились нестационарные решения полной системы уравнений в частных производных с целью нахождения автомодельных асимптотик при больших временах и изучения зависимости реализующейся асимптотики от вида функций, задающих сглаживание ступеньки. Показано, что если не налагать никаких ограничений на эти функции, то можно реализовать любую асимптотику. Если ограничиться монотонными функциями, сглаживающими ступеньку, то можно выделить две комбинации волн, возникаю-

щие в заданных граничных условиях (п. 3.3). Эти комбинации содержат особые разрывы с простейшими структурами. Структуры других особых разрывов имеют более сложное строение, и эти разрывы возникают в решениях при более сложном задании сглаживающих функций.

Похожие результаты дает проведенное в § 4 исследование продольных нелинейных волн в упругом стержне со сложной нелинейностью. Нелинейные волны малой амплитуды описываются уравнением, отличающимся от уравнения, ранее изучавшимся в [2], наличием члена с третьей производной от неизвестной функции, обеспечивающего дисперсионные эффекты. Сложная нелинейность создает условия для существования трех различных ударных волн, распространяющихся по одному и тому же состоянию с одной и той же скоростью. Мелкомасштабная дисперсия, если ее влияние велико в сравнении с вязкими эффектами, приводит к тому, что стационарная структура разрывов приобретает колебательный характер. При этом, так же, как и в § 3, множество допустимых разрывов приобретает сложное строение и появляются особые разрывы. Так же, как и в § 3, гиперболическая модель, приводит к многократной неединственности решений.

Численные решения задач с начальными данными в виде сглаженной ступеньки показали, что можно так выбрать функцию, задающую сглаживание, что происходит выход решения на асимптотику, представляющую любое из автомодельных решений гиперболической модели. Однако если сглаживание начальных условий монотонно, то возникает асимптотика, содержащая особый разрыв с простейшей монотонной структурой во всех случаях, в которых существует соответствующее автомодельное решение (наряду с другими). В отличие от задач § 3, решение с таким особым разрывом существует не при любых условиях при $x = \pm\infty$. В тех случаях, когда такое решение отсутствует, а существуют решения с особыми разрывами, имеющими более сложные стационарные структуры, осуществляется совсем другая асимптотика, состоящая из одной ударной волны с нестационарной структурой, внутри которой происходят незатухающие со временем периодические колебания.

Таким образом, в предлагаемой работе проанализированы процессы распространения квазипоперечных волн малой амплитуды в нелинейно упругих средах при двух различных предположениях о характере мелкомасштабных процессов. В случае, ко-

гда эти процессы представлены вязкостью, автомодельная задача о поршне в некоторой области задаваемых параметров имеет два решения, которые строятся с использованием непрерывных решений гиперболических уравнений и разрывов, имеющих стационарную структуру. В случае, когда в мелкомасштабных процессах большую роль играет дисперсия, это кардинально меняет множество допустимых разрывов, а у автомодельных задач, при построении решений которых используются допустимые разрывы, появляется много решений. Аналогичными свойствами обладают продольные волны в упругих стержнях со сложной нелинейностью.

С помощью построения численных решений уравнений в частных производных, учитывающих мелкомасштабные процессы, проанализирован процесс выхода решений на ту или иную асимптотику и зависимость реализующейся асимптотики от параметров неавтомодельной задачи, которые отсутствуют в автомодельной гиперболической постановке. В случае учета вязкости проверена устойчивость метастабильных разрывов.

Проблемам слабонелинейных волн в анизотропных упругих средах, помимо упоминавшихся обзоров [8, 19], посвящены обзоры [26]–[28].

§ 1. Нелинейные волны малой амплитуды в упругих средах

Будем рассматривать движение упругой среды в форме плоских волн. Это означает, что решение зависит от единственной декартовой координаты и времени. Основные уравнения для непрерывных движений записываются в виде [16]

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right); \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь использован подход Лагранжа, в котором $x_1, x_2, x_3 \equiv x$ – декартовы координаты начального состояния среды. Оси x_1 и x_2 лежат в плоскости волны, а ось $x_3 \equiv x$ до деформации нормальна к ним, ρ_0 – плотность в начальном состоянии. $v_i = \partial w_i / \partial t$ – компоненты скорости, $u_i = \partial w_i / \partial x$ – производные по координате от компонент вектора перемещения \mathbf{w} . Функции u_i , v_i и энтропия S считаются функциями от x и t . $\Phi = \rho_0 U$, где U – внутренняя энергия единицы массы. $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$ представляют собой напряжения в плоскостях $x = \text{const}$.

Вследствие геометрии задачи производные $\partial w_\beta / \partial x_\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) не зависят от времени. Без ограничения общности производные $\partial w_3 / \partial x_\alpha$ в плоских волнах можно считать равными нулю, так как эти величины могут быть обращены в нуль вращением твердого тела как единого целого. Таким образом, изменение деформации среды при ее движении в форме плоских волн может происходить только при изменении u_i . Функция Φ считается зависящей от u_i , S и некоторых внутренних параметров, включающих параметры, которые определяют анизотропию [29]. В общем случае эти параметры зависят от лагранжевых координат. В рассматриваемых ниже задачах о распространении волн малой амплитуды по однородному фону эти параметры, а также ρ_0 , будут предполагаться постоянными. Система (1.1) полностью определяется заданием функции $\Phi(u_i, S)$, одной и той же для всех частиц среды.

Если среда изотропна в плоскости (x_1, x_2) (случай волновой изотропии), то u_1 и u_2 входят в Φ в виде комбинации $u_1^2 + u_2^2$. Таким образом, в случае волновой изотропии Φ зависит от $u_1^2 + u_2^2$, u_3 и S . Будем рассматривать случаи, когда волновая анизотропия

мала и Φ мало отличается от функции указанных аргументов, т.е.

$$\Phi(u_i, S) = F(u_1^2 + u_2^2, u_3, S) + qp(u_1, u_2, u_3, S), \quad (1.2)$$

где q – малый параметр анизотропии, S – энтропия. Уравнения (1.1) представляют собой гиперболическую систему в частных производных. Они выражают второй закон Ньютона, уравнение для изменений деформаций под воздействием смещений и уравнение описывающее обратимость рассматриваемых процессов.

В изотропных упругих средах волны малых возмущений, рассматриваемые в линейном приближении, когда $F = \lambda(u_1^2 + u_2^2) + \mu u_3^2$, $p \equiv 0$, делятся на продольные и поперечные (λ, μ – коэффициенты Ламе). В продольных волнах движение среды происходит по нормали к фронту волны (изменяется только u_3), а в поперечных – в направлениях, параллельных фронту (изменяются u_1 и u_2). Если нелинейность и анизотропия среды малы, то свойства волн меняются мало, причем в продольных волнах может появиться малая поперечная составляющая движения, а в поперечных – малая продольная. Такие волны называются соответственно квазипродольными и квазипоперечными. Квазипоперечным волнам соответствуют две близкие между собой характеристические скорости. Вследствие существенного различия характеристических скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн эти семейства довольно быстро разойдутся, если начальные данные для этих волн заданы на конечном отрезке. Сложное совместное влияние малых нелинейности и анизотропии наиболее ярко проявляется в поведении квазипоперечных волн. В дальнейшем будем рассматривать волновой пакет ограниченной протяженности, составленный из квазипоперечных волн, соответствующих двум близким между собой характеристическим скоростям.

Слабонелинейные квазипоперечные волны, распространяющиеся по однородному фону в положительном направлении оси x , при малой анизотропии среды могут описываться упрощенной системой уравнений, которая следует из системы уравнений нелинейной теории упругости [8, 19, 30] (см. Приложение 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ u_\alpha &= \frac{\partial w_\alpha}{\partial x} = u_\alpha(x, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2, \quad (1.4)$$

$$f, g, \kappa = \text{const.}$$

Здесь g – малый параметр анизотропии, κ – постоянная с размерностью скорости, которая характеризует нелинейные эффекты, f – характеристическая скорость при отсутствии нелинейности и анизотропии (т.е. при $\kappa = 0$, $g = 0$). Знак упругой константы κ существенно влияет на поведение квазипоперечных простых и ударных волн. Знак g считается совпадающим со знаком κ , что определяет нумерацию переменных u_1 , u_2 . В системе уравнений (1.3) оставлены только главные члены, отвечающие за нелинейность и анизотропию.

Для рассматриваемых ниже малых значений u_α система (1.3) представляет собой гиперболическую систему с двумя семействами характеристик, которые соответствуют квазипоперечным волнам, распространяющимся в положительном направлении оси x .

Далее будут рассматриваться автомодельные решения системы (1.3) вида $u_\alpha = u_\alpha\left(\frac{x}{t}\right)$. Эти решения состоят из волн Римана и ударных волн.

1.1. Волны Римана. Для гиперболической системы уравнений (1.3) найдем решение типа простой волны (волны Римана), т.е. такое, что

$$u_\alpha = u_\alpha(\theta(x, t)), \quad (1.5)$$

где θ – неизвестная функция. Эти решения изучены в работах [19, 31]. Подставив (1.5) в (1.3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для u_α :

$$\begin{cases} (R_{11} - c) \frac{du_1}{d\theta} + R_{12} \frac{du_2}{d\theta} = 0 \\ R_{12} \frac{du_1}{d\theta} + (R_{22} - c) \frac{du_2}{d\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 R}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Здесь

$$c = -\frac{\partial\theta}{\partial t} / \frac{\partial\theta}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Система (1.6) имеет нетривиальное решение, если $c = c_{1,2}(u_1, u_2)$, где $c_{1,2}$ – характеристические скорости, являющиеся корнями

определителя системы (1.6) $|R_{i,j}(u_1, u_2) - c\delta_{ij}|$. Из (1.7) следует, что θ и, соответственно, $u_\alpha(\theta)$ постоянны на каждой из характеристик этого уравнения, представленных прямыми линиями в плоскости (x, t) и определяемых формулой

$$\frac{dx}{dt} = c_\alpha(u_1, u_2), \quad \alpha = 1, 2.$$

На плоскости (u_1, u_2) равенство $c_1 = c_2$ удовлетворяется в точках $u_1 = 0, u_2 = \pm\sqrt{G}$, $G = g/\kappa$ (предполагается, что $g/\kappa > 0$). Интегральные кривые волн Римана касаются собственных векторов матрицы $R_{\alpha\beta}$ и на плоскости (u_1, u_2) образуют два ортогональных семейства кривых (рис. 1.1) [8, 19, 31]. Оси u_1 и u_2 для множества интегральных кривых являются осями симметрии. Решения, соответствующие c_1 и c_2 ($c_1 < c_2$) называются медленными и быстрыми квазипоперечными простыми волнами.

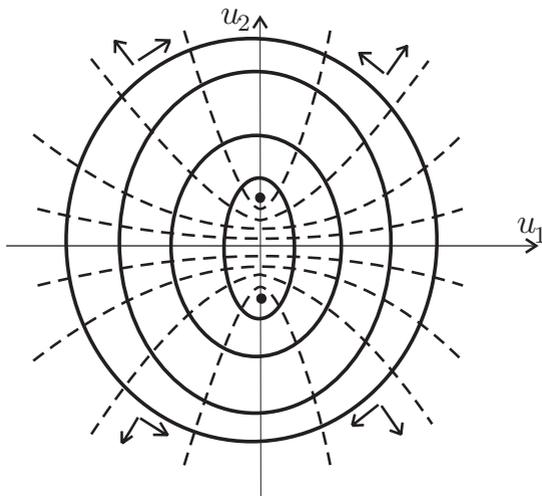


Рис. 1.1. Интегральные кривые простых волн ($\kappa > 0$)

Рассмотрим уравнения (1.6) для $c = c_1$ и $c = c_2$. Точки, в которых $c_1 = c_2$, являются особыми точками обоих семейств интегральных кривых. В случае $\kappa > 0$ эллипсоподобные (сплошные, рис. 1.1) кривые соответствуют быстрым волнам $c = c_2$, а кривые гиперболического вида (штриховые) отвечают медленным волнам

$c = c_1$. Для $\kappa < 0$ ситуация является противоположной. В принятой аппроксимации полная картина интегральных кривых квазипоперечных волн всегда одинакова с точностью до масштаба, определяемого \sqrt{G} , и не зависит от знака κ . При $G \rightarrow 0$ (или $u_1^2 + u_2^2 \rightarrow \infty$) интегральные кривые трансформируются в окружности и лучи, что отвечает волнам изотропного случая [16]. На рис. 1.1 стрелки указывают направление убывания c_α вдоль интегральных кривых для $\kappa > 0$. Если $\kappa < 0$, то c_α убывают в противоположных направлениях. В дальнейшем будут рассматриваться автомодельные волны Римана, когда $\theta = x/t$. Изменение величин в таких волнах соответствует отрезку интегральной кривой, вдоль которой c убывает при убывании $\theta = x/t$. Это обеспечивает расширение волны со временем, так что ее передний фронт движется быстрее, чем задний.

1.2. Ударные волны. Системе уравнений (1.3) соответствуют соотношения на разрыве [19, 32], которые выражают законы сохранения поперечных компонент импульса и должны выполняться при отсутствии внешних воздействий.

$$\left[\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \right] - W[u_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.8)$$

Здесь $W = dx/dt$ – лагранжева скорость разрыва. Квадратными скобками обозначены скачки соответствующих величин на фронте разрыва. Исключив W в системе уравнений (1.8) получим уравнение ударной адиабаты:

$$(u_1^2 + u_2^2 - U_1^2 - U_2^2)(U_1 u_2 - U_2 u_1) + \frac{2g}{\kappa}(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) = 0. \quad (1.9)$$

Здесь U_1 и U_2 обозначены значения величин u_1 и u_2 перед разрывом. Величины за разрывом удовлетворяют уравнению ударной адиабаты и обозначаются по-прежнему u_1 и u_2 . На рис. 1.2 а, в и рис. 1.3 а на плоскости u_1, u_2 изображены ударные адиабаты (точка $A(U_1, U_2)$ отвечает состоянию перед разрывом) для значений параметров $U_1 = 2, U_2 = 0.4, \kappa = 4$ (рис. 1.2 а), $U_1 = 1, U_2 = 0.1, \kappa = 2$ (рис. 1.2 в) и $U_1 = 1, U_2 = 0.1, \kappa = -2$ (рис. 1.3 а). В каждом из представленных вариантов $g = 1$.

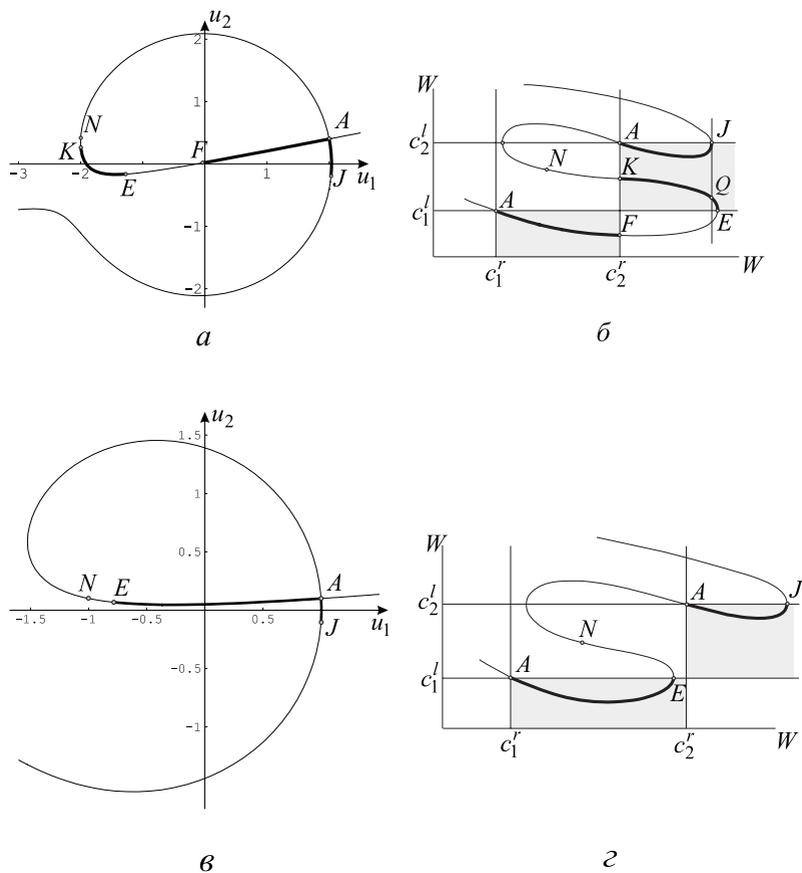


Рис. 1.2. Ударные адиабаты и диаграммы эволюционности для различных значений параметров g , κ , U_α ($\kappa > 0$)

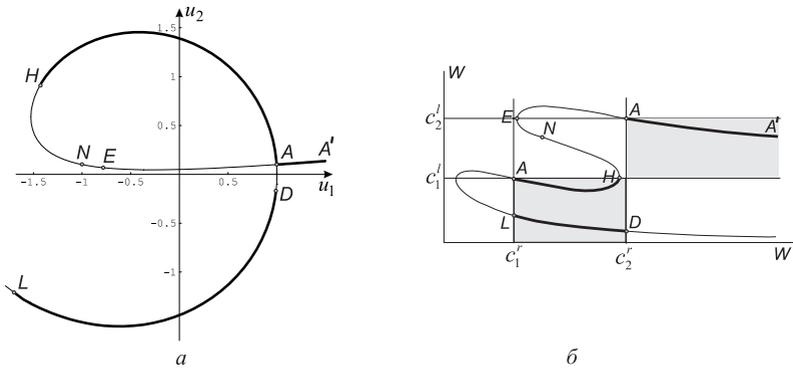


Рис. 1.3. Ударная адиабата и диаграмма эволюционности для для сред с $\kappa < 0$

Не все состояния u_1, u_2 , принадлежащие ударной адиабате, могут быть состояниями за фронтом скачка. Разрывные решения, кроме того, должны удовлетворять условиям эволюционности [33], выражающим необходимые условия устойчивости фронта по отношению к малым одномерным возмущениям. Условия эволюционности состоят в том, что число различных типов малых возмущений, уходящих от разрыва по обе стороны, должно быть на единицу меньше числа имеющихся на разрыве условий. Когда на разрыве выполнены только законы сохранения и нет дополнительных соотношений другого происхождения, условия эволюционности будут называться априорными. Если соотношения на разрывах представлены системой (1.8), то априорные условия эволюционности представлены двумя системами неравенств [19, 32]:

$$c_2^r \leq W, \quad c_1^l \leq W \leq c_2^l, \quad (1.10)$$

$$c_1^r \leq W \leq c_2^r, \quad W \leq c_1^l. \quad (1.11)$$

Здесь и далее верхние индексы l и r будут характеризовать значение величин за и перед разрывом.

Соотношения (1.10) и (1.11) определяют соответственно эволюционные быстрые и медленные ударные волны. Для наглядного представления неравенств (1.10) и (1.11) удобно пользоваться диаграммой эволюционности (рис. 1.2 б, г, рис. 1.3 б), где по взаимно ортогональным осям отложены скорости, участвующие

в неравенствах, и тем самым выделены на плоскости области, где выполняется каждое из неравенств [19]. При фиксированном состоянии перед фронтом скорость разрыва, а также скорости характеристик воспроизводятся на горизонтальной оси диаграммы эволюционности в одном и том же масштабе. Вдоль вертикальной оси сохранены только неравенства между W , c_1^l и c_2^l . Области, где выполняются оба неравенства каждой из систем (1.10), (1.11), образуют на плоскости рис. 1.2 б, г, 1.3 б заштрихованные прямоугольники.

Соотношения на разрыве (1.8) позволяют найти скорость W и другие величины вдоль ударной адиабаты и отобразить ударную адиабату на указанную плоскость. При этом значения W правильно представляются по горизонтальной оси и лишь качественно по вертикальной. На рис. 1.2 б, г, 1.3 б начальная точка A представлена двумя точками, в силу ее положения на двух пересекающихся ветвях ударной адиабаты. Отрезки ударной адиабаты, которые попали в эволюционные прямоугольники, соответствуют эволюционным быстрым ударным волнам в верхнем эволюционном прямоугольнике и медленным в нижнем. Соответственно, такие же отрезки на ударной адиабате на плоскости (u_1, u_2) на рис. 1.2 а, в, 1.3 а показаны жирными сплошными отрезками, концы которых обозначены теми же буквами, что и на диаграммах эволюционности.

В случае $\kappa > 0$, ситуация, изображенная на рис. 1.2 а, б, соответствует состояниям перед разрывом с относительно большими U_1 и U_2 (такими, например, что $\kappa(U_1^2 + U_2^2) > g$). В этом случае имеется три эволюционных отрезка: отрезки AJ и KE отвечают возможным состояниям за быстрыми эволюционными ударными волнами, отрезок AF – возможным состояниям за медленными ударными волнами. При достаточно малых U_1 и U_2 ударная адиабата и диаграмма эволюционности имеют вид, представленный на рис. 1.2 в, г соответственно. В этом случае имеется два эволюционных отрезка. В [19] на плоскости U_1, U_2 исследована граница, разделяющая случаи 1.2 а, б и 1.2 в, г.

На рис. 1.2 отмеченные точки F, E, K, J, D, L, H называются точками Жуге, в этих точках скорость ударной волны совпадает с одной из характеристических скоростей перед или за скачком. Точки Жуге являются граничными точками эволюционных интервалов. Ударные волны, отвечающие точкам Жуге, играют важную роль в построении автомодельных решений. К ним в ав-

томодельных решениях соответственно спереди или сзади могут непосредственно примыкать волны Римана того же типа, что и ударные волны (быстрая к быстрой, медленная к медленной).

На всех рисунках 1.2, 1.3 отмечена характерная точка N , симметричная точке A относительно оси u_2 . В соответствующем скачке $A \rightarrow N$, не удовлетворяющем неравенствам (1.10), (1.11), величина u_1 меняет знак, а величина u_2 неизменна.

Упрощенная система уравнений (1.3) не включает энтропию или какую-либо другую термодинамическую переменную, поэтому условие неубывания энтропии на разрыве должно выражаться как условие невозрастания механической энергии, которое приводится к виду [19]

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \right)^l + \left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \right)^r \right) [u_\alpha] \leq 0. \quad (1.12)$$

В рассматриваемом случае все эволюционные разрывы удовлетворяют требованию неубывания энтропии [19].

1.3. Автомодельные задачи и неединственность решения. Автомодельная задача о распаде произвольного начального разрыва состоит в том, что в начальный момент времени $t = 0$ имеются два однородных состояния $u_\alpha = U_\alpha$ справа (при $x > 0$) и $u_\alpha = u_\alpha^*$ слева (при $x < 0$) от плоскости $x = 0$, которая служит фронтом начального разрыва ($\alpha = 1, 2$). Задача состоит в нахождении последовательности волн, распространяющихся в каждое полупространство от границы начального разрыва. Во многих случаях достаточно рассмотреть решение по одну сторону от плоскости $x = 0$, например для $x \geq 0$. Такая постановка в газовой динамике называется задачей о поршне. Задача о поршне для модели, задаваемой равенствами (1.3), (1.8), очевидно, совпадает с задачей о распаде произвольного разрыва. Формулировка задачи о поршне такова: $u_\alpha = U_\alpha$ для $t = 0, x \geq 0$ и $u_\alpha = u_\alpha^*$ для $t \geq 0, x = 0$.

В работах [34, 35] построено решение сформулированной автомодельной задачи. Решение состоит из последовательности автомодельных волн Римана и ударных волн, следующих в порядке убывания скорости. Построенное решение принципиально различается для сред с $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$ и в зависимости от параметра

анизотропии g . В [34] отмечено, что решение автомодельной задачи о внезапном изменении напряжений на границе упругого полупространства (задачи о поршне) в некоторой области параметров, характеризующих задачу (области неединственности), могут существовать два решения. Геометрия области неединственности зависит от параметров U_α, g, κ .

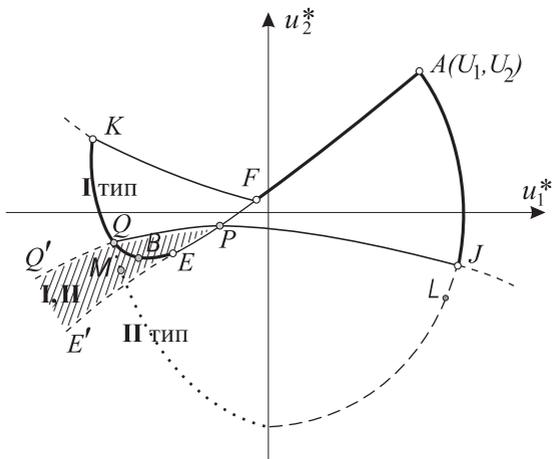


Рис. 1.4. Решение задачи о поршне для $\kappa > 0$: зависимость решения от граничных данных $u_\alpha|_{x=0} = u_\alpha^*$ при $u_\alpha|_{t=0} = U_\alpha$. Заштрихована область двужначности решения

На рис. 1.4 заштрихована область неединственности для среды с $\kappa > 0$ при достаточно больших значениях величин U_α (такими, что $\kappa(U_1^2 + U_2^2) > g$). Точки отрезков AJ и KE представляют собой состояния за эволюционными быстрыми ударными волнами, точки отрезка AF – за медленными. Область неединственности решения (область значений u_α^* , для которых имеются два решения) ограничена отрезком PE ударной адиабаты из начальной точки $A(U_1, U_2)$, эволюционным отрезком QP ударной адиабаты, построенной из точки Q как начальной точки, отрезками QQ' и EE' интегральных кривых простых неопрокидывающихся волн. Точка Q определена условием, что скорость ударной волны $A \rightarrow Q$ равна скорости ударной волны $A \rightarrow J$. На рис. 1.4 штриховыми линиями обозначены используемые в решении участки интегральных кривых простых волн. Линии, состоящие из точек,

представляют состояния за ударными волнами Жуге, которые используются при построении решений.

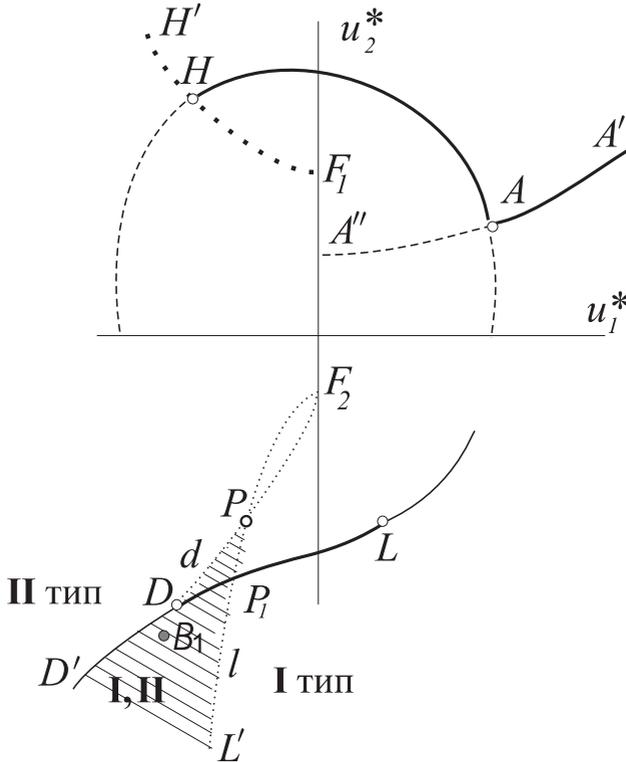


Рис. 1.5. Решение задачи о поршне для $\kappa < 0$: зависимость решения от граничных данных $u_\alpha|_{x=0} = u_\alpha^*$ при $u_\alpha|_{t=0} = U_\alpha$. Заштрихована область двузначности решения

Для рассматриваемых сред с $\kappa > 0$ одно из решений в области неединственности (решение первого типа) состоит из быстрой ударной волны из точки A в точку эволюционного отрезка QE (в последующем изложении эта волна будет называться ударной волной типа QE) и следующей за ней медленной ударной или простой волны. Второе решение (решение второго типа) при $\kappa > 0$ содержит “сложную” быструю волну, состоящую из быстрой ударной волны Жуге $A \rightarrow J$ (точка J – точка Жуге по состоянию за

скачком), быстрой простой волны $J \rightarrow L$ и быстрой ударной волны Жуге $L \rightarrow M$ (эта волна того же типа, что и $A \rightarrow K$, условие Жуге выполнено в точке L) (рис. 1.4). За “сложной” быстрой волной в решении второго типа с меньшей скоростью следует медленная волна – ударная или простая. Каждое из двух решений непрерывно продолжается в одну из соседних областей (рис. 1.4). Оба решения совпадают на кривой QP , но различны на кривой PEE' .

Для сред с $\kappa < 0$ тоже имеется заштрихованная на рис. 1.5 область $D'PL'$, где одновременно могут осуществляться два различных решения [19]. На рис. 1.5 жирными сплошными линиями изображены эволюционные участки ударной адиабаты, штриховыми линиями обозначены используемые в решении участки интегральных кривых простых волн. Линии, состоящие из точек, представляют состояния за ударными волнами Жуге, которые используются при построении решений. Область неединственности ограничена участком ударной адиабаты $D'D$, и линией DP , состоящей из точек Жуге типа D (см. рис. 1.3) для разрывов из начальных состояний AA'' , и линией PP_1L' , состоящей из точек Жуге типа L (см. рис. 1.3) для разрывов из начальных состояний F_1HH' . В области, прилежащей к участку $D'L$ ударной адиабаты правее линии $D'DP$, осуществляется решение первого типа, представляющее последовательность быстрой ударной или простой волны и медленной ударной волны. Слева от линии $L'P_1P$ осуществляется решение второго типа: впереди идет быстрая ударная или простая волна за ней “сложная” медленная волна, состоящая из двух ударных волны Жуге, для первой из которых выполняется условие Жуге сзади, а для второй – спереди, и волны Римана между ними. Решение второго типа может быть непрерывно продолжено через дугу ударной адиабаты $D'L$.

В отличие от случая $\kappa > 0$ область неединственности при $\kappa < 0$ существует при любых соотношениях между начальными деформациями и параметром анизотропии.

Неединственность решения была обнаружена при построении полного решения задачи [34, 19]. Однако, можно предвидеть ее появление и дать достаточный признак неединственности не получая полного решения, а воспользовавшись видом диаграммы эволюционности [36] (см. Приложение 2).

Согласно изложенному решения автомодельных задач нелинейной теории упругости могут быть неединственными. Неедин-

ственность обнаружена для возмущений малой амплитуды в упругой среде с уравнением состояния общего типа. Неединственность присуща как полной системе уравнений (1.1), так и упрощенной системе уравнений (1.3) при $g \neq 0$. Неединственность исчезает в вырожденном случае отсутствия волновой анизотропии ($g = 0$), так как при $g \rightarrow \infty$ решения стремятся к совпадению [37].

Выше предполагалось, что только априорно эволюционные разрывы могут быть использованы для построения решений. Это справедливо, если упругая среда рассматривается как предел вязко-упругой среды (§2). При других сглаживающих разрывы механизмах множество допустимых разрывов оказывается другим (§3).

К задаче о распаде произвольного разрыва с неединственными решениями может привести задача о взаимодействии квазиперпендикулярных волн (как догоняющих одна другую, так и сталкивающихся). Поскольку решение этой задачи состоит из согласованных между собой задач о поршне, неединственность проявляется и в этом случае. Это означает, что уравнения теории упругости не позволяют однозначно определить решения естественным образом возникающих задач. Требование гладкости начальных условий не может помешать образованию ударных волн, столкновение которых приведет затем к неоднозначному продолжению решения по времени. Столкновение более чем двух ударных волн отвечает специальным начальным и граничным условиям. Эти условия представляют собой, в определенном смысле, множество меры нуль среди множества всех начальных или граничных условий. Следовательно, для того, чтобы строить единственное решение задач, отвечающих начальным условиям общего положения, достаточно иметь правило для отбора решений задачи о распаде произвольного разрыва, возникающей как результат взаимодействия двух ударных волн. Эта проблема будет рассмотрена в §2.

§ 2. Нелинейные волны в вязкоупругих средах и проблемы устойчивости ударных волн

Неединственность решений автомодельных задач представляет собой серьезный дефект уравнений нелинейной теории упругости, не позволяющий однозначно определять решение уравнений даже в случае гладких начальных условий. Более строгим правилом отбора реализующихся участков ударной адиабаты служит исследование структуры ударных волн. Постановка этой задачи требует уточнения модели среды и тем самым выходит за рамки классической теории упругости.

При построении решений автомодельной задачи нелинейной теории упругости п. 1.3 использованы квазипоперечные ударные волны, удовлетворяющие требованиям неубывания энтропии и условиям априорной (т.е. условиям Лакса [20]) эволюционности. Возник вопрос, не является ли неединственность решения автомодельных задач следствием того, что не все указанные ударные волны обладают структурой, т.е. непрерывным решением более полной системы уравнений, учитывающей диссипативные процессы, протекающие в узкой зоне, соответствующей разрыву в решении исходных уравнений. Например, в [3] подобное исследование для продольных волн в случае сложной ударной адиабаты позволило выделить единственное решение. В [38, 39] были построены структуры для всех квазипоперечных ударных волн. При этом особое внимание уделялось быстрым ударным волнам, которые соответствуют скачкам из начального состояния A в состояния на отрезке QE ударной адиабаты для сред с $\kappa > 0$ (рис. 1.2) и медленным ударным волнам – скачкам из точки A в состояния на отрезке LD для сред с $\kappa < 0$ (рис. 1.3). Если бы эти эволюционные ударные волны по какой-то причине потеряли право на существование, то решение в заштрихованных областях на рис. 1.4, 1.5 оказалось бы единственным и в то же время это не отразилось бы на решениях, построенных для всех остальных областей плоскости (u_1^*, u_2^*) .

2.1. Структура квазипоперечных ударных волн. Рассматривались стационарные структуры ударных волн. В качестве диссипативного механизма в динамические уравнения теории упругости (1.3) были добавлены члены, учитывающие дополнительные напряжения, вызванные вязкостью. Это самый про-

стой из диссипативных механизмов, который используется в теории деформируемого твердого тела. Он положен в основу модели вязко-упругой среды Кельвина-Фойхта и обеспечивает непрерывность решений. Систему уравнений для квазипоперечных волн малой амплитуды, распространяющихся в положительном направлении оси x , в этой модели можно записать в виде (см. Приложение 1, п. 6.3)

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) записаны в том же приближении, что и (1.3) и отличаются от них только наличием правой части, где μ – коэффициент вязкости, считающийся постоянным. Путем подходящего одинакового изменения масштабов длины и времени можно обратить μ в единицу, что позволяет использовать это обстоятельство для обнаружения подобия решений задач. В частности отсюда следует, что решение задачи Коши при $t = T$, $\mu = \mu_0$ отличается только масштабом по оси x от решения задачи Коши при $t = 1$, $\mu = \mu_0/T$ и с начальными условиями, “сжатыми” по оси x в T раз. Таким образом, рассмотрение поведения решений задач при $t \rightarrow \infty$, $\mu = \text{const}$ позволяет судить о поведении решений при $t = \text{const}$, $\mu \rightarrow 0$.

Исследуем структуру квазипоперечных разрывов. Для системы уравнений (2.1) разыскиваются решения вида $u_\alpha = u_\alpha(\xi)$, $\xi = -x + Wt$, $\alpha = 1, 2$, где $W = \text{const}$ – скорость разрыва. При $\xi \rightarrow -\infty$ величины u_α стремятся к значениям U_α характеризующим состояние перед разрывом, при $\xi \rightarrow +\infty$ величины u_α принимают значения, соответствующие состоянию за разрывом, т.е. состоянию, принадлежащему некоторой точке ударной адиабаты. При $\mu \rightarrow 0$ эти решения переходят в разрывы, изменение величин в которых совпадает с изменением величин в соответствующем квазипоперечном разрыве. Функции $u_\alpha(\xi)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(-R(u_1, u_2) + \frac{1}{2} W u_\alpha^2 \right) \right) = \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \xi^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\mu \frac{du_\alpha}{d\xi} = \frac{\partial Z}{\partial u_\alpha} \quad (2.2)$$

$$Z(u_1, u_2) = -R(u_1, u_2) + \frac{1}{2}W(u_1^2 + u_2^2) + Q_1u_1 + Q_2u_2,$$

$$Q_\alpha = U_\alpha(f - W + (-1)^\alpha g - \kappa(U_1^2 + U_2^2)).$$

Постоянные интегрирования Q_α определены из условий при $\xi \rightarrow -\infty$, т.е. перед скачком: $u_\alpha = U_\alpha$, $(du_\alpha/d\xi)_{-\infty} = 0$.

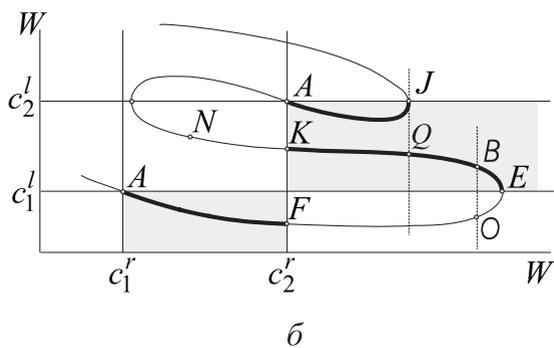
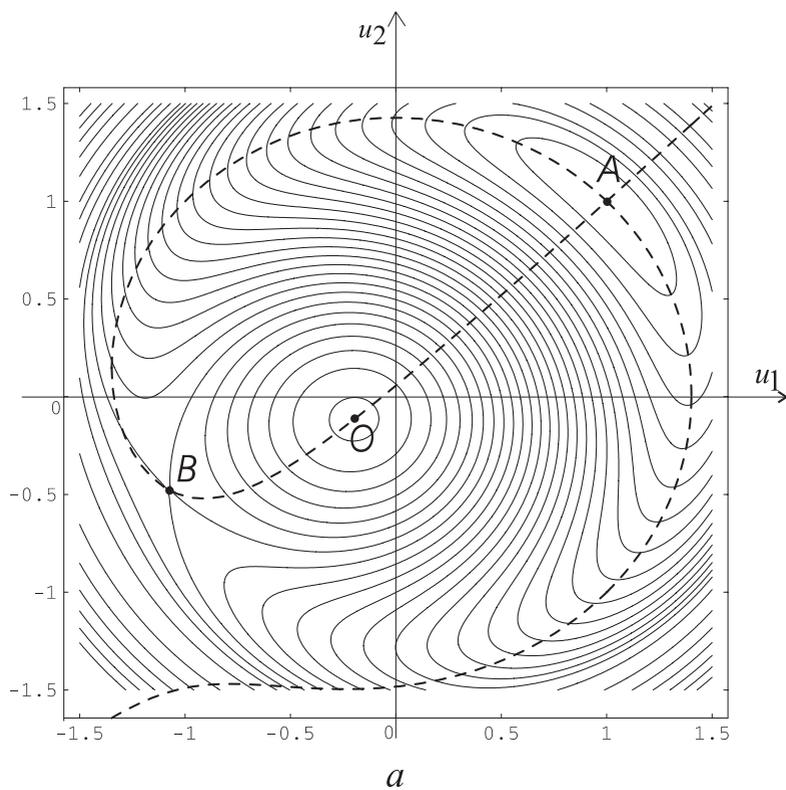
Чтобы задача о структуре имела решение, у системы (2.2) должны существовать интегральные кривые, соединяющие на плоскости u_1u_2 начальную точку $A(U_1, U_2)$ с точкой (u_1, u_2) , изображающей состояние за разрывом. Эти состояния для системы (2.2) должны быть стационарными (особыми) точками.

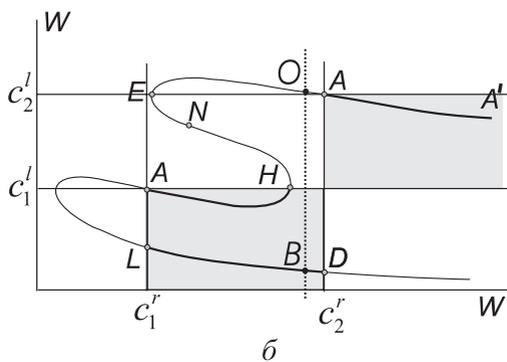
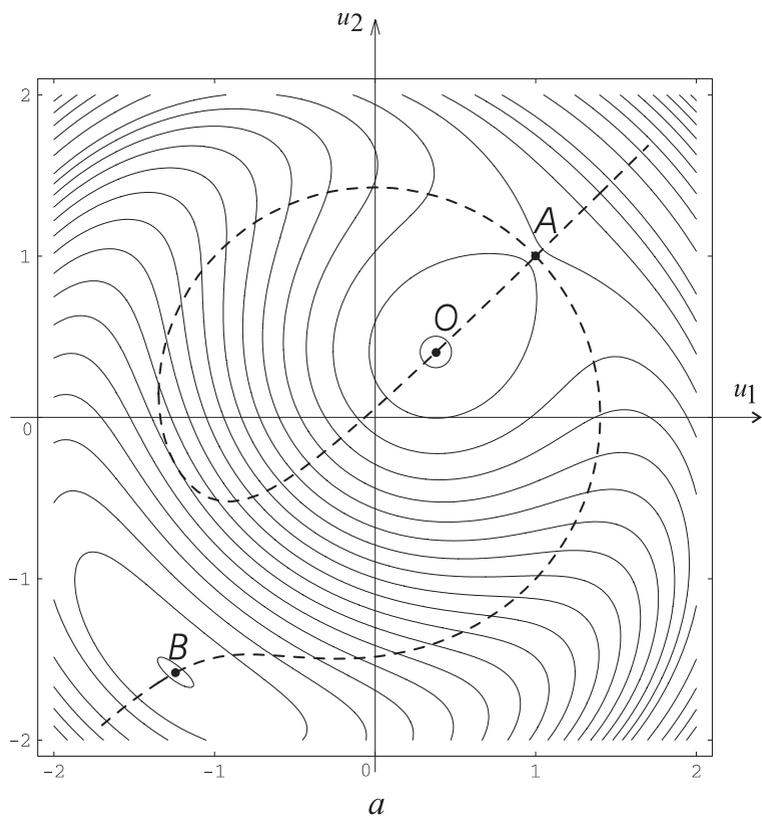
Рассмотрены все значения W , которые соответствуют эволюционным ударным волнам в средах с $\kappa > 0$ [38] и с $\kappa < 0$ [39]. Для каждого W определены типы особых точек, построены интегральные кривые и указаны направления на них, соответствующие росту ξ (т.е. росту t при $x = \text{const}$). В данном параграфе рассмотрены структуры наиболее важных для проблемы неединственности ударных волн, у которых состояние за фронтом принадлежит эволюционному участку QE ударной адиабаты (для сред с $\kappa > 0$) или участку DL (для $\kappa < 0$),

На рис. 2.1 а представлена картина линий уровня функции $Z(u_1, u_2)$ для значений параметров $U_1 = U_2 = 1$, $f = 1$, $g = 0.03$, $\kappa = 0.5$, $W = 0.13$, штриховой линией на этом графике изображена ударная адиабата для выбранных параметров. На рис. 2.1 б приведена диаграмма эволюционности, соответствующая этим параметрам, на которой выделено выбранное значение W , соответствующее прямой BO . Для системы (2.2) интегральные кривые ортогональны линиям уровня функции Z . Для быстрой ударной волны $A \rightarrow B$ в среде с $\kappa > 0$ начальная точка A является узлом с выходящими линиями, точка B на отрезке QE – седло, и имеются две интегральные кривые из A в B , т.е. две вязкие структуры для этой ударной волны.

На рис. 2.2 а представлена картина линий уровня функции $Z(u_1, u_2)$ (штриховой линией изображена ударная адиабата) и соответствующая диаграмма эволюционности рис. 2.2 б для значений параметров $U_1 = U_2 = 1$, $f = 1$, $g = 0.03$, $\kappa = -0.5$, $W = 2.6$. Для медленной ударной волны $A \rightarrow B$ при $\kappa < 0$ точка A – седло, точка B – узел с входящими линиями. Имеются две интегральные кривые из A в B и две возможных структуры этого разрыва.

Было показано [38, 39], что все априорно эволюционные квазипоперечные ударные волны обладают вязкой стационарной

Рис. 2.1. Структура квазипоперечных ударных волн в средах с $\kappa > 0$

Рис. 2.2. Структура квазипоперечных ударных волн в средах с $\kappa < 0$

структурой и имеют право на существование и нет других волн, обладающих структурой. Таким образом, проверка ударных волн на наличие структуры не привела к исключению каких-либо ударных волн, как не имеющих структуры, и, следовательно, не решила вопроса о выборе решения автомодельных задач в области неединственности.

2.2. Одномерные нестационарные решения. Описание решений в условиях неединственности автомодельных асимптотик. Если рассматривать упругую среду как предел вязкоупругой при $\mu \rightarrow 0$, то можно надеяться получить ответ о выборе однозначного решения задач, решение которых неоднозначно при отсутствии вязкости. Ряд нестационарных автомодельных задач для вязкоупругой среды был решен в [40] для сред с $\kappa > 0$ и в [41] для сред с $\kappa < 0$. Для этих задач рассмотренные выше автомодельные решения представляют асимптотики при $t \rightarrow \infty$. Для системы уравнений (2.1) численно решалась следующая начально-краевая задача: в полупространстве $x > 0$, где величины $u_\alpha = U_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) постоянны при $t = 0$, изменим граничные значения u_α при $x = 0$ либо мгновенно при $t = 0$, либо в течение конечного интервала времени $0 \leq t \leq \tau$, так что величины u_α приобретут постоянные значения u_α^* при $t > \tau$. Рассмотрим большие значения времени $t \gg \tau$, когда характерный линейный размер задачи велик. В этом случае можно ожидать, что эффект вязкости и изменения граничных условий внутри интервала τ слабеет и решение будет стремиться к определенному, хотя и изначально неизвестному автомодельному решению задачи без вязкости. Это решение может зависеть от функций, определяющих граничные значения u_α при $0 \leq t \leq \tau$.

Численный счет проводился для различных значений параметров f, g, κ, μ . Однако, если перейти к подвижной системе координат x^*, t^* , где $x^* = x + ft$, $t^* = t$, и ввести соответственно изменение масштабов для величин u_α, x^*, t^* , то систему (2.1) можно привести к такому виду, что $f = 0, g = \kappa = \mu = 1$. Поэтому полученные и описанные ниже решения могут быть пересчитаны в решения полученных таким образом универсальных уравнений и наоборот.

Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (2.1) с вязкими членами,

для которых упомянутые выше решения могут представлять автомодельные асимптотики при $t \rightarrow \infty$. Уравнения (2.1) были записаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, к которым сначала применен метод Ньютона, а затем метод матричной прогонки [42]. Расчет проводился в области x, t , ограниченной отрезком оси x и неподвижными правой и левой границами. Коэффициент μ , входящий в уравнения (2.1), выбирался таким образом, чтобы вязкость физическая, описываемая членом $\mu \partial^2 u_\alpha / \partial x^2$, была больше, чем вязкость, которая возникает при решении разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальную задачу.

Волны, содержащиеся в решении, обладают разными скоростями распространения, поэтому с увеличением расчетного промежутка времени t между отдельными возмущениями будут появляться отрезки, длина которых увеличивается с возрастанием t , соответствующие постоянным значениям u_α , а структуры ударных волн при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к стационарным. Поэтому для идентификации волн, получающихся при численном счете, с волнами, входящими в состав автомодельных решений, нужно получить разностное решение при больших временах t , чтобы упомянутые процессы успели завершиться. С другой стороны, с увеличением t разностное решение распространяется на большее число расчетных точек. В с этим требуется брать достаточно большой отрезок оси x , чтобы влияние правой границы не исказило решение. Влияние на решение левой границы устраняется соответствующим выбором коэффициента f , который подбирался так, чтобы возмущения распространились направо.

Для одного из вариантов расчета начальные условия ($t = 0$) и правое граничное условие ($t > 0, x = l$) взяты в виде $u_1 = 1, u_2 = 1$ (точка A на рис. 1.4), на левой границе ($t > 0, x = 0$) принято $u_1^* = -1.05, u_2^* = -0.455$ (точка B принадлежит эволюционному отрезку QE ударной адиабаты, соответствующей начальной точке A , и области неединственности решения); $g = 0.03, \kappa = 0.5, \mu = 0.024$. В процессе расчета сформировалась структура ударной волны типа QE . Результаты численного расчета для фиксированного (большого) момента времени приведены на рис. 2.3. На рис. 2.3 а представлен график решения в зависимости от координаты x . Точкам A и B соответствуют участки оси x , на которых величины u_1, u_2 принимают постоянные значения. Было проверено, что эти постоянные значения, представляющие состояния

перед и за ударной волной $A \rightarrow B$ с принятой степенью точности удовлетворяют уравнению соответствующей ударной адиабаты. Следует отметить, что внутри структуры ударной волны $A \rightarrow B$ величина u_2 имеет локальный максимум (рис. 2.3 а). Это согласуется с исследованием структуры (п. 2.1). На рис. 2.3 б сплошной линией представлен график решения на плоскости (u_1, u_2) , представляющий структуру ударной волны $A \rightarrow B$, штриховой линией на этом рисунке проведена ударная адиабата для выбранных параметров.

В результате серий расчетов показано, что в области неединственности (заштрихованной на рис. 1.4) на плоскости (u_1^*, u_2^*) при больших t обычно реализуется решение первого типа, содержащее ударную волну типа QE . Получить решения второго типа, содержащее “сложную” ударную волну оказалось возможным только в том случае, когда в течение некоторого временного интервала τ_1 граничные условия при $x = 0$ сохраняются в области где существует решение только второго типа, расположенной ниже заштрихованной области неединственности (рис. 1.4). Решение второго типа развивается в течение времени τ_1 . Если τ_1 достаточно велико и граничные условия подвергаются изменению таким образом, что точка, задающая граничные условия, переходит при $t > \tau_1$ в область неединственности, то возмущения, возникающее при изменении граничных условий уже не могут изменить тип решения и оно стремится к автомодельному решению второго типа в области неединственности.

Результаты счета, представляющие асимптотику автомодельного решения второго типа, представлены на рис. 2.4. На рис. 2.4 а представлен график решения в зависимости от координаты x . Точкам A и M соответствуют участки оси x , на которых величины u_1, u_2 принимают постоянные значения. Точка M принадлежит области неединственности (рис. 1.4). На рис. 2.4 а можно выделить последовательность простых и ударных волн, соответствующих сложной волне, входящей в состав автомодельного решения второго типа: быстрая ударная волна $Жуге$ – скачок из точки A в точку J (точка J – точка $Жуге$ по состоянию за скачком), затем идет отрезок интегральной кривой JL , быстрая ударная волна $Жуге$ – скачок из L в M (условие $Жуге$ выполнено в точке L). В структуре скачка из начальной точки A в точку J величина u_1 имеет локальный максимум, в структуре скачка из точки L в M величина u_2 имеет локальный минимум. Это

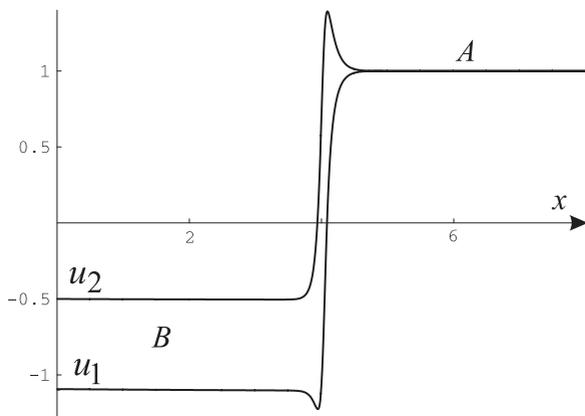
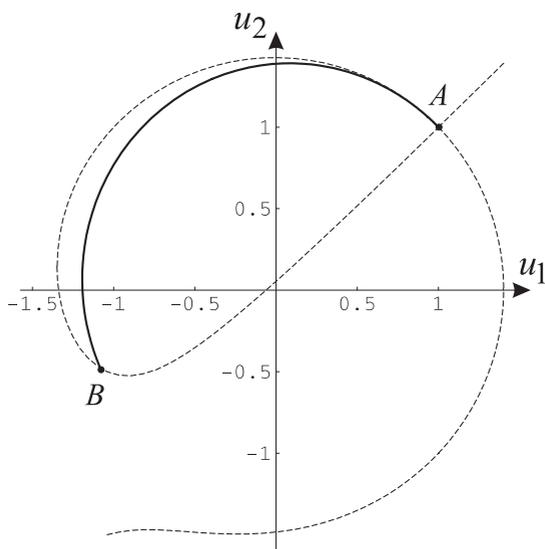
*a**б*

Рис. 2.3. Асимптотика автомодельного решения первого типа в средах с $\kappa > 0$

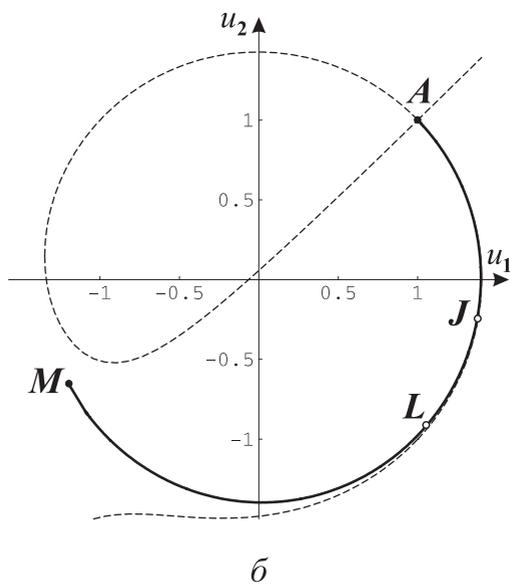
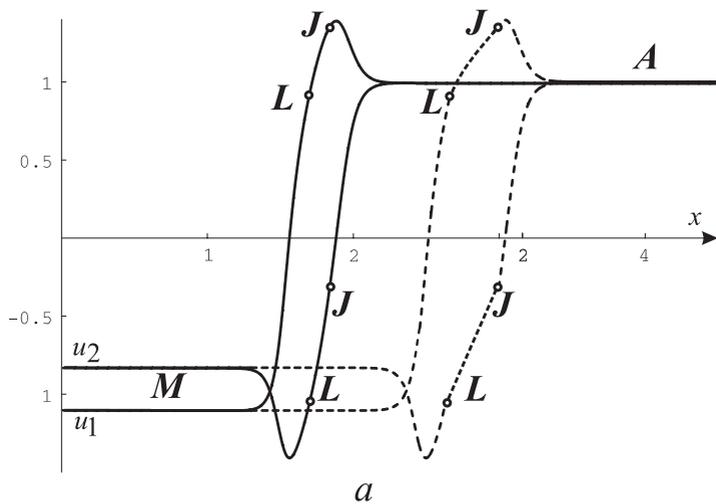


Рис. 2.4. Асимптотика автомодельного решения второго типа в средах с $\kappa > 0$

согласуется с видом интегральных кривых (п. 2.1). Интегральная кривая сложной волны представлена на рис. 2.4 б на плоскости (u_1, u_2) сплошной линией, штриховой линией на этом рисунке проведена ударная адиабата для выбранных параметров. На рис. 2.4 а приведены графики решения для двух последовательных моментов времени t_1 (сплошная линия) и t_2 (штриховая линией) ($t_1 < t_2$). Сравнение графиков в два последовательных момента времени показывает, что участок JL , соответствующий простой волне, расширяется с течением времени, а участки, соответствующие структурам скачков $A \rightarrow J$ и $L \rightarrow M$, не изменяются. Таким образом, следует подчеркнуть, что структура “сложной” волны, входящей в состав автомодельного решения второго типа, расширяется с увеличением времени.

Рассмотрим построение решения задачи в области неединственности для сред с $\kappa < 0$. Поставлена начально-краевая задача для системы уравнений (2.1). Начальные условия ($t = 0$) и правое граничное условие ($t > 0, x = l$) взяты в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка A на рис. 1.5). На левой границе ($t > 0, x = 0$) принято $u_1^* = -1.4$, $u_2^* = -2.2$ (точка B_1 на рис. 1.5 из области неединственности решения). Результат для фиксированного момента времени приведен на рис. 2.5. На этом графике выделена последовательность двух ударных волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_1$, затем медленная ударная волна $A_1 \rightarrow B_1$. Структуры скачков $A \rightarrow A_1$ и $A_1 \rightarrow B_1$ согласуются с видом интегральных кривых, приведенных в п. 2.1. Эта последовательность волн представляет решение первого типа. При численном решении подобных начально-краевых задач в тех случаях, когда решение неединственно, всегда формировалось решение первого типа.

Таким образом, полученные решения показывают, что решение неавтомодельной задачи может стремиться при $t \rightarrow \infty$ к разным решениям предельной автомодельной задачи (если это решение неединственно), в зависимости от деталей постановки начальных и граничных условий, соответствующих ограниченными значениями времени.

Разделить явным образом все начальные и граничные условия на два класса, соответствующих различному асимптотическому поведению при $t \rightarrow \infty$ невозможно. Однако, если ограничиться рассмотрением постановок задач, в которые входят непрерывные функции с ограниченными производными, то при $\mu \rightarrow 0$ для однозначного продолжения решений по времени нужно уметь решать

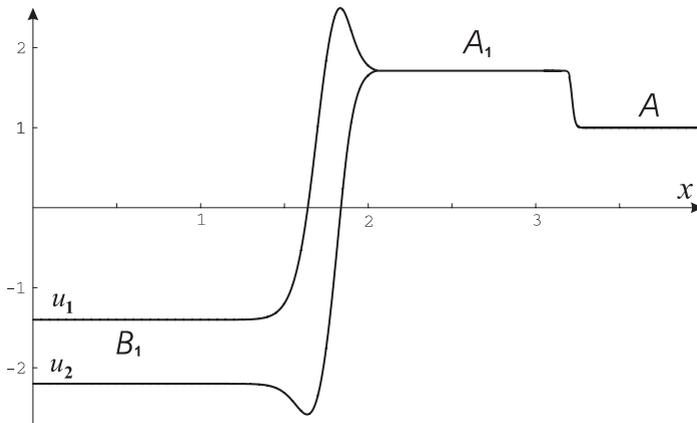
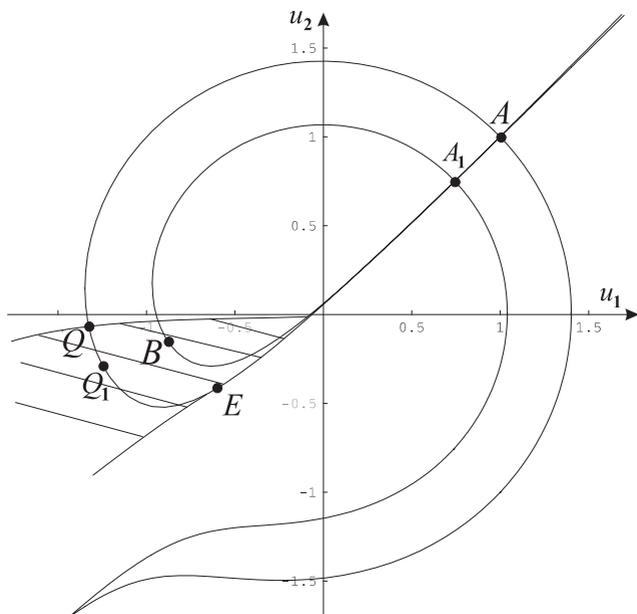


Рис. 2.5. Асимптотика автомодельного решения первого типа в средах с $\kappa < 0$

задачи о взаимодействии двух ударных волн или ударной волны и малого возмущения (столкновение большего числа волн маловероятно). При этом, конечно, интерес представляют случаи, когда соответствующее автомодельное решение неединственно.

2.3. Взаимодействие нелинейных волн в слабоанизотропной среде. Изучению процесса взаимодействия ударных волн посвящены работы [40, 41, 43]. В этом пункте рассмотрены пример 1, демонстрирующий решение задачи о взаимодействии волн, движущихся в одном направлении, и примеры 2-5, представляющие решения задач о столкновении двух ударных волн. Задачи о взаимодействии ударных волн наиболее интересны в том случае, когда состояние перед и за одной из систем образовавшихся волн соответствует неединственности решения автомодельной задачи.

Пример 1. Рассмотрена задача о взаимодействии двух ударных волн, одна из которых догоняет другую. Для этого была сформирована структура медленной ударной волны, соответствующей эволюционному скачку из точки A в точку A_1 (рис. 2.6), и структура догоняющей ее быстрой ударной волны, соответствующей эволюционному скачку из точки A_1 в точку B (рис. 2.6) ($\kappa > 0$). Точка B расположена на ударной адиабате, проведенной

Рис. 2.6. Пример 1 ($\kappa > 0$)

из точки A_1 как начальной, и принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A как начальной. Счет показал, что в результате взаимодействия этих ударных волн образуются две другие ударные волны: впереди идет быстрая $A \rightarrow Q_1$, за ней медленная $Q_1 \rightarrow B$, таким образом решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую решению первого типа автомодельной задачи о распаде произвольного начального разрыва.

Также была решена задача о взаимодействии ударной быстрой волны, соответствующей эволюционному скачку типа QE из точки A в точку Q_1 (или любую другую точку эволюционного участка QE) и малого финитного возмущения. Малое возмущение было сформировано перед быстрой ударной волной. Проведенные расчеты показали, что в результате взаимодействия ударной волны и малого возмущения образуется одна ударная волна типа QE .

Пример 2. Рассматривалась задача о взаимодействии двух ударных волн, движущихся навстречу одна другой. Для этого исследования должна, вообще говоря, использоваться полная система уравнений вязкоупругости (Приложение 1), описывающая волны, движущиеся в противоположных направлениях. Однако, в случае малой нелинейности задачу можно существенно упростить и необходимые для исследования расчеты проводить используя упрощенную систему уравнений (2.1).

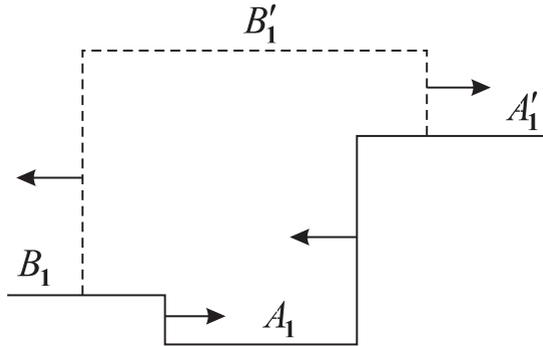
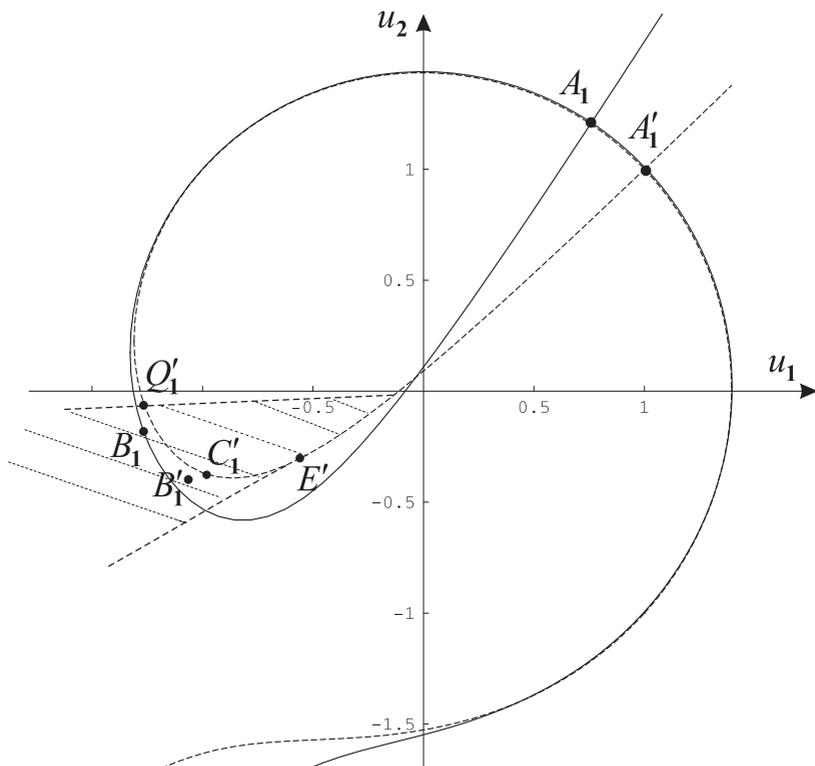


Рис. 2.7. Задача о взаимодействии двух ударных волн, движущихся навстречу друг другу

Очевидно, что встречные волны взаимодействуют в течение ограниченного промежутка времени τ , определяемого шириной структуры этих волн. Поэтому влиянием слабой нелинейности и слабой анизотропии в период взаимодействия встречных волн можно пренебречь, так что волны за время τ ведут себя как линейные, т.е. не меняют своей формы, и лишь потом, при существенно больших временах, происходит их изменение за счет действия малых нелинейных членов. Причиной этих изменений является то, что каждая из волн после времени τ начинает двигаться по измененному фону (рис. 2.7). Это приводит к нарушению соотношений на разрывах и к распаду волн, возникших после встречи двух исходных волн.

Рассмотрим следующую задачу о взаимодействии ударных волн, движущихся навстречу одна другой в среде с $\kappa > 0$. На рис. 2.8 сплошной линией изображена ударная адиабата из начальной точки $A_1(0.76, 1.22)$, штриховой линией изображена

Рис. 2.8. Пример 2 ($\kappa > 0$)

ударная адиабата из начальной точки $A'_1(1, 1)$, лежащей на ударной адиабате из начальной точки A_1 , ($f = 1$, $g = 0.05$, $\kappa = 0.5$). С целью исследовать процесс взаимодействия встречных ударных волн была сформирована структура быстрой ударной волны, движущейся налево и соответствующей скачку из точки A_1 в точку A'_1 , и структура движущейся ей навстречу быстрой ударной волны, соответствующей скачку из точки A_1 в точку $B_1(-1.28, -0.2)$.

В результате описанного выше линейного взаимодействия структур ударных волн $A_1 \rightarrow A'_1$ и $A_1 \rightarrow B_1$, движущихся навстречу, вправо будет распространяться возмущение $A'_1 \rightarrow B'_1$, влево возмущение $B_1 \rightarrow B'_1$ (рис. 2.7). Точка B'_1 определяется из условия, что разность значений величин u_1 , u_2 за и перед возмущением $A'_1 \rightarrow B'_1$ (Δu_1 и Δu_2) равна разности этих же вели-

чин за и перед скачком $A_1 \rightarrow B_1$. Согласно предыдущему, можно считать, что скачок $A_1 \rightarrow B_1$ после взаимодействия со скачком $A_1 \rightarrow A'_1$ сохранил свою структуру, но распространяется по новому начальному состоянию среды, соответствующему точке A'_1 .

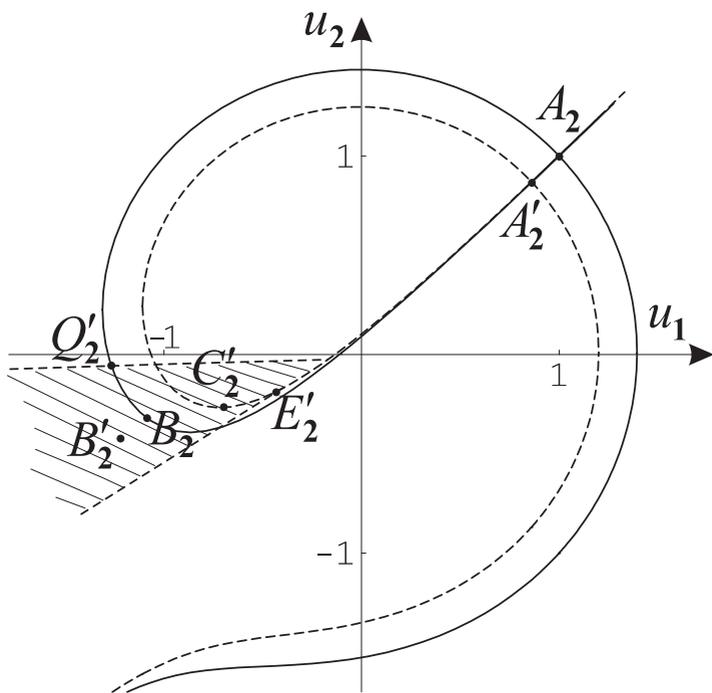
Исследуем эволюцию возмущения $A'_1 \rightarrow B'_1$. Из точки A'_1 как начальной проведена ударная адиабата, изображенная на рис. 2.8 штриховой линией. На рис. 2.8 заштрихована область неединственности решения задачи для точки A'_1 как начальной. Точка B'_1 принадлежит этой области неединственности.

Для исследования эволюции возмущения $A'_1 \rightarrow B'_1$ была поставлена следующая начально-краевая задача для системы уравнений (2.1). В качестве начальных условий ($t = 0$) задана структура скачка $A_1 \rightarrow B_1$, распространяющегося по состоянию A'_1 . Правое граничное условие ($t > 0, x = l$) взято в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка A'_1 на рис. 2.8). На левой границе ($t > 0, x = 0$) принято $u_1^* = -1.04, u_2^* = -0.42$ (точка B'_1 на этом же рисунке). Численное решение поставленной начально-краевой задачи при достаточно больших временах представляет собой последовательность распространяющихся направо быстрой ударной волны $A'_1 \rightarrow C'_1$ и медленной волны Римана $C'_1 \rightarrow B'_1$, т.е. автомодельную асимптотику решения первого типа.

Влево будет распространяться возмущение $B_1 \rightarrow B'_1$. Точка B'_1 не является точкой области неединственности решения автомодельной задачи для начальной точки B_1 . Поэтому система волн, движущихся после взаимодействия налево, определяется однозначно [8, 19, 34].

Пример 3. При тех же значениях параметров ($f = 1, g = 0.05, \kappa = 0.5$), что и в примере 2, рассмотрено взаимодействие медленной ударной волны $A_2 \rightarrow A'_2$, движущейся налево, и быстрой ударной волны $A_2 \rightarrow B_2$, движущейся направо (начальные и конечные состояния заданы координатами точек $A_2(1, 1), A'_2(0.86, 0.87), B_2(-1.1, -0.3)$). На рис. 2.9 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведенная из точки A_2 как начальной, штриховой линией – ударная адиабата из точки A'_2 как начальной.

В результате линейного взаимодействия встречных ударных волн $A_2 \rightarrow A'_2$ и $A_2 \rightarrow B_2$ направо будет распространяться возмущение $A'_2 \rightarrow B'_2$, налево возмущение $B_2 \rightarrow B'_2$. Точка B'_2 принадлежит заштрихованной на рис. 2.9 области неединственности

Рис. 2.9. Пример 3 ($\kappa > 0$)

решения автомодельной задачи, соответствующей точке A'_2 как начальной.

Для системы уравнений (2.1) численно решалась начально-краевая задача с начальными данными, соответствующими структуре скачка $A_2 \rightarrow B_2$ распространяющегося по состоянию A'_2 , и граничными условиями: на правой границе (при $t > 0, x = l$) $U_1 = 0.86, U_2 = 0.87$, что соответствует точке A'_2 , и на левой границе (при $t > 0, x = 0$) $u_1^* = -1.24, u_2^* = -0.43$, что соответствует точке B'_2 . Счет показал, что при достаточно больших временах решение состоит из быстрой ударной волны $A'_2 \rightarrow C'_2$ и медленной простой волны $C'_2 \rightarrow B'_2$, т.е. выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

Система волн, движущихся после взаимодействия встречных ударных волн $A_2 \rightarrow A'_2$ и $A_2 \rightarrow B_2$ налево, определяется однознач-

но, так как точка B'_2 не принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи для точки B_2 как начальной.

Пример 4. Рассмотрим взаимодействие ударных волн $A_3 \rightarrow A'_3$ и $A_3 \rightarrow B_3$, движущихся навстречу друг другу в случае $\kappa < 0$, при следующих значениях параметров $f = 1, g = -0.05, \kappa = -0.5, A_3(1, 1), A'_3(1.2, 1.2), B_3(-0.72, -1.58)$. На рис. 2.10 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведенная из точки A_3 как начальной, штриховой линией – ударная адиабата из точки A'_3 как начальной.

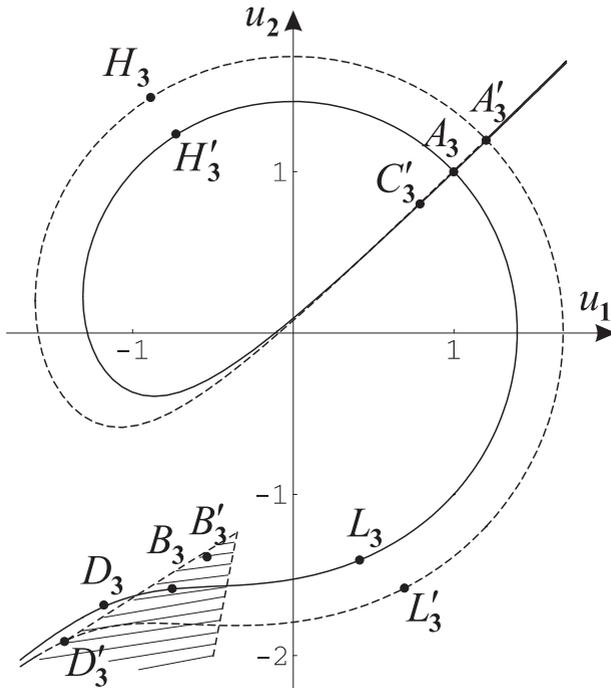


Рис. 2.10. Пример 4 ($\kappa < 0$)

В результате линейного взаимодействия встречных ударных волн $A_3 \rightarrow A'_3$ и $A_3 \rightarrow B_3$ направо будет распространяться возмущение $A'_3 \rightarrow B'_3$, налево возмущение $B_3 \rightarrow B'_3$. Точка B'_3 принадлежит заштрихованной на рис. 2.10 области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A'_3 как начальной.

Для системы уравнений (2.1) численно решалась начально-краевая задача с начальными данными, соответствующими структуре скачка $A_3 \rightarrow B_3$ распространяющегося по состоянию A'_3 , и граничными условиями: на правой границе (при $t > 0$, $x = l$) $U_1 = U_2 = 1.2$, что соответствует точке A'_3 , и на левой границе (при $t > 0$, $x = 0$) $u_1^* = -0.52$, $u_2^* = -1.38$, что соответствует точке B'_3 . Численный счет показал, что при достаточно больших временах решение состоит из быстрой простой волны $A'_3 \rightarrow C'_3$ и медленной ударной волны $C'_3 \rightarrow B'_3$, т.е. выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

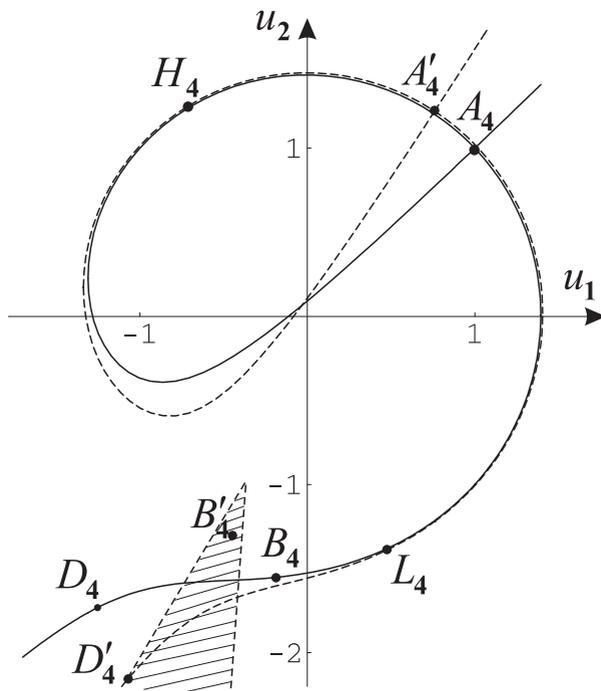
Система волн, движущихся после взаимодействия встречных ударных волн $A_3 \rightarrow A'_3$ и $A_3 \rightarrow B_3$ налево, определяется однозначно, так как точка B'_3 не принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи для точки B_3 как начальной.

Пример 5. При тех же значениях параметров $f = 1$, $g = -0.05$, $\kappa = -0.5$, что и в примере 4, численно решена задача о взаимодействии ударных волн $A_4 \rightarrow A'_4$ и $A_4 \rightarrow B_4$. На рис. 2.11 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведенная из точки A_4 как начальной, штриховой линией – ударная адиабата из точки A'_4 как начальной. Точка B'_4 принадлежит заштрихованной на рис. 2.11 области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A'_4 как начальной.

В результате линейного взаимодействия встречных ударных волн $A_4 \rightarrow A'_4$ и $A_4 \rightarrow B_4$ направо будет распространяться возмущение $A'_4 \rightarrow B'_4$, налево возмущение $B_4 \rightarrow B'_4$ ($A_4(1, 1)$, $A'_4(0.76, 1.22)$, $B_4(-0.2, -1.53)$).

Для системы уравнений (2.1) численно решалась начально-краевая задача с начальными данными, соответствующими структуре скачка $A_4 \rightarrow B_4$ распространяющегося по состоянию A'_4 , и граничными условиями: на правой границе (при $t > 0$, $x = l$) $U_1 = 0.76$, $U_2 = 1.22$, что соответствует точке A'_4 , и на левой границе (при $t > 0$, $x = 0$) $u_1^* = -0.44$, $u_2^* = -1.31$, что соответствует точке B'_4 . Решение состоит из быстрой простой волны $A'_4 \rightarrow C'_4$ и медленной ударной волны $C'_4 \rightarrow B'_4$, т.е. выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

Исследование взаимодействия двух ударных волн различных типов, движущихся навстречу друг другу, показало, что во всех рассмотренных в [40, 41, 43] случаях решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую системе волн автомодельного решения первого типа.

Рис. 2.11. Пример 5 ($\kappa < 0$)

Таким образом, на основании проведенных расчетов можно заключить, что автомодельные асимптотики первого типа (последовательность быстрой ударной волны и медленной ударной или простой волны) образуются более устойчиво (обладают в некотором смысле большей областью притяжения), чем автомодельные асимптотики второго типа. В случае задач с медленно меняющимися начальными и граничными условиями процессы взаимодействия возникающих в решении ударных волн будут происходить, по-видимому, всегда так, как если бы второго автомодельного решения не существовало.

Следует отметить, что решение первого типа, наиболее часто возникающее в расчетах, не удовлетворяет условию устойчивости относительно сглаживания начальной функции [2, 21]. По существу последнее условие является условием устойчивости относительно конечных возмущений и, как показывает численный счет,

его невыполнение не приводит в рассматриваемом случае к самопроизвольной перестройке решения.

2.4. Перестройка нелинейной упругой волны в среде с малой анизотропией. В предыдущем пункте было отмечено, что при решении задач об упругих волнах, в которых начальные и граничные условия непрерывны, а произвольные разрывы возникают в решении в результате взаимодействия двух ударных волн, можно забыть о решении второго типа в области неоднозначности. При этом оказывается, что оставшееся решение автомодельной задачи, которое было названо решением первого типа, имеет разрыв на одной из границ области области неоднозначности (для $\kappa > 0$ эта граница на плоскости (u_1, u_1) дается на рис. 1.4 отрезком ударной адиабаты PE и интегральной кривой EE' волны Римана, проведенной из точки E).

Существование границы разрыва автомодельного решения позволяет сделать заключения [37] о возможной резкой перестройке решения, содержащего быструю волну Римана, с излучением медленной ударной волны и распадом быстрой ударной волны типа QE на систему волн. Рассмотрение перестройки было проведено в предположении, что ударные волны, соответствующие внутренним точкам отрезка QE ударной адиабаты, при взаимодействии с одномерными возмущениями ведут себя устойчивым образом, т.е. не распадаются на систему нелинейных волн (эта система волн может быть только автомодельным решением второго типа) до тех пор, пока состояние за ударной волной не совпадает с точкой E . В противном случае можно указать сколь угодно малые возмущения, выводящие разрыв за пределы области существования решения первого типа, которые приведут к тому, что это решение перестанет существовать, а единственным решением задачи будет решение, содержащее сложную быструю волну (решение второго типа). В этом случае происходит мгновенная перестройка решения (распад волны $A \rightarrow E$).

Предположение о существовании ударных волн, соответствующих внутренним точкам интервала QE ударной адиабаты, и распад ударной волны, соответствующей точке E , были проверены прямыми расчетами поведения волн, основанных на использовании уравнений (2.1) [44].

Ниже приводятся результаты численного исследования взаимодействия ударной волны типа QE с возмущением, представля-

ющим маленький скачок-ступеньку. Сначала в области неединственности была поставлена начально-краевая задача для системы уравнений (2.1) и значений параметров $g = 0.01$, $\kappa = 1$. Начальные условия (при $t = 0$) и правое граничное условие (при $t > 0$, $x = l$) взяты в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка A на рис. 2.12), для левого граничного условия (при $t > 0$, $x = 0$) принято $u_1^* = -1.01$, $u_2^* = -0.79$ (точка B_1 на том же рисунке). При достаточно больших временах t сформировалась структура быстрой ударной волны типа QE . График этого решения представлен на рис. 2.13 а.

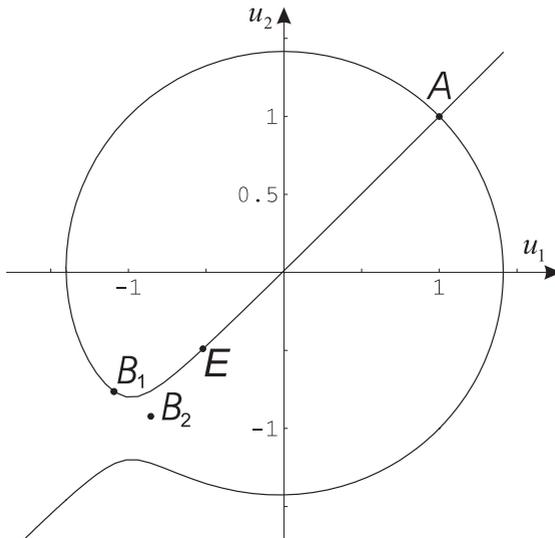
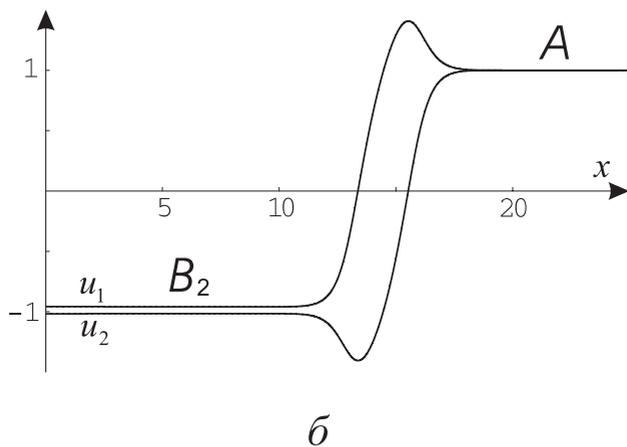
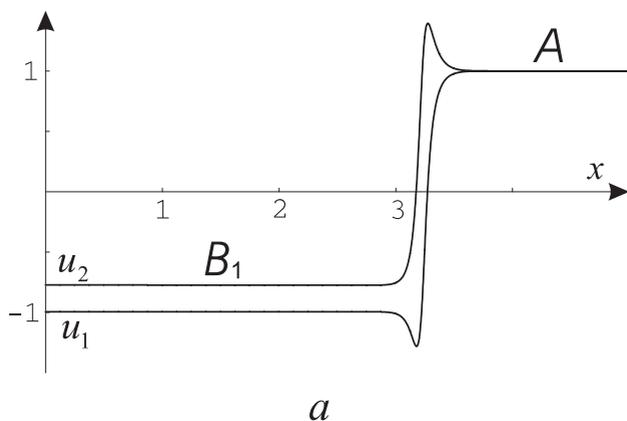


Рис. 2.12. Ударная адиабата для параметров $\kappa = 1$, $g = 0.01$, $f = 1$, $U_1 = U_2 = 1$

Для рассмотрения процесса взаимодействия волны типа QE (соответствующей решению первого типа) с малым возмущением, которое распространяется направо, значения на левой границе были изменены на значения $u_1^* = -0.842$, $u_2^* = -0.886$ (точка B_2 на рис. 2.12). Отметим, что полярные углы точек A и B_2 различаются более, чем на π . Значения u_1 и u_2 на правой границе расчетной области оставлены без изменения. В качестве начальных данных взята структура быстрой ударной волны $A \rightarrow B_1$ (графики u_α , представляющие начальные данные, изображены на рис. 2.14 а в зависимости от координаты x и на плоскости

Рис. 2.13. Распад волны типа QE

(u_1, u_2)). Точка B_2 принадлежит области, где реализуется только решение второго типа. Поэтому, решение должно перестроиться и выйти на асимптотику, соответствующую решению второго типа, т.е. волна типа QE должна распасться на систему волн, движущихся с близкими скоростями.

Начальные данные заданы таким образом, что в возмущенную область будет распространяться возмущение, соответствующее быстрой волне Римана $B_2 \rightarrow B_1$.

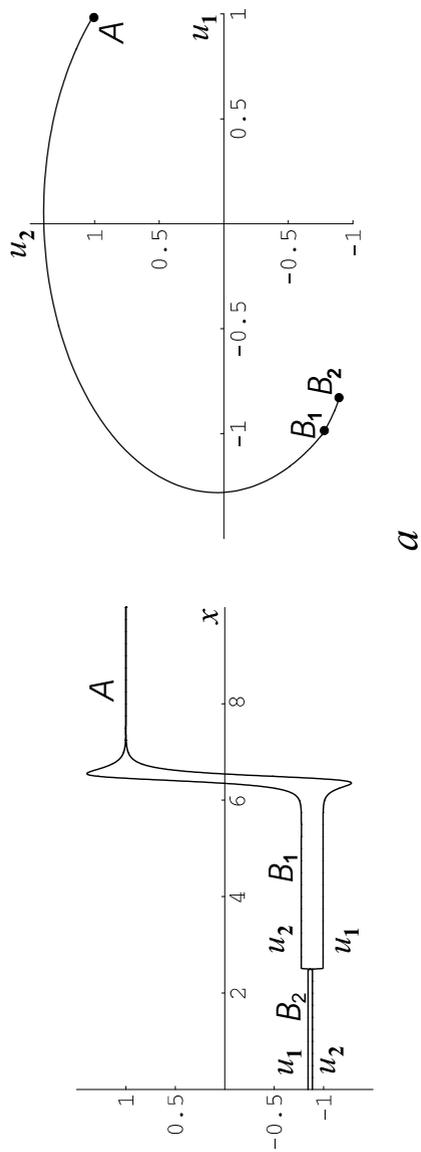
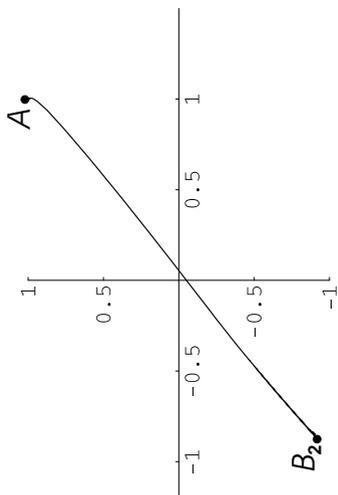


Рис. 2.14. Эволюция медленной волны



б

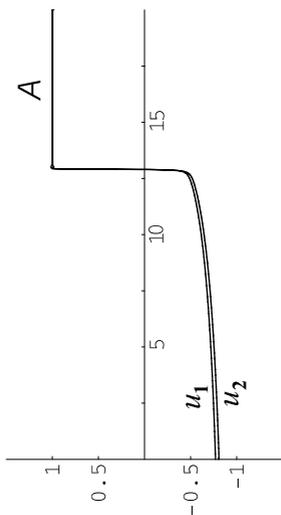
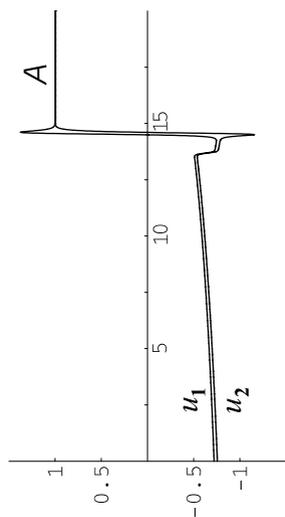
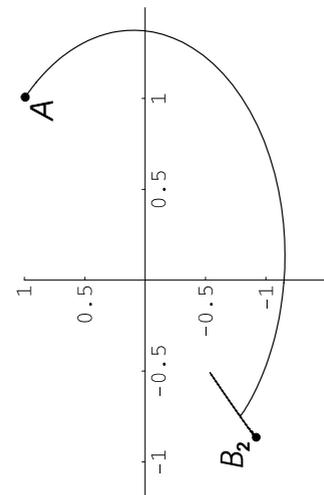
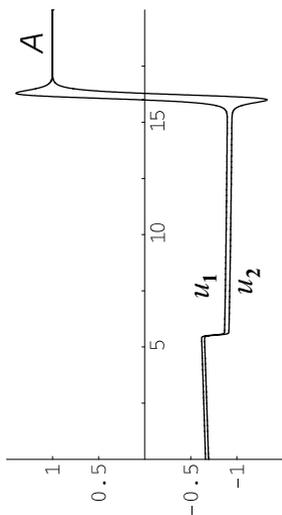
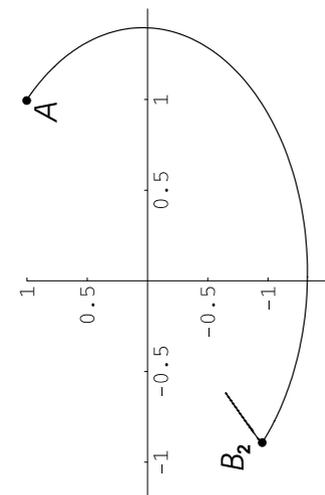


Рис. 2.14 б



6

Рис. 2.14 в



2

Рис. 2.14 г

В результате численного решения поставленной начально-краевой задачи обнаружено, что поглощение рассматриваемой ударной волной $A \rightarrow B_1$ быстрых возмущений, соответствующих отрезку интегральной кривой $B_1 B_2$, приводит к излучению интенсивных медленных волн Римана. При этом состояние за ударной волной приближается к точке E (см. рис. 2.14 б, в, представляющие графики решений в последовательные фиксированные моменты времени $t_1 < t_2$ в зависимости от координаты x и на плоскости (u_1, u_2)).

При больших значениях времени t происходит перестройка решения с нелинейным распадом волны, соответствующей точке E (рис. 2.12). В момент прекращения излучения формируется медленная ударная волна, которая становится передней границей излученной ранее и находящейся сзади волны Римана. На рис. 2.14 г представлены графики для момента времени t_3 ($t_3 > t_2$). Как было отмечено в [37], максимальная амплитуда излученной волны Римана определяется положением точки E и остается конечной при малых значениях g .

Результат численного расчета поставленной задачи для момента времени, когда процесс перестройки завершен, представлен на рис. 2.13 б. На рис. 2.13 б не изображена медленная волна. Быстрая волна распалась на систему волн, соответствующих сложной волне автомодельного решения второго типа. Структура сложной волны расширяется с увеличением времени. Отметим, что в структуре волны типа QE (рис. 2.13 а) величина u_2 имеет локальный максимум, величина u_1 локальный минимум (рис. 2.13 а), а в структуре сложной волны, входящей в состав автомодельного решения второго типа величина u_1 имеет локальный максимум, величина u_2 локальный минимум (рис. 2.13 б). Это полностью согласуется с характером структуры этих разрывов (п. 2.1).

Следует подчеркнуть, что, если полярный угол точки, соответствующей левому граничному условию, меньше полярного угла точки E , то описанного выше распада с излучением медленной волны не происходит. Если исходная быстрая волна Римана соответствовала изменению полярного угла на плоскости (u_1, u_2) на величину, превышающую 3π , то описанный выше распад произойдет два или более раз.

Подобные нестационарные численные решения для других значений параметров, демонстрирующие процесс перестройки, описаны в [44].

2.5. Исследование устойчивости структуры ударных волн в вязкоупругой среде при взаимодействии с одномерными неоднородностями. Рассмотрим теперь вопрос о возможности выделения единственного решения путем исключения некоторых типов разрывов как неустойчивых. Для случая $\kappa > 0$, который далее рассматривается, как уже говорилось, наибольшее подозрение вызывает разрыв $A \rightarrow B \in QE$ (разрыв типа QE). Действительно, как отмечалось в п. 2.2, изменение величин в этой ударной волне совпадает с изменением величин в некоторой системе волн, движущихся в ту же сторону с различными скоростями и составляющих автомодельное решение второго типа. Таким образом, ударная волна типа QE , может распасться на систему волн, и если такое событие произойдет, то эти волны, двигаясь с разными скоростями, уже никогда не соберутся в исходную ударную волну. Ударные волны типа QE являются метастабильными объектами и часто предполагается, что ударные волны, распад которых допускается системой гиперболических уравнений, этого типа не присутствуют в решениях задач [21]. Если принять такую точку зрения, то решение рассматриваемых задач об упругих волнах в случае $\kappa > 0$ окажется всегда единственным и в области, которая считается областью неединственности, будет только второго типа. Однако метастабильность есть неустойчивость по отношению к конечным возмущениям, причем известно, что, например, метастабильные состояния могут реализовываться и достаточно долго существовать. Возможность реализации метастабильных объектов определяется соотношением между необходимыми для их разрушения и имеющимися в наличии возмущениями.

Решить вопрос, распадается или не распадается ударная волна, невозможно, пока она рассматривается как поверхность нулевой толщины. В [40, 41, 43, 44] рассматривалась вязкоупругая среда Фойхта и проводилось численное решение ряда неавтомодельных задач, которые имеют асимптотику, соответствующую решению автомодельной невязкой задачи. Оказалось, что в зависимости от деталей задания начальных или граничных условий для

неавтомодельной задачи на интервалах времени или пространства, пропорциональных вязкости, решение при $t \rightarrow \infty$ может выходить на невязкую асимптотику, представляемую решениями как первого, так и второго типа. Были проведены численные эксперименты для изучения взаимодействия волны указанного типа со специально создаваемыми волнами, представляющими собой малые возмущения, а также с нелинейными волнами, соответствующими ударным волнам при отсутствии вязкости. Во всех случаях ударная волна типа QE продолжала существовать после взаимодействия волн, если соответствующая автомодельная задача имела решение, содержащее такую волну, т.е. имела решение первого типа. Переход на решение второго типа происходил только тогда, когда решение первого типа отсутствовало. Таким образом, волну типа QE можно считать устойчивой по отношению к малым возмущениям и возмущениям конечной амплитуды.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов по изучению взаимодействия волны типа QE с локальными (финитными) неоднородностями фона в предположении, что среда является вязкоупругой средой Фойхта. Эта проблема представляет интерес ввиду того, что фон, по которому распространяются волны, в реальности всегда слегка неоднороден (неоднородность может иметь случайный характер). Возникает вопрос, насколько велики должны быть неоднородности фона, чтобы произошел распад ударной волны на систему волн. В [45] предполагалось, что задающие свойства фона коэффициенты уравнений, описывающих упругие волны, являются функциями координаты x , в направлении которой происходит распространение плоских волн, причем в конкретных расчетах предполагалось, что фон всюду однородный, за исключением некоторого отрезка оси x ($a < x < b$), где он также однороден, но характеризуется другими параметрами. Изучается, как происходит взаимодействие с такой неоднородностью бегущих волн, приходящих из области $x < a$ и соответствующих в невязком случае исследуемым ударным волнам типа QE .

На границах отрезка $[a, b]$ предполагаются выполненными условия непрерывности перемещений и напряжений. Эти условия задают законы отражения и преломления волн на этих границах. Очевидно, что когда закончится нестационарный процесс, связанный с прохождением волной отрезка $[a, b]$, внутри отрезка и на его границах установятся некоторые новые постоянные напряжения. Поэтому задача о возникающих в области $x > b$ волнах

должна иметь при $t \rightarrow \infty$ автомодельную невязкую асимптотику в переменных $x/t, t$. Эта асимптотика при некоторых условиях может быть первого типа и содержать волну типа QE . В других случаях асимптотика может быть второго типа, в которой волна типа QE не содержится и заменяется системой других волн. В последнем случае будем говорить о распаде волны типа QE при прохождении неоднородности на отрезке $[a, b]$. Целью проведенного исследования является обнаружение и оценка пороговых свойств неоднородностей среды, разрушающих исходную волну.

Уравнения, описывающие одномерные квазипоперечные волны малой амплитуды в вязкоупругой среде Фойхта, приведены в Приложении 1 п. 6.3, упругий потенциал Φ задавался в виде (1.2). В рассматриваемой ниже задаче влияние малых членов должно учитываться в тех случаях, когда они действуют в течение достаточно большого времени. При взаимодействии волн с концами отрезка $[a, b]$ достаточно учесть первый член в выражении (1.2), а вязкими и нелинейными членами в уравнениях (Приложение 1) можно пренебречь. Для простоты в дальнейшем рассматриваются случаи, когда эффектами отражения волн от границ отрезка $[a, b]$ можно также пренебречь, для чего достаточно потребовать постоянства ρ_0 и f всюду. В связи с этим оказалось удобным изучать волны, распространяющиеся только в одном направлении (в положительном направлении оси x).

Для описания волновых процессов как и прежде используется система уравнений (2.1), упругий потенциал имеет вид (1.4). Выражение (1.4) справедливо в специальной системе декартовых координат, в которой направления осей x_1 и x_2 определяются свойствами среды. В дальнейшем будут использоваться эти специальные координаты. Поэтому на выделенном отрезке $[a, b]$ могут быть изменены по отношению к окружающей среде не только упругие коэффициенты, но и ориентация указанных осей, что приведет к ортогональным преобразованиям переменных u_1, u_2 , представляющих собой поворот осей u_1, u_2 сначала на некоторый угол θ при $x = a$, а затем на угол $-\theta$ при $x = b$.

Вследствие предполагаемой малой нелинейности можно считать [45], что при пересечении волной границ отрезка $[a, b]$ свойства среды меняются мгновенно и можно, таким образом, считать величины g, μ, θ функциями только времени t , скачкообразно меняющимися дважды. При численных экспериментах определяется наименьший интервал времени такой, что некоторое заданное

изменение параметров среды в этом интервале приводит к распаду изучаемой ударной волны.

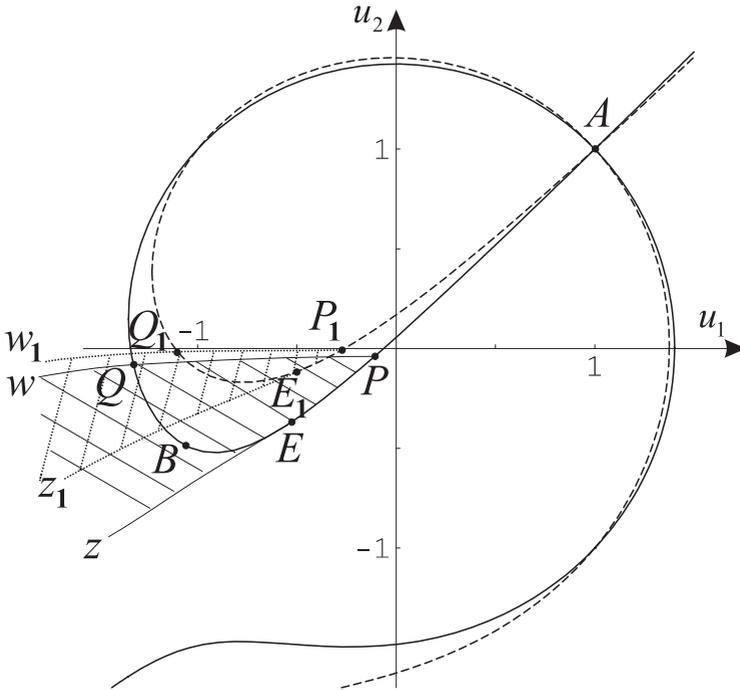


Рис. 2.15. Ударные адиабаты для параметров $g = 0.03$ (сплошная линия), $g = 0.1$ (штриховая линия)

При проведении расчетов сначала формировалось решение в виде бегущей волны $A \rightarrow B$ такой, что точка B принадлежит отрезку QE ударной адиабаты, соответствующей начальной точке A (рис. 2.15) (точка A имела координаты $U_1 = 1, U_2 = 1$, точка B – координаты $u_1^* = -1.05, u_2^* = -0.455$; $g = g_1 = 0.03$; $\kappa = 0.5$; $\mu = 0.024$). На рис. 2.15 сплошной линией изображена ударная адиабата для этих параметров и сплошными линиями отмечена область неединственности (кривые PQ, PE, Qw, Ez). Точка B принадлежит области неединственности для начального состояния, соответствующего точке A . Параметр f выбирался (используя преобразование Галилея) таким образом, чтобы волна $A \rightarrow B$ все время оставалась в расчетной области.

В первой серии расчетов проводилось изменение значения параметра анизотропии g на промежутке времени $t_a < t < t_b$, соответствующее прохождению волной участка оси x ($a < x < b$). Значения остальных параметров κ , μ , f не изменялись. При $0 < t < t_a$ и $t > t_b$ значение g считалось равным $g_1 = 0.03$, а на выделенном промежутке времени $t_a < t < t_b$ значение параметра g увеличивалось и принимало значение $g_2 = 0.1$. Величина t_a определяется временем, необходимым для формирования стационарной структуры изучаемой волны $A \rightarrow B$.

Ударная адиабата для измененного параметра $g_2 = 0.1$ изображена на рис. 2.15 штриховой линией. В этом случае изменяется геометрия области неединственности, которая ограничена штриховыми линиями P_1Q_1 , P_1E_1 , Q_1w_1 , E_1z_1 . При таком изменении параметра g точка B принадлежит области, решение единственно и является решением второго типа. Поэтому, при прохождении отрезка $[a, b]$ сформированная вне этого отрезка структура ударной волны $A \rightarrow B$ распадается на систему волн, соответствующих сложной волне автоматического решения второго типа. Структура сложной ударной волны расширяется с увеличением времени (шп. 2.1, 2.2), поэтому, чем больше длина отрезка $[a, b]$, тем будет больше ширина волнового пакета быстрых волн.

Проведена также серия расчетов для случая, когда на отрезке времени $[t_a, t_b]$ изменялся параметр θ , а остальные параметры среды не изменялись. Аналогично тому, как и в предыдущей серии расчетов, в момент времени t_a было сформировано решение, представляющее структуру быстрой ударной волны $A_1 \rightarrow B_1$ (типа QE) (см. рис. 2.16). Затем при $t_a < t < t_b$ изменялось направление осей u_1 и u_2 на угол θ таким образом, что в новых осях точка A_1 перешла в точку A_2 , точка B_1 – в точку B_2 . На рис. 2.16 сплошной линией изображена ударная адиабата из начальной точки A_1 и сплошными линиями заштрихована соответствующая область неединственности решений задачи, штриховой линией проведена ударная адиабата из начальной точки A_2 и штриховыми линиями отмечена соответствующая область неединственности. Угол поворота осей θ выбирался таким образом, чтобы точка B_2 принадлежала области, в которой поставленная начально-краевая задача, соответствующая точкам A_2 , B_2 , для системы уравнений (2.1), имела единственное решение второго типа. В момент времени $t = t_b$ оси u_1 , u_2 поворачивались на угол $-\theta$, т.е. занимали

исходное начальное положение, при этом точка A_2 возвращалась в точку A_1 , а точка B_2 – в точку B_1 .

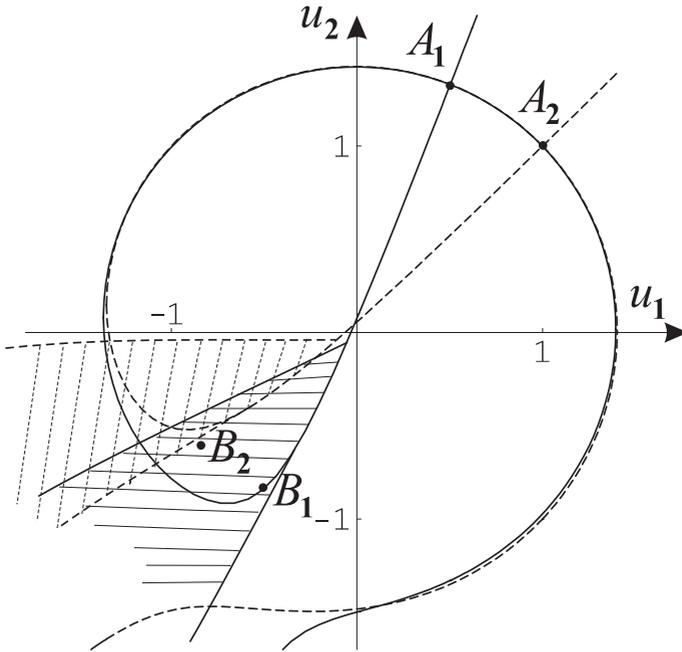


Рис. 2.16. Ударные адиабаты для начальных точек $A_1(0.5, 1.33)$ (сплошная линия), $A_2(1.1)$ (штриховая линия)

В этих двух сериях расчетов показано, что распад метастабильной волны происходил только тогда, когда изменения g или θ были такими, что в результате этого изменения точка B , представляющая состояние за невозмущенной метастабильной волной, попадала в область, в которой существует только решение второго типа. При этом формировалось решение второго типа. Если разность $\tau = t_b - t_a$ оказывалась достаточно большой, то волны, его составляющие, расходились по оси x и далее при $t > t_b$ продолжали представлять решение второго типа. Если же величина τ была недостаточно большой, то из решения, возмущенного изменением g или θ вновь вырабатывалось при $t > t_b$ решение первого типа, представляемое структурой метастабильной ударной волны.

Численные эксперименты по определению величины времени $\tau = t_b - t_a$, которое необходимо для распада метастабильных волн, показали [45], что величина τ определяется следующим условием: для распада необходимо, чтобы общая протяженность системы волн, образовавшихся на участке неоднородности и движущихся с различными скоростями, была больше ширины структуры метастабильной ударной волны (типа QE) вне области неоднородности.

Численно также были решены начально-краевые задачи для системы уравнений (2.1), когда на выделенном отрезке $[t_a, t_b]$ изменялась величина коэффициента кинематической вязкости μ , а остальные коэффициенты уравнений (2.1) не изменялись. На отрезке $[t_a, t_b]$ значение коэффициента вязкости μ увеличивалось и как следствие этого ширина структуры ударной волны типа QE на этом отрезке увеличивалась, но характерное изменение величин u_1 и u_2 внутри структуры сохранялось. Последующее возвращение коэффициента вязкости на границе $t = t_b$ к первоначальному значению приводило к тому, что ширина структуры ударной волны постепенно уменьшалась и при увеличении времени t метастабильная ударная волна восстанавливалась.

Изложенные результаты, касающиеся взаимодействия метастабильной ударной волны с неоднородностями фона, находятся в соответствии с результатами работ [40, 41, 43, 44] (п. 2.2–2.3) о формировании решений первого и второго типов и взаимодействии нелинейных волн между собой. Для распада метастабильной волны необходимо не просто возмутить ее структуру (как, например, с помощью изменения вязкости), но нужно добиться путем создания специальных возмущений формирования решения второго типа и не оставляющих возможности сохранения решения первого типа. Таким образом, метастабильная ударная волна проявляет большую устойчивость по отношению к одномерным возмущениям. Вместе с тем, как следует из изложенного, время τ , необходимое для разрушения структуры метастабильной ударной волны специальными нелинейными возмущениями фона, определяется шириной ее структуры, т.е. при фиксированной амплитуде волны оно пропорционально коэффициенту вязкости μ .

2.6. Устойчивость к двумерным возмущениям метастабильной ударной волны в вязкоупругой среде. В предыдущем пункте было показано, что взаимодействие метаста-

бильной ударной волны с неоднородностью фона может приводить к необратимому распаду метастабильной ударной волны, так что после взаимодействия образуется система волн, соответствующая упомянутому выше решению второго типа задачи о распаде разрыва. Несмотря на довольно жесткие условия, необходимые для того чтобы произошел распад метастабильной ударной волны, оставалась возможность считать, что при движении по случайному фону метастабильная ударная волна рано или поздно наткнется на достаточно большое возмущение, которое ее разрушит. В связи с этим представляет интерес изучение в той же постановке, что и ранее [40, 41, 43, 44, 45], взаимодействия метастабильной ударной волны с неоднородными возмущениями.

В этом параграфе обсуждаются результаты численного решения двумерных вязкоупругих задач о взаимодействии вязкой структуры метастабильной ударной волны с достаточно медленно меняющимися периодическими по тангенциальной координате возмущениями [46]. Результаты решения этих задач показывают, что, если имеется достаточно большой участок невозмущенной метастабильной ударной волны, то ее распад на систему волн носит обратимый характер, т.е. с течением времени восстанавливается решение, соответствующее исходной метастабильной ударной волне. Это говорит о большой устойчивости исследуемой метастабильной ударной волны, о возможности залечивания ею ран, нанесенных сильными, но ограниченными в пространстве внешними воздействиями. Эти результаты позволяют предположить, что метастабильные ударные волны могут реально существовать.

Будем использовать упрощенную систему уравнений [22] для описания двумерных нестационарных движений вязкоупругой среды, когда все искомые величины зависят от времени t , лагранжевой координаты x и слабо зависят от лагранжевой координаты y (в начальном состоянии x и y совпадают соответственно с декартовыми координатами x_3 и x_2).

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - d \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} dx, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) отличаются от уравнений (2.1) только вторым слагаемым в правой части уравнений (2.3), учитывающим слабую зависимость решения от переменной y . Это слагаемое имеет тот

же вид, что и соответствующие члены в уравнениях Кадомцева–Петвиашвили [47] и Хохлова–Заболотской [48]. Коэффициент d равен половине характеристической скорости изучаемых волн в линейной изотропной среде [22, 47, 48]. Функция $R(u_1, u_2)$ имеет вид (1.4).

В расчетах в качестве x_0 (нижнего предела в интеграле) выбиралось такое значение x впереди изучаемой системы волн, где можно считать, что u_1 и u_2 принимают невозмущенные постоянные значения. Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (2.3), для которых описанные в п. 1.3 автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \rightarrow \infty$.

Уравнения (2.3) позволяют рассматривать поведение решений в системе координат, движущейся в положительном направлении оси x относительно исходной системы координат с некоторой постоянной скоростью. Это приводит к изменению величины f – коэффициента, в выражении (1.4), представляющего скорость характеристик в линейном изотропном приближении относительно выбранной системы координат. В дальнейшем величина f будет подбираться исходя из удобства расчетов. При этом линейные и нелинейные члены в левой части системы (2.3) будут считаться одного порядка. Коэффициентам g , κ , μ и d можно придать любые значения, если подходящим образом распорядиться единицами измерения u_α , x , t и y .

Согласно сказанному выше, в исходных, не преобразованных переменных, имеет место равенство $d = a/2$, где a – скорость поперечных линейных волн в изотропной среде. Отношение последнего члена (учитывающего влияние неоднородности) в уравнениях (2.3) к нелинейному члену в левой части по порядку величины равно $(a/\Delta a)(L_x^2/L_y^2)$, где под Δa понимается величина κu^2 , характеризующая изменение скорости характеристик при влиянии нелинейности (u – характерная величина переменных u_α ; L_x , L_y – характерные размеры соответственно по переменным x , y). При этом предполагалось, что $\Delta a/a \ll 1$ (малая нелинейность) и $(L_x^2/L_y^2 \ll 1)$ (близость к одномерному случаю). Поскольку понимание этих сильных неравенств допускает большой произвол, пространственный (последний) член в уравнениях (2.3) может быть как малым по отношению к остальным членам, так и достаточно большим.

Оценим порядок величины члена, ответственного за неоднородность исходя из предположения, что вязкий и нелинейный члены имеют один и тот же порядок величины, как это имеет место в одномерном случае. Тогда получим, что характерный масштаб изменения величин по оси x равен $L_x \sim \mu/(\kappa u^2)$, а порядок величины нелинейного члена $\kappa u^3/L_x$ определяется выражением $\kappa^2 u^5/\mu$. Отношение “пространственного” члена к нелинейному члену в уравнениях (2.3) по порядку величины равно $M = d\mu^2/(L_y^2 \kappa^3 u^6)$. Безразмерный параметр M характеризует интенсивность взаимодействия по переменной y различных участков волны между собой.

Ниже рассматриваются задачи, в которых $u \sim 1$, а полученная оценка позволяет сравнивать между собой результаты различных вариантов расчета. В частности, как видно из выражения для M , уменьшение d эквивалентно увеличению масштаба L_y , характеризующего зависимость решения от y .

Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (2.3), для которых описанные в п. 1.3 автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \rightarrow \infty$.

Уравнения были записаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, которые были линеаризованы методом Ньютона и решались методом матричной прогонки [42]. Интегралы в правых частях уравнений (2.3) вычислялись методом прямоугольников и значения функций $u_1(t, x, y)$ и $u_2(t, x, y)$ в подынтегральном выражении принимались равными значениям этих функций на каждой предыдущей итерации.

Начально-краевая задача о взаимодействии метастабильной ударной волны (волны типа QE), представляемой скачком $A \rightarrow B$ (рис. 2.15), с двумерным возмущением фона была сформулирована следующим образом. Система уравнений (2.3) решается в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq L$, $t \geq 0$.

Граничные условия ($t \geq 0$) задаются в виде

$$\begin{aligned} x = l, \quad y > 0: & \quad u_\alpha = U_\alpha \quad (\text{точка А}); \\ x = 0, \quad y > 0: & \quad u_1 = u_\alpha^* \quad (\text{точка В}); \\ y = 0, \quad y = L, \quad 0 < x < l: & \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные условия ($t = 0$, $0 < x < l$) задаются в виде

$$\begin{aligned} 0 < y \leq y_1 &: u_\alpha = u_\alpha^{(2)}(x), \\ y_1 < y < L &: u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В связи с постановкой граничных условий отметим, что задание граничных условий при $y = 0$ и $y = L$ в виде равенства нулю производных по y обеспечивает возможность периодического (с периодом $2L$) продолжения решения по y . Граничные условия при $x = l$ соответствуют состоянию перед волной, которая является быстрой, так что состояние впереди на достаточном удалении от волны можно считать невозмущенным.

При выборе начальных данных (функций $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$) использовались результаты работы [45] (изложенные в предыдущем пункте), в которой в одномерной постановке рассматривалась задача о взаимодействии метастабильной ударной волны с неоднородностью фона. Неоднородность фона задавалась в [45] изменением коэффициента g (анизотропии) в течение некоторого промежутка времени τ (времени взаимодействия метастабильной ударной волны с неоднородностью). Создавалось такое увеличение параметра g , что если бы далее g не менялось, то отсутствовала бы асимптотика, содержащая метастабильную ударную волну. Тогда при достаточно больших значениях τ происходило формирование асимптотики второго типа (т.е. начинался распад исходной метастабильной ударной волны) и решение, после придания величине g исходного значения, уже не возвращалось к первоначальному виду. При малых значениях структура метастабильной ударной волны восстанавливалась.

Зависимость функций $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$ от x в равенствах (2.5) выбиралась следующим образом. В качестве начальных данных $u_\alpha^{(1)}(x)$ задавалась стационарная структура метастабильной ударной волны (точка A имела координаты $U_1 = 1$, $U_2 = 1$, точка B – координаты $u_1^* = -1.05$, $u_2^* = -0.455$; $g = g_1 = 0.03$; $\kappa = 0.5$; $\mu = 0.024$ (рис. 2.15)). В качестве $u_\alpha^{(2)}(x)$ выбирались взятые из [45] функции, соответствующие некоторому необратимому этапу одномерного распада (описанного в п. 2.4) той же стационарной метастабильной ударной волны в результате увеличения g от значения $g = g_1 = 0.03$ до значения $g = g_2 = 0.1$ при прежних значениях остальных параметров (рис. 2.17).

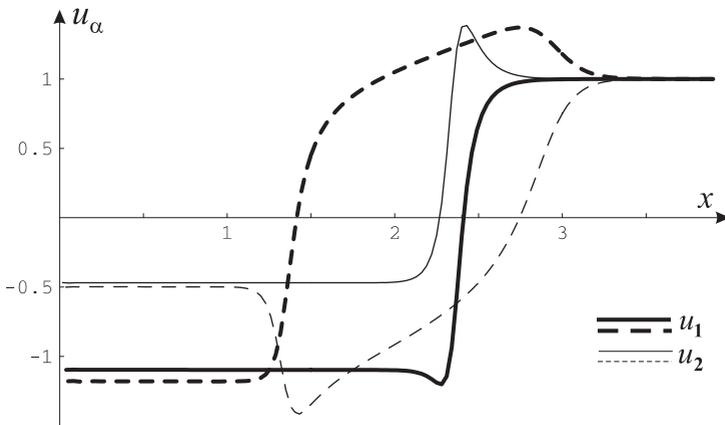


Рис. 2.17. Начальные данные

Начальные данные (2.5) заданы таким образом, что при переходе y через значение $y = y_1$ происходит смена начальных условий. При такой постановке начальных условий вследствие существенного различия функций $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$ разностные уравнения плохо аппроксимируют интегро-дифференциальные уравнения (2.3). Для устранения этого недостатка в начальных условиях были введены “переходные зоны” по переменной y так, что при изменении y имела место не скачкообразная, а постепенная смена типа начальных условий [46].

Начальные данные на интервале $y_1 \leq y \leq y_1 + y_p$ (y_p – ширина переходной зоны) задавались следующим образом:

$$u_\alpha^{(p)}(x) = (1 - f(s))u_\alpha^{(1)}(x) + f(s)u_\alpha^{(2)}(x),$$

$$s = (y - y_1)/y_p, \quad f(s) = s^2(2 - s^2).$$

Функция $f(s)$ осуществляет сглаживание. Она удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0.$$

Значения $u_\alpha^{(2)}(x)$ слева от области быстрого изменения этих функций немного отличаются от значений $u_\alpha^{(1)}(x)$ в той же области (рис. 2.17) [45]. Это отличие вызвано тем, что в процессе распада метастабильной ударной волны, приведшего к функциям $u_\alpha^{(2)}(x)$,

налево ушла медленная ударная волна, которая слегка изменила значения u_α и вышла за пределы расчетной области. В пределах расчетной области располагаются только быстрые волны, слегка искаженные вязкостью. До проведения расчетов было специально проверено, что приход на левую границу ($x = 0$) медленной волны не приводит к появлению сколько-нибудь заметной отраженной быстрой волны (которая могла бы исказить изучаемый процесс).

С учетом наличия переходных зон начальные условия (2.5) были записаны следующим образом:

$$0 \leq y \leq y_1 : \quad u_\alpha = u_\alpha^{(2)}(x); \quad (2.6a)$$

$$y_1 \leq y \leq y_1 + y_p : \quad u_\alpha = u_\alpha^{(p)}(x); \quad (2.6b)$$

$$y_1 + y_p \leq y \leq L : \quad u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(x). \quad (2.6c)$$

Проводились тестовые расчеты начально-краевой задачи (2.3), (2.4), (2.6) при различных значениях параметра y_p и было отмечено, что при увеличении y_p (увеличении ширины переходной зоны) разностные уравнения лучше аппроксимируют дифференциальную задачу. В результате тестовых расчетов было определено такое значение y_p , что результаты расчетов при заданном шаге Δy по переменной y и при шаге $\Delta y/2$ совпадают с заданной точностью (0.001).

Расчеты начально-краевой задачи (2.3), (2.4), (2.6) позволили пронаблюдать процесс восстановления структуры метастабильной ударной волны. Последовательно опишем и продемонстрируем этот процесс на графиках.

В одном из вариантов расчета начальные условия ($t = 0$) были взяты в следующем виде: в двух последовательных слоях ($y_j = \text{const}$, $y_{j+1} = y_j + \Delta y$, $j = 1, 2$) задаются начальные условия (2.6a), затем 10 последовательных слоев ($j = 3, \dots, 12$) соответствуют переходной зоне с начальными условиями (2.6b) и два слоя ($j = 13, 14$) соответствуют начальным условиям (2.6c) (невозмущенная метастабильная ударная волна). На рис. 2.18 представлен график функции $u_1(x, y)$ при $t = 0$. Поставленная начально-краевая задача решалась при различных значениях параметра d .

При $d = 0$, $\Delta y = 2$ (в системе уравнений (2.3) отсутствуют члены, описывающие взаимодействие между слоями по переменной y) с увеличением расчетного промежутка времени t происходят

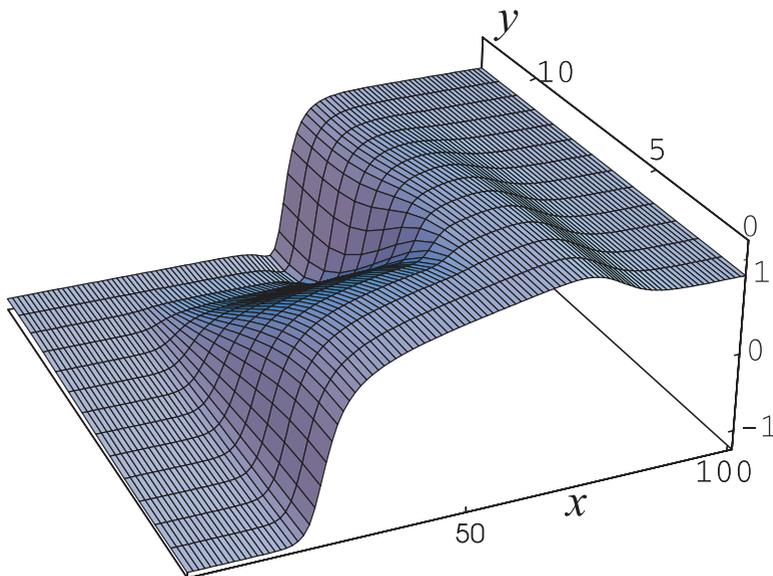


Рис. 2.18. Начальные данные, включающие “переходные зоны”

следующие изменения. На пяти слоях промежуточной области, примыкающих к границе, представляющей решение второго типа, постепенно формируется асимптотика решения второго типа. На остальных слоях промежуточной области формируется асимптотика решения первого типа.

При малых значениях параметра d ($d = 0.5, 1, 2, 3$) ($M = 3.6735 \cdot 10^{-7}, 7.347 \cdot 10^{-7}, 1.4694 \cdot 10^{-6}, 2.2041 \cdot 10^{-6}$), $\Delta y = 2$ с увеличением расчетного промежутка времени постепенно формируется асимптотика первого типа на переходном слое ($j = 12$), граничащем со слоем, на котором задана асимптотика решения первого типа ($j = 13$). Затем асимптотика первого типа формируется на слое $j = 11$ и так далее. Перестройка решения на каждом из последующих слоев сопровождается излучением медленной волны, распространяющейся налево. Эта медленная волна при взаимодействии с границей не дает отраженных возмущений. Таким образом, во всей расчетной зоне формируется асимптотика решения первого типа.

Эволюцию решения поставленной начально-краевой задачи при $d = 30$ ($M = 2.2041 \cdot 10^{-5}$), $\Delta y = 2$ можно наблюдать

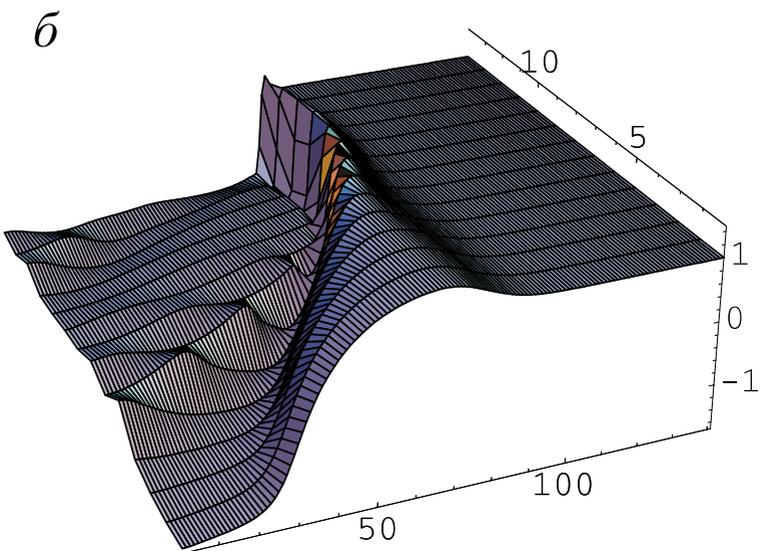
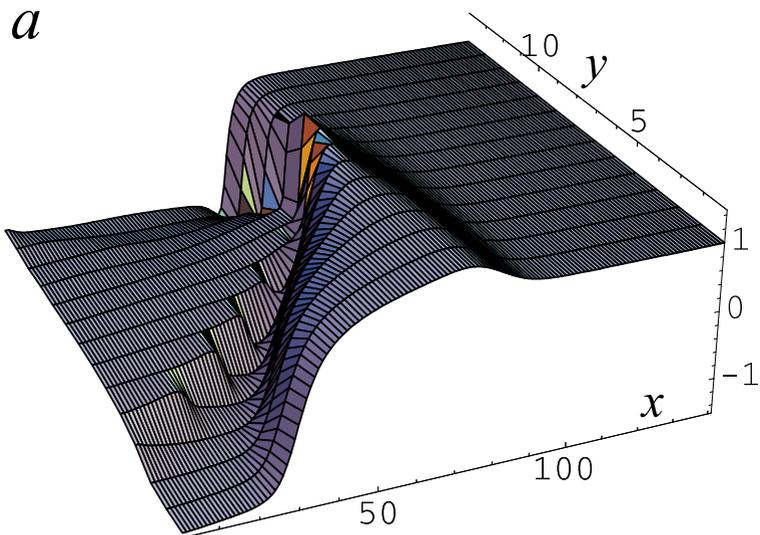


Рис. 2.19. Перестройка решения

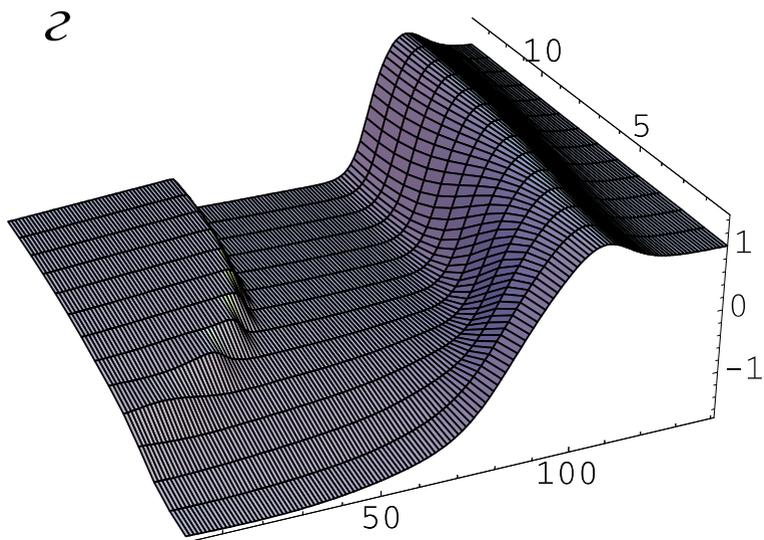
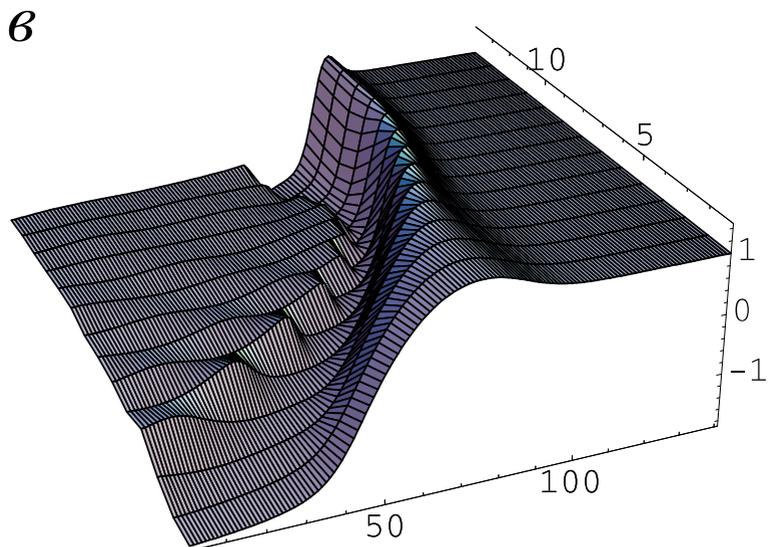


Рис. 2.19 (продолжение)

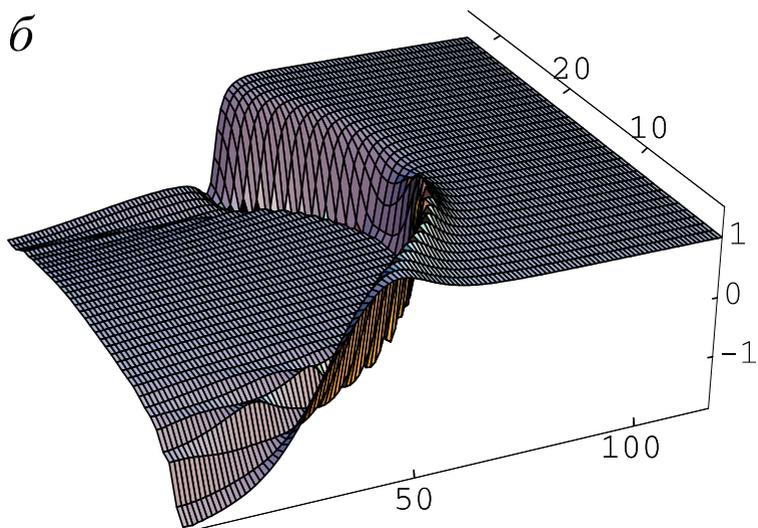
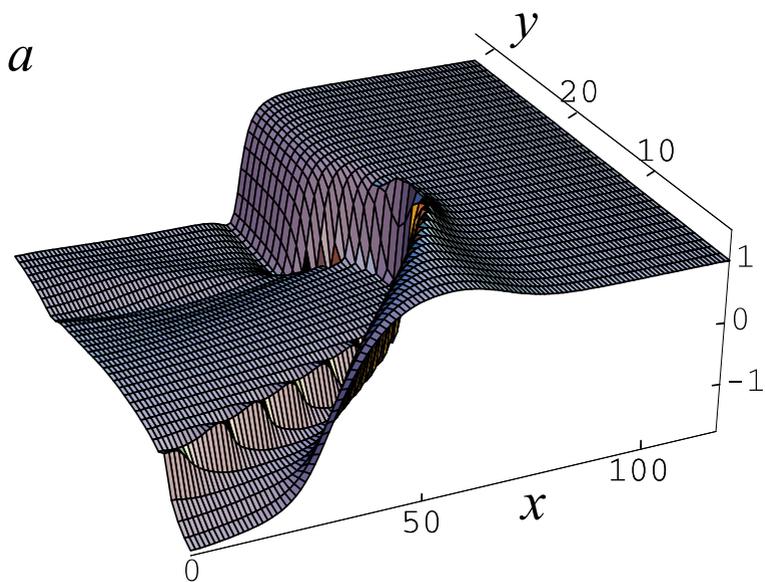


Рис. 2.20. Перестройка решения

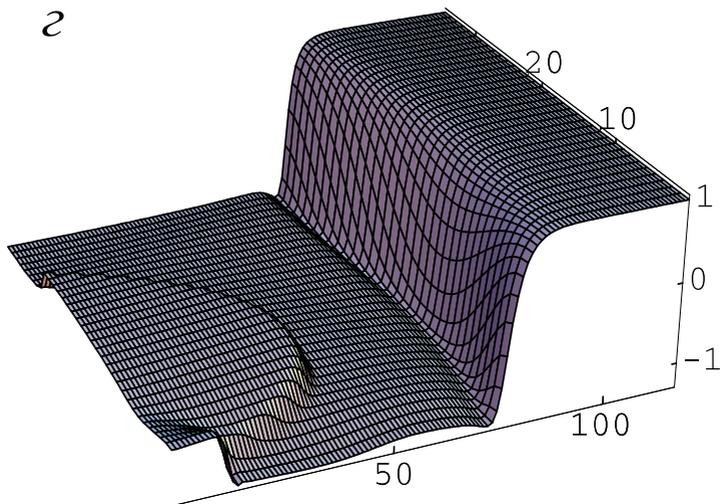
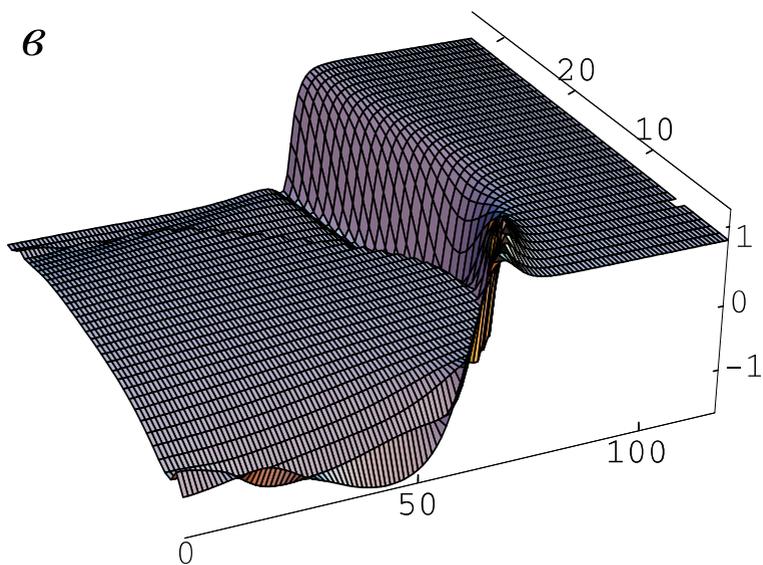


Рис. 2.20 (продолжение)

на рис. 2.19 а-г ($t = 0.18, 0.6, 1.8, 2.7$), где изображены графики функции $u_1(x, y)$ в последовательные моменты времени. На рис. 2.19 а видно начало формирования асимптотики решения второго типа на слоях $j = 8, 9, 10$. На рис. 2.19 б асимптотика решения второго типа формируется на слоях $j = 7 - 14$. На рис. 2.19 в, г виден процесс завершения формирования асимптотики решения второго типа. Таким образом, при $d = 30$ и наличии одинакового количества слоев, представляющих асимптотику решения первого типа, и слоев с асимптотикой второго типа, формируется асимптотика решения второго типа, т.е. исходная метастабильная ударная волна перестает существовать. Если изменить постановку начально-краевой задачи и в начальный момент времени задать число слоев с асимптотикой первого типа существенно большее числа слоев с асимптотикой второго типа, и при этом не изменять остальные параметры задачи, то на всех слоях сформируется асимптотика первого типа, т.е. изучаемая метастабильная ударная волна восстановится.

На рис. 2.20 а-г представлена эволюция решения начально-краевой задачи, имеющей существенно больший характерный размер L , чем начально-краевая задача на рис. 2.19, и существенно больший параметр $d = 100$. При $t = 0$ в четырех последовательных слоях ($y_j = \text{const}, y_{j+1} = y_j + \Delta y, j = 1, \dots, 4$) задаются начальные условия (2.6а), затем 10 последовательных слоев ($j = 5, \dots, 14$) соответствуют переходной зоне с начальными условиями (2.6б) и двадцать один слой ($j = 15, \dots, 35$) соответствуют начальным условиям (2.6с) (невозмущенная метастабильная ударная волна), $\Delta y = 2$. На рис. 2.20 а-в ($t = 0.6, 1.2, 2.4$) можно наблюдать процесс формирования асимптотики первого типа (метастабильная ударная волна, функция $u_1(x, y)$). В последующий момент времени $t = 3.63$ (рис. 2.20 г) видно, что метастабильная ударная волна сформировалась при всех значениях y .

Была решена эта же начально-краевая задача при $d = 200, 1000$ ($M = 2.35 * 10^{-5}, 1.175 * 10^{-4}$). При этих значениях параметра d метастабильная ударная волна с течением времени восстанавливалась при всех значениях y . Таким образом, показано, что решение задачи, когда ширина области с невозмущенной метастабильной ударной волной достаточно велика, всегда приводит к восстановлению метастабильной ударной волны при любом значении параметра d .

Аналогичные начально-краевые задачи рассчитывались при разных значениях параметров анизотропии (g_1, g_2), разной величине отрезка характеризующего размер неоднородности y_p , разных положениях начальной точки A и разных положениях точки B , описывающей левое граничное условие. В частности, изучались начально-краевые задачи для тех начальных параметров, для которых решение задачи о взаимодействии метастабильной ударной волны с одномерным возмущением п. 2.5 [45] показало, что распад этой волны носит необратимых характер, т.е. исходная метастабильная ударная волна не восстанавливается с течением времени. Эта же метастабильная ударная волна при взаимодействии с двумерным возмущением восстанавливалась.

Результаты расчетов приводят к выводу, что возмущения, периодические по переменной вдоль фронта метастабильной ударной волны (даже если это возмущения конечной амплитуды), не приводят к распаду метастабильной ударной волны если масштаб L , характеризующий период возмущений вдоль этой волны, велик (или параметр M мал). При взаимодействии метастабильной ударной волны с изолированными возмущениями можно также ожидать ее восстановления. В случае малости L (M – большое число) при определенных условиях может произойти распад метастабильной ударной волны.

Таким образом, продемонстрирована устойчивость метастабильных ударных волн при $\kappa > 0$ и, следовательно, необходимость их рассмотрения как реализующихся. Это заключение оставляет в силе вывод о неединственности решения задачи о распаде произвольного разрыва для упругих сред в случае, когда задача теории упругости рассматривается как предел вязко-упругой задачи при вязкости стремящейся к нулю.

§ 3. Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией

Рассмотрим особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругих композитных средах, в которых длинноволновые возмущения описываются нелинейными гиперболическими уравнениями теории упругости, выражающими законы сохранения. В решениях этих уравнений в процессе их эволюции возникают разрывы. Разрыв в рассматриваемом случае является классическим (или ударной волной) [8], если соотношения, которые удовлетворяются на разрыве, следуют из законов сохранения и выполняются условия эволюционности. Если разрыв в рамках принятой модели обладает структурой, то он называется допустимым. Разрыв будем называть неклассическим (или особым) если кроме законов сохранения на фронте выполняются дополнительные соотношения, которые обеспечивают существование структуры фронта, и, в частности, определяют скорость его распространения. Дополнительные соотношения и, следовательно, поведение разрывов и решений, содержащих разрывы, зависят от физических процессов внутри структуры. При этом, в зависимости от принятой модели мелкомасштабных процессов, не все классические разрывы могут оказаться допустимыми.

Влияние дисперсии (наряду с имеющейся диссипацией), приводит к тому, что множество допустимых разрывов приобретает сложное строение. Появляется множество неклассических, особых разрывов с дополнительными соотношениями на них. Часть классических разрывов (ударных волн) оказывается недопустимыми. Если в качестве модели крупномасштабных явлений принять гиперболическую систему уравнений нелинейной теории упругости, выражающих законы сохранения, и связанную с ней систему соотношений на разрывах с дополнительным требованием, что разрывы принадлежат множеству допустимых разрывов, то, как показано [25], [49]–[52] при изучении нелинейных волн в стержнях и в магнетиках, а также для некоторой модели композитной среды, решения автомодельных задач для выделенных областей исходных параметров оказываются неединственными. Число решений в этих областях зависит от относительного влияния дисперсии внутри структуры разрывов по сравнению с вязкостью и неограниченно растет с ростом этого влияния. При этом

важно именно относительное влияние, а коэффициенты в вязких и дисперсионных членах уравнений могут быть сколь угодно малы. Ниже численно изучаются автомодельные асимптотики в областях неединственности как результат эволюции нестационарных решений полной системы уравнений в частных производных.

Для описания явлений крупного масштаба принята система уравнений (1.3) и связанная с ней система соотношений на разрывах (1.8). Классические разрывы (ударные волны) и волны Римана описаны в § 1.

Далее изучаются решения системы уравнений, описывающей поведение нелинейных волн в одной из моделей упругих композитных материалов, т.е. в упругой среде, обладающей внутренней структурой, связанной с периодичностью свойств среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_1} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right) = -m \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mu, m = \text{const}, \quad \mu \geq 0, \quad m/\mu \gg 1.$$

Система (3.1) отличается от (2.1) тем, что учитывает дисперсионные эффекты, которые существенны при описании структуры разрывов. Члены, описывающие дисперсию, содержат множитель m . Члены, содержащие μ , обуславливают диссипацию. При написании системы (3.1) предположено, что при малой нелинейности члены, описывающие дисперсию и диссипацию сохраняют тот же вид, что и в линейных волнах. Вид дисперсионных членов в (3.1) соответствует одному из вариантов строения композитов, поведение которых исследовано в [23].

Множители m и μ стоят при старших производных в системе (3.1), поэтому при изучении крупномасштабных явлений эта система будет совпадать с системой (1.3). Вид функции $R(u_1, u_2)$ предполагается таким же, как и в системе (1.3) (см. (1.4)).

3.1. Структура разрывов. Для системы уравнений (3.1) разыскиваются решения вида $u_\alpha = u_\alpha(\xi)$, $\xi = -x + Wt$, $W = \text{const}$ – скорость разрыва такие, что при $\xi \rightarrow -\infty$ величины u_α стремятся к значениям U_α , соответствующие состоянию перед разрывом, а при $\xi \rightarrow +\infty$ они принимают значения u_α , соответствующие

состоянию за разрывом, т.е. состоянию, принадлежащему некоторой точке ударной адиабаты. При $\mu \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ и $m/\mu = \text{const}$ эти решения переходят в разрывы, изменение величин в которых совпадает с изменением величин в соответствующем квазипоперечном разрыве.

Для функций $u_\alpha(\xi)$ имеем систему второго порядка двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Один раз проинтегрировав по ξ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \mu \frac{du_1}{d\xi} + m \frac{du_2}{d\xi} = -\frac{\partial Z}{\partial u_1}, \\ -m \frac{du_1}{d\xi} + \mu \frac{du_2}{d\xi} = -\frac{\partial Z}{\partial u_2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$Z(u_1, u_2) = -R(u_1, u_2) + \frac{1}{2}W(u_1^2 + u_2^2) + Q_1 u_1 + Q_2 u_2, \\ Q_\alpha = U_\alpha(f - W + (-1)^\alpha g - \kappa(U_1^2 + U_2^2)).$$

Заметим, что

$$\frac{dZ}{d\xi} = -\mu \left[\left(\frac{du_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{d\xi} \right)^2 \right] < 0.$$

Система (3.2) с точностью до обозначений совпадает с системой, описывающей структуру нелинейных электромагнитных волн в слабоанизотропных магнетиках [8, 50].

В [25, 50] при изучении нелинейных волновых процессов, когда при описании структуры разрывов существенны процессы дисперсии и диссипации, было показано, что множество допустимых значений за разрывом u_α существенно зависит от величины соотношения m/μ .

Координаты особых точек системы (3.2) определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае $m/\mu \gg 1$ интегральные кривые системы (3.2) близки к линиям уровня $Z(u_1, u_2) = \text{const}$.

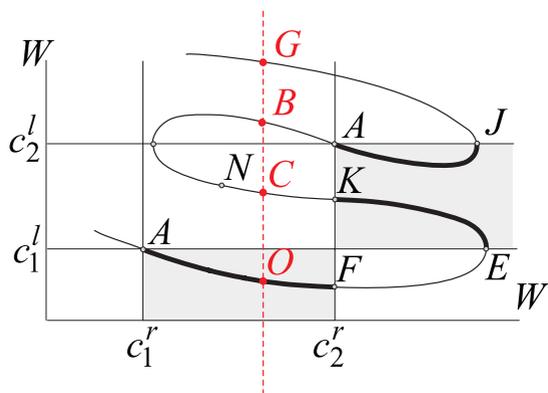
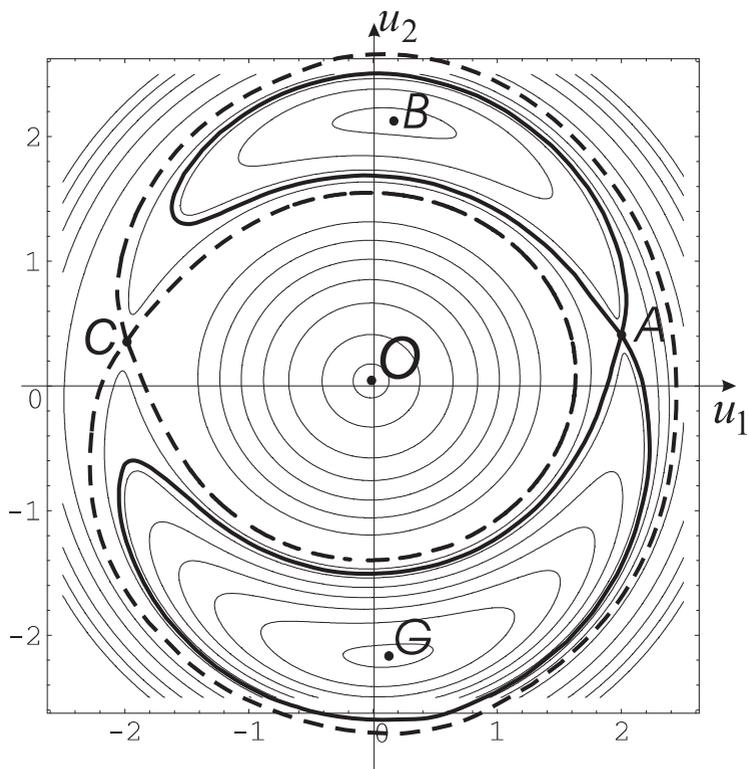
Поведение интегральных кривых для сред с $\kappa > 0$ и сред с $\kappa < 0$ существенно различается.

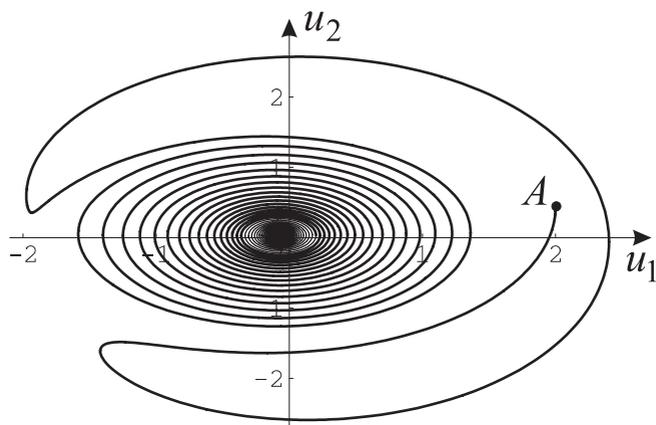
Рассмотрим сначала случай $\kappa > 0$. На рис. 3.1 представлены линии уровня для значений параметров $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = 4$ ($W = -16$ и состояния перед разрывом $U_1 = 2$, $U_2 = 0.4$ (точка A)). На этом же рисунке представлена диаграмма эволюционности на которой отмечены стационарные точки при выбранном значении W . Буквами O , C , B , G отмечены одни и те же точки на обоих рисунках 3.1 а, б.

Наибольший интерес представляет интервал изменения скорости $W_N < W < \min(c_2^r, W_E)$ (W_N , W_E – скорости разрывов $A \rightarrow N$ и $A \rightarrow E$ соответственно, см. рис. 1.2 б, г), в котором существует пять особых точек у системы (3.2): начальная точка A – седло, устойчивый фокус O (минимум функции $Z(u_1, u_2)$), седло C и два неустойчивых фокуса B и G (максимумы функции $Z(u_1, u_2)$). При $W > c_2^r$ и $W < W_N$ особых разрывов нет. Заметим, что в случае $W > c_2^r$ особая точка на плоскости u_1, u_2 представляет узел или фокус с выходящими интегральными кривыми. В этом случае невозможно существование особых разрывов, так как для их существования необходимо, чтобы точка A была седлом.

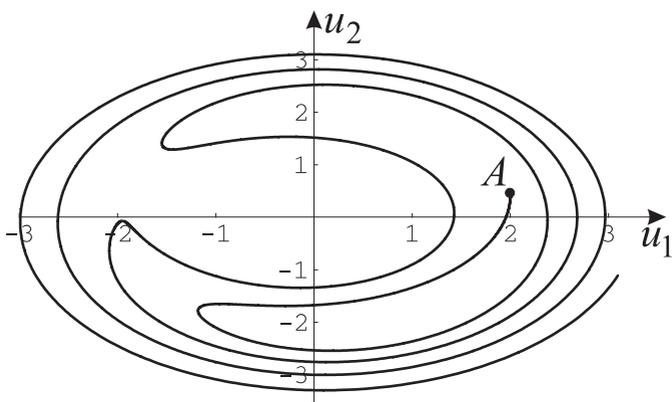
Каждая из двух интегральных кривых, вышедших из точки A , при $\xi \rightarrow +\infty$ должна прийти в одну из особых точек O , C или уйти в бесконечность. Примеры двух характерных стационарных структур приведены на рис. 3.2 а, б. Приход интегральной кривой в седловую точку C следует рассматривать как исключительный случай, который возможен при специальном дискретном наборе значений скорости $W = W_i^*$.

Интегральные кривые, вышедшие из точки A движутся в сторону уменьшения функции Z пересекая линии $Z = \text{const}$ под малыми (порядка μ/m) углами. Прежде чем любая из двух интегральных кривых пересечет штриховую линию $Z(u_1, u_2) = Z(C)$ (рис. 3.1), она при достаточно малых μ/m сделает много оборотов вокруг жирной сплошной линии ($Z(u_1, u_2) = Z(A)$). При малом последовательном изменении W точка пересечения интегральной кривой и штриховой линии движется по штриховой кривой. Когда упомянутое число оборотов меняется на единицу, точка пересечения обегает всю штриховую линию дважды побывав в точке C . Если точка пересечения интегральной кривой с штриховой линией находится на внутренней части штриховой линии

Рис. 3.1. Линии уровня ($\kappa > 0$)



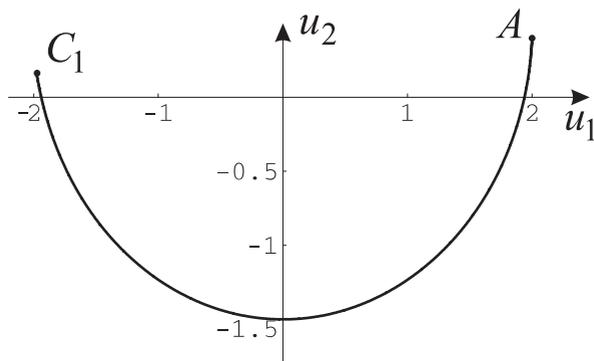
$$W = -16.066$$

$$a$$


$$W = -15.94$$

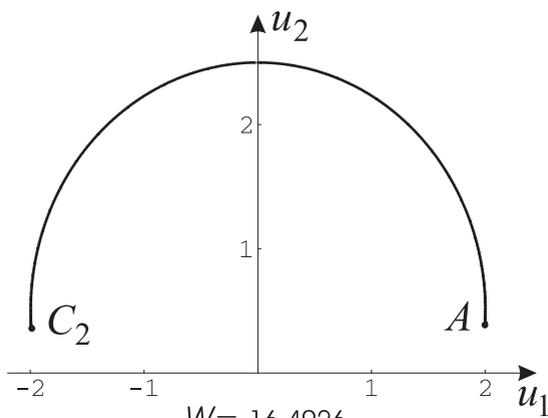
$$b$$

Рис. 3.2. Стационарные структуры разрывов ($\kappa > 0$)



$$W = -16.517$$

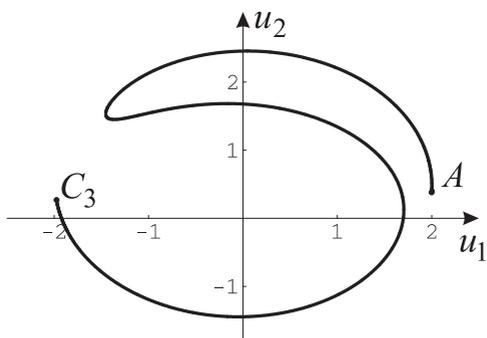
a



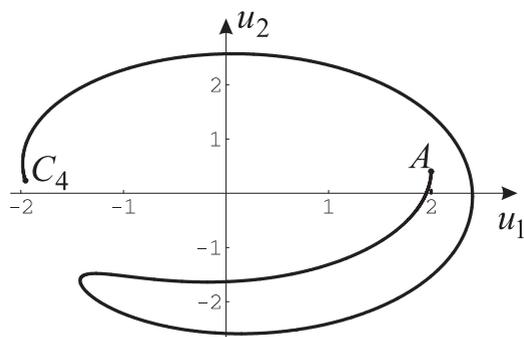
$$W = -16.4926$$

б

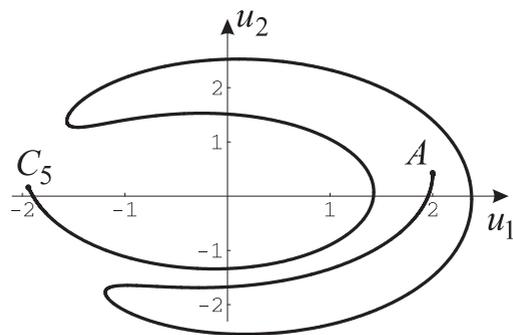
Рис. 3.3. Стационарные структуры особых разрывов ($\kappa > 0$)



$$W = -16.3296$$



$$W = -16.067$$



$$W = -15.9455$$

Рис. 3.4. Стационарные структуры особых разрывов ($\kappa > 0$)

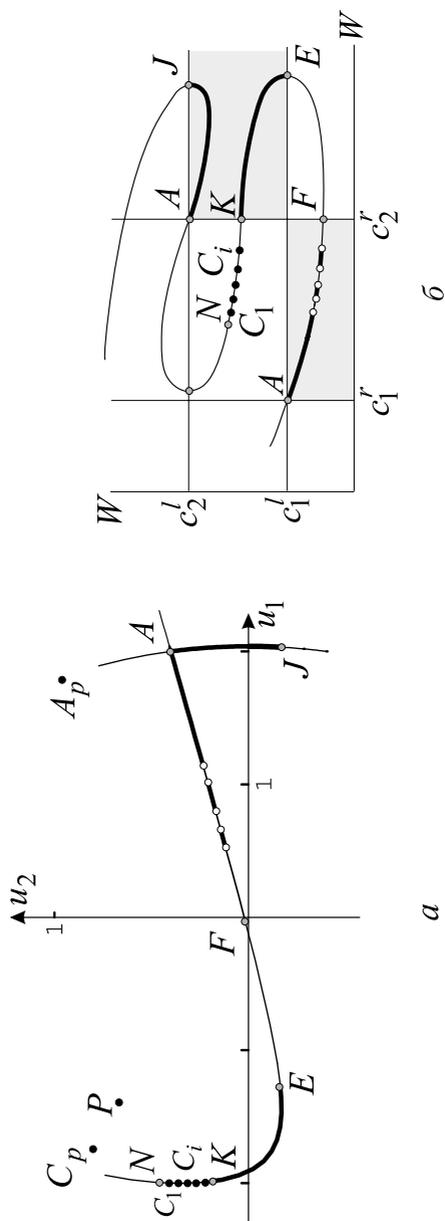


Рис. 3.5. Допустимая часть ударной адиабаты для волн в композитных материалах: жирные кривые и черные точки ($\kappa > 0$)

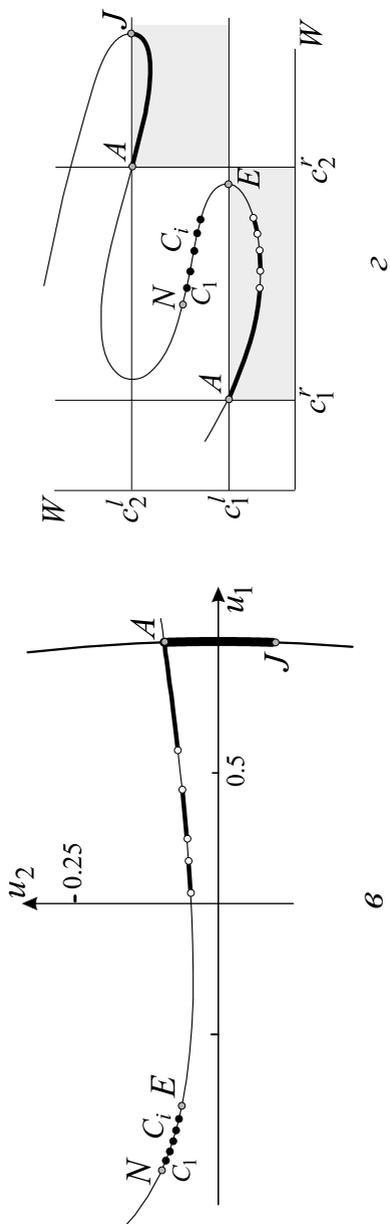


Рис. 3.5 (продолжение)

(окружающей точку O), то эта интегральная кривая далее приходит в точку O , представляя структуру медленной ударной волны $A \rightarrow O$. При переходе точки пересечения интегральной кривой, вышедшей из точки A , и штриховой линии уровня с внешней части этой линии уровня (проходящей через точку C и окружающей точки B и C) на внутреннюю (окружающую только точку O), рассматриваемая интегральная кривая приходит в точку C и описывает структуру особого разрыва $A \rightarrow C$ (это возможно для выделенных значений W). Если интегральная кривая пересекает внешнюю часть штриховой кривой, то она уходит в бесконечность и не соответствует структуре какого-либо разрыва.

На рис. 3.3, 3.4 приведены примеры стационарных структур особых разрывов, полученные численно для значений параметров диссипации $\mu = 0.05$, дисперсии $m = 3$ ($m/\mu = 60$) и прежних значений $U_1 = 2$, $U_2 = 0.4$, $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = 4$. На рис. 3.3 представлены простые структуры особых разрывов, на рис. 3.4 – сложные структуры для больших значений $W = W^*$, демонстрирующие различные виды обхода выделенной на рис. 3.1 “восьмерки”.

При выбранном отношении $m/\mu = 60$ в результате численного счета найден набор значений набор W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 5$), при которых одна из двух возможных интегральных кривых, вышедших из начальной седловой точки A в противоположных направлениях, приходит в седловую точку C_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Точки C_i соответствуют особым разрывам (рис. 3.5). Эти выделенные значения W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 5$) определяют концы отрезков, соответствующих допустимым разрывам, на эволюционной части ударной адиабаты. Допустимыми считаются разрывы имеющие стационарную структуру при наличии вязкости и дисперсии. На рис. 3.5 а, б, в, г представлены фрагменты ударных адиабат и диаграммы эволюционности для тех же параметров f , g , κ , U_α , что и кривые, изображенные на рис. 1.2 и описанные в п. 1.2. На рис. 3.5 а, в на графиках ударных адиабат и на рис. 3.5 б, г на диаграммах эволюционности жирными линиями и черными точками отмечены возможные состояния за допустимыми разрывами при начальном состоянии A . Эволюционные отрезки AF (рис. 3.5 а, б) и AE (рис. 3.5 в, г) ударных адиабат разбиваются на участки, причем часть из них не отвечает допустимым разрывам. На априорно неэволюционных отрезках KN (рис. 3.5 а, б) и EN (рис. 3.5 в, г) отмечены точки C_i , которые отвечают особым разрывам. Особые

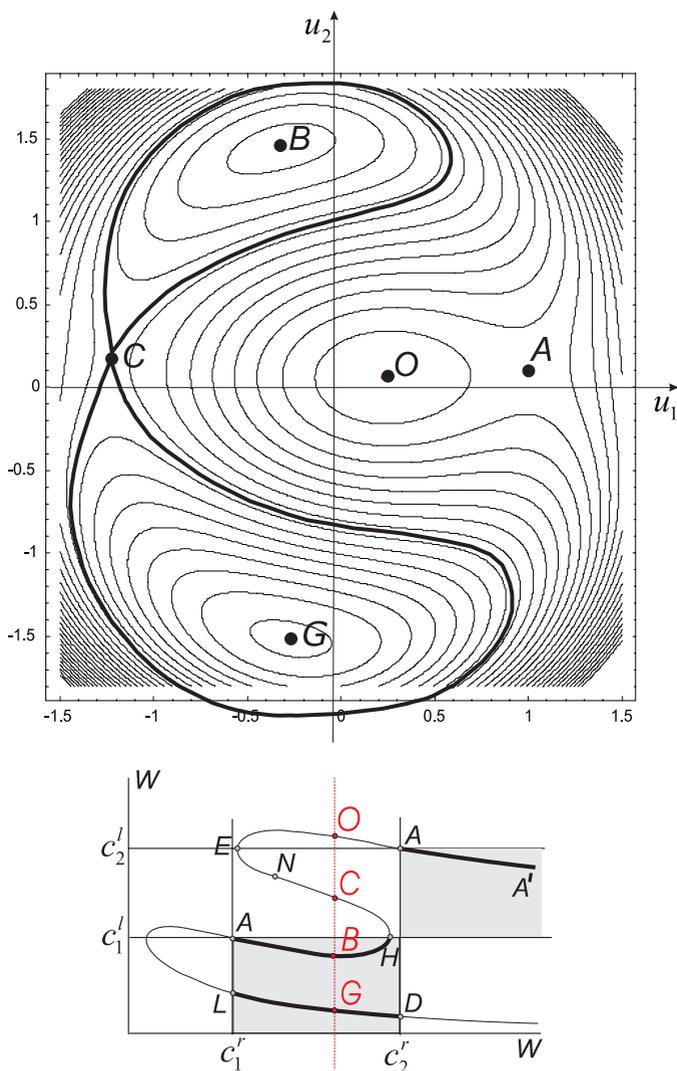
разрывы оказываются эволюционными в силу дополнительного условия $W = W_i^*$.

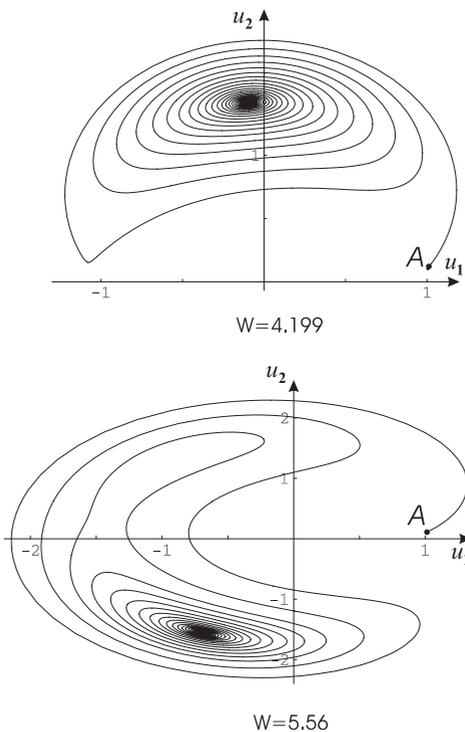
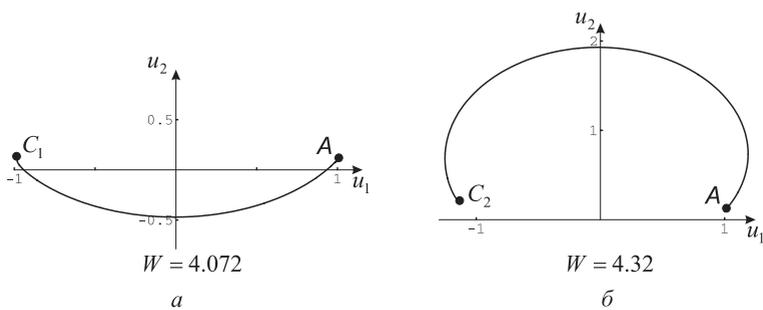
Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых в случае $\kappa < 0$. На рис. 3.6 представлены линии уровня функции $Z(u_1, u_2)$ для значений параметров $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = -2$, ($W = 4.6$ и состояния перед разрывом $U_1 = 1$, $U_2 = 0.1$ (точка A)). На этом же рисунке представлена диаграмма эволюционности на которой отмечены стационарные точки при выбранном значении W .

Наибольший интерес представляет интервал изменения скорости $W_E < W < W_H$ (W_E, W_H – скорости разрывов $A \rightarrow E$ и $A \rightarrow H$ соответственно, см. рис. 1.3), в котором существует пять особых точек у системы (3.2): начальная точка A – седло, два устойчивых фокуса B и G (минимумы функции $Z(u_1, u_2)$), седло C и неустойчивый фокус O (максимум функции $Z(u_1, u_2)$).

Каждая из двух интегральных кривых, вышедших из точки A , при $\xi \rightarrow +\infty$ должна прийти в одну из особых точек B, G, C . На рис. 3.7 представлены примеры стационарных структур, одна из которых приходит в точку B ($W = 4.199$), вторая в точку G ($W = 5.56$). Приход интегральной кривой в седловую точку C следует рассматривать как исключительный случай, который возможен при специальном дискретном наборе значений скорости $W = W_i^*$.

Число оборотов, которые сделает интегральная кривая вокруг выделенной на рис. 3.6 линии уровня в виде жирной “восьмерки” прежде чем остановится в стационарной точке C , зависит от угла наклона интегральной кривой по отношению к линии уровня. Этот угол согласно предыдущему имеет порядок величины μ/m . Если разность $Z(A) - Z(C)$ конечна, а величина μ/m мала, то число оборотов велико. Достаточно малого изменения W (порядка μ/m), чтобы число оборотов вокруг “восьмерки” изменилось на единицу. При этом точка пересечения интегральной кривой и выделенной восьмерки делает полный оборот по восьмерке, дважды побывав в точке C . Значения W^* , при которых интегральные кривые соединяют точки A и C разделены малыми интервалами порядка μ/m . Каждое значение W^* соответствует точке на ударной адиабате. Эта точка лежит на априорно неэволюционной части ударной адиабаты, но поскольку ей соответствует выделенное значение W^* , которое следует рассматривать как дополнительное соотношение на разрыве, то разрыв $A \rightarrow C$ эволюционный. Разрывы такого типа называем особыми.

Рис. 3.6. Линии уровня ($\kappa < 0$)

Рис. 3.7. Стационарные структуры разрывов ($\kappa < 0$)Рис. 3.8. Стационарные структуры особых разрывов ($\kappa < 0$)

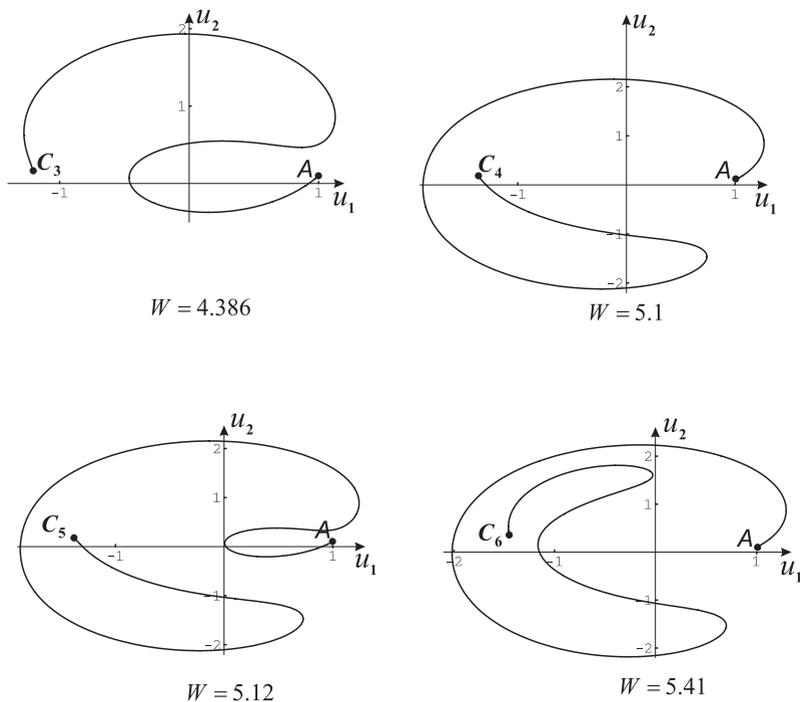


Рис. 3.9. Стационарные структуры особых разрывов ($\kappa < 0$)

На рис. 3.8, 3.9 приведены примеры стационарных структур особых разрывов, полученные численно для значений параметров диссипации $\mu = 0.05$, дисперсии $m = 1.5$ ($m/\mu = 30$) и прежних значений $U_1 = 1$, $U_2 = 0.1$, $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = -2$. На рис. 3.8 представлены простые структуры особых разрывов, на рис. 3.9 – сложные структуры для больших значений $W = W^*$, демонстрирующие различные виды обхода выделенной на рис. 3.6 “восьмерки”.

При выбранном отношении $m/\mu = 30$ в результате численного счета найден набор значений набор W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 7$), при которых одна из двух возможных интегральных кривых, вышедших из начальной седловой точки A в противоположных направлениях, приходит в седловую точку C_i ($i = 1, 2, \dots, 7$). Точки C_i соответствуют особым разрывам (рис. 3.10). Выделенные значения W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 7$) определяют концы отрезков, соответствующие

ющих допустимым разрывам, на априорно эволюционной части ударной адиабате. На рис. 3.10 а на графике ударной адиабаты и на рис. 3.10 б на диаграмме эволюционности жирными линиями и черными точками отмечены возможные состояния за допустимыми разрывами при начальном состоянии A . Эволюционные отрезки AH и LD ударной адиабаты разбиваются на участки, причем часть из них не отвечает допустимым разрывам.

При увеличении значения m/μ число отдельных точек и отрезков ударной адиабаты, соответствующих допустимым разрывам, увеличивается.

В рассмотренных выше случаях координаты точки A выбраны так, что эта точка находится вблизи оси u_1 . Изучение картины интегральных кривых при увеличении координаты u_2 точки A показало, что наличие отдельных точек C_i возможно только при существенном уменьшении значения параметра μ/m .

Отметим, что при $m = 0$, как было показано в § 2, все эволюционные разрывы допустимы.

3.2. Неединственность решений автомодельной волновой задачи. Исследование структуры разрывов конкретизирует крупномасштабную модель (система уравнений (1.3)) определением множества допустимых разрывов. Покажем, что модель, в которой множество допустимых разрывов определяется мелко-масштабными процессами дисперсии и диссипации, не гарантирует единственности решений. Неединственность возникает вследствие присутствия на ударной адиабате множества изолированных точек с выделенными значениями скорости разрыва W_i^* . Эти точки лежат на диаграмме эволюционности внутри прямоугольника $c_1^r \leq W \leq c_2^r$, $c_1^l \leq W \leq c_2^l$ (рис. 3.5 б, в, 3.10 б) и отвечают особым разрывам.

В рамках рассматриваемой модели, описывающей нелинейные волны в композитных средах, для некоторого класса начальных условий решение автомодельной волновой задачи совпадает с решением аналогичной задачи, описываемой той же системой гиперболических уравнений (1.3) в случае, когда множество допустимых разрывов определяется условием априорной эволюционности (детальная картина этих решений получена в [34]). Тем не менее, следует подчеркнуть, что в некоторых областях начальных параметров решение в рамках рассматриваемой в данной работе

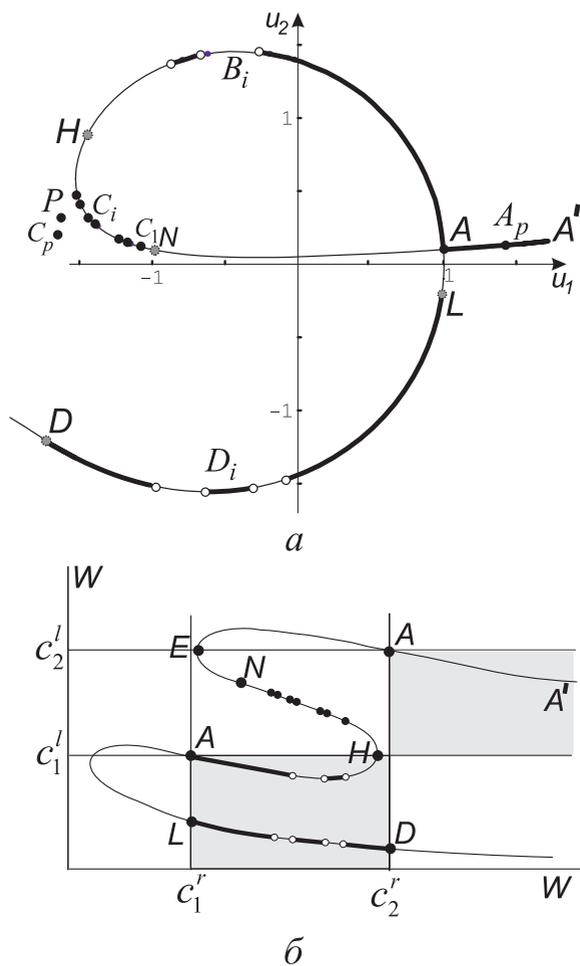


Рис. 3.10. Допустимая часть ударной адиабаты для волн в композитных материалах: жирные кривые и черные точки ($\kappa < 0$)

модели может быть построено только с использованием особых разрывов и не совпадает с решением, полученным в [34].

Рассмотрим пример построения решения автомодельной волновой задачи с использованием особых разрывов. Задача о распаде произвольного разрыва для системы уравнений (3.1) формулируется следующим образом: волны распространяются в области $x > 0$, начальные условия ($t = 0$) при $x > a$ соответствуют координатам точки A на плоскости (u_1, u_2) , а при $0 < x < a$ точке P (рис. 3.5 а, 3.10 а). Быстрые ударные волн или волны Римана имеют ббольшую скорость чем особый разрыв и могут в автомодельной задаче распространяться перед особым разрывом, а медленные волны соответственно позади него.

Одно из решений сформулированной задачи (для сред с $\kappa > 0$) представляет собой следующую последовательность волн: впереди распространяется быстрая простая волна $A \rightarrow A_p$ (рис. 3.5 а), которая переводит состояние A в такую точку A_p , такую что состояние за особым разрывом $A_p \rightarrow C_p$ характеризуется точкой C_p , представляющей состояние перед медленной ударной волной $C_p \rightarrow P$. Медленная ударная волна $C_p \rightarrow P$ распространяется за особым разрывом $A_p \rightarrow C_p$. Очевидно, что подобных решений имеется столько же, сколько выделенных точек C_i на ударной адиабате, соответствующей начальной точке A (в рассматриваемом случае таких точек пять).

Для сред с $\kappa < 0$ пример построения сформулированной задачи о распаде произвольного разрыва состоит в следующей последовательности волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_p$ (рис. 3.10 а), особый разрыв $A_p \rightarrow C_p$, медленная ударная волна $C_p \rightarrow P$. Подобных решений имеется столько же, сколько выделенных точек C_i на ударной адиабате, соответствующей начальной точке A (в рассматриваемом случае 7).

Отметим, что в отличие от разрывов, удовлетворяющих условиям априорной эволюционности, следующих из предположения об отсутствии дополнительных соотношений на разрывах, особые разрывы могут следовать один за другим, так как состояние за особым разрывом представляет собой состояние по которому с меньшей скоростью может распространяться другой особый разрыв. Поэтому наряду с описанными выше могут существовать другие решения, содержащие последовательности особых разрывов.

Качественный анализ решений показывает, что при заданном начальном состоянии справа и различных состояниях слева от разрыва существует конечная область граничных значений на плоскости u_1, u_2 , для которых решение автомодельной задачи неединственно. Наличие множества допустимых особых разрывов приводит к множественной неединственности решений задачи. Более детальное исследование решений и вопроса отбора решений в области неединственности проводится ниже на основе численного решения обобщенной задачи о распаде произвольного разрыва для системы уравнений (3.1).

3.3. Построение автомодельных асимптотик в области неединственности как предела нестационарных решений системы уравнений в частных производных. Обобщенную задачу о распаде произвольного разрыва сформулируем следующим образом: для системы уравнений (3.1) начальные условия при $t = 0$ задаются в виде:

$$u_\alpha = \begin{cases} u_\alpha^l & \text{при } x < a, \\ u_\alpha^0(x) & \text{при } a \leq x \leq b, \\ u_\alpha^r & \text{при } b < x, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$a, b, u_\alpha^l, u_\alpha^r = \text{const.}$$

Функции $u_\alpha^0(x)$ определяют решение сформулированной задачи о распаде произвольного разрыва, в том числе, как будет показано ниже, ту или другую автомодельную асимптотику при $t \rightarrow \infty$.

Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (3.1), для которых описанные в п. 1.3 автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \rightarrow \infty$. Уравнения (3.1) были записаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, к которым сначала применен метод Ньютона, затем метод матричной прогонки [42]. Расчет проводился в области $t \geq 0, 0 \leq x \leq x^r$, с неподвижными правой и левой границами.

Волны, содержащиеся в решении, обладают разными скоростями распространения, поэтому с увеличением времени t между отдельными возмущениями будут появляться отрезки, длина которых увеличивается с возрастанием t , соответствующие волнам Римана или постоянным значениям u_1, u_2 , а структуры ударных

волн при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к стационарным. В силу этого для идентификации волн нужно получить решение при достаточно больших временах t . В связи с этим для расчетов необходимо брать достаточно большой отрезок оси x , чтобы влияние границ не исказило решение.

Прежде проведения расчетов автомодельных задач численно было проведено исследование устойчивости стационарных структур и, в частности, структур особых разрывов по отношению к различным одномерным возмущениям. С этой целью решались следующие начально-краевые задачи для системы (3.1): правые граничные условия u_α^r (при $x = x^r, t \geq 0$) соответствовали координатам начальной точки A , левые граничные условия u_α^l (при $x = 0, t \geq 0$) соответствовали координатам точки C_i , в качестве начального условия задавались различные возмущения функций $u_\alpha^0(x)$, причем функции $u_\alpha^0(x)$ представляли собой решение системы (3.2) для данных значений u_α^r и скорости W^* , соответствующей выбранной точке C_i . Возмущения $\Delta u_\alpha(x)$ задавались перед исследуемой стационарной структурой. В зависимости от амплитуды и ширины возмущения решение в виде стационарной структуры восстанавливалось с ростом времени либо распадалось на систему волн. Численные эксперименты показали, что стационарные структуры особых разрывов устойчивы по отношению к возмущениям не только малой, но и конечной амплитуды. В случае, когда возмущения были так велики, что происходил распад исходной волны, с течением времени формировалось решение, состоящее из последовательности волн: быстрая простая или ударная волна $A \rightarrow A_p$, особый разрыв $A_p \rightarrow C_1$ (точка C_1 – расположена рядом с точкой N рис. 3.5 а, 3.10 а) и движущаяся с меньшей скоростью медленная простая или ударная волна. Волна $A \rightarrow C_1$ во всех проведенных численных экспериментах восстанавливалась после взаимодействия с любыми возмущениями.

Обобщенная задача о распаде произвольного разрыва решалась для различных начальных данных (3.3). Ниже описаны результаты численного решения начально-краевой обобщенной задачи о распаде произвольного разрыва при различных начальных данных. Первые три примера решены для сред с $\kappa > 0$, последующие четыре примера (4-7) для сред с $\kappa < 0$.

Примеры 1–3 решались при следующих значениях параметров: $m = 3, \mu = 0.05, f = 1, g = 1, \kappa = 4, u_1^r = 2, u_2^r = 0.4$ (точка A на рис. 3.11–3.13), различных значений u_α^l и различных $u_\alpha^0(x)$.

Пример 1. $u_1^l = -2$, $u_2^l = 0.4$ (точка P на рис. 3.11 в), функции $u_\alpha^0(x)$ представляют собой монотонный переход от значений u_α^l к значениям u_α^r (схема на рис. 3.11 а).

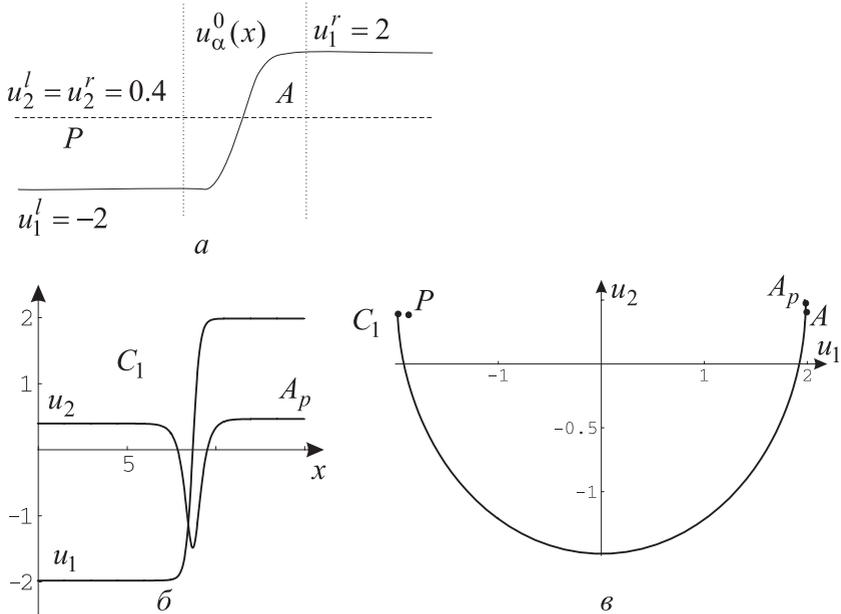


Рис. 3.11. Последовательность волн, представляющих решение *при-*мера 1 ($\kappa > 0$)

При больших значениях времени $T \sim 2$ (когда волны успели разойтись) решение представляет последовательность волн: быстрая простая волна $A \rightarrow A_p$ (рис. 3.11 в), особый разрыв $A_p \rightarrow C_1$, медленная ударная волна $C_1 \rightarrow P$. Особый разрыв, входящий в состав решения, имеет простую структуру, изображенную на рис. 3.3 а. На рис. 3.11 представлен график особого разрыва в зависимости от координаты x в фиксированный момент времени t (рис. 3.11 б) и на плоскости (u_1, u_2) (рис. 3.3 в).

Пример 2. $u_1^l = -1.7$, $u_2^l = 1$ (точка P на рис. 3.12 в), функции $u_\alpha^0(x)$ представляют монотонный переход от значений u_α^l к значениям u_α^r (рис. 3.12 а).

Решение, представленное на рис. 3.12 б, в, состоит из последовательности волн: быстрая простая волна $A \rightarrow A_p$, особый разрыв

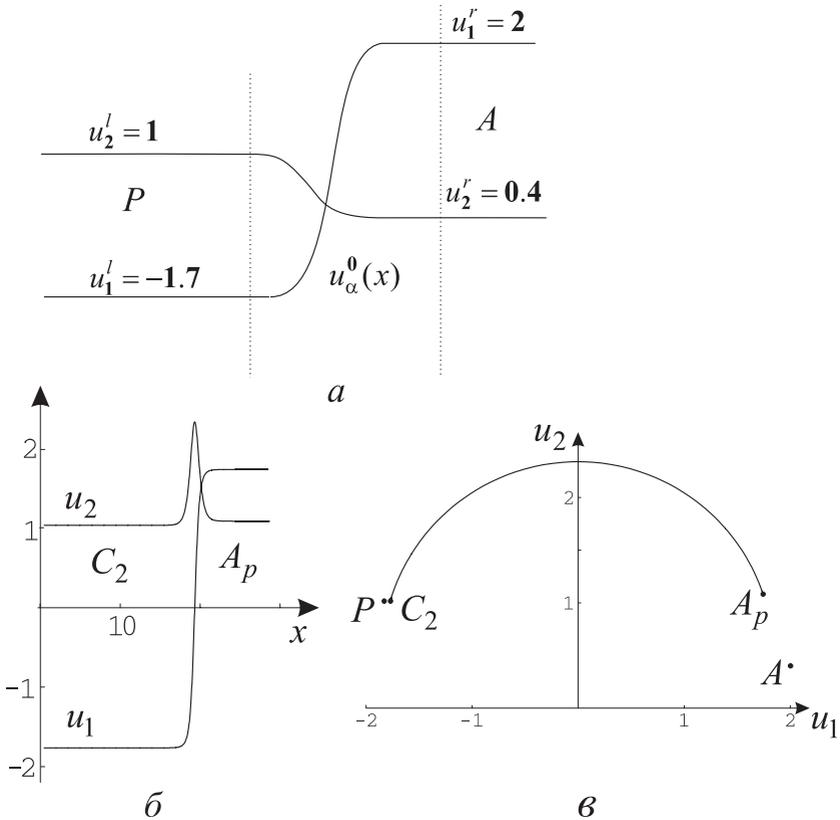


Рис. 3.12. Последовательность волн, представляющих решение примера 2 ($\kappa > 0$)

$A_p \rightarrow C_2$, медленная простая волна $C_2 \rightarrow P$. Структура особого разрыва соответствует простой структуре, изображенной на рис. 3.3 б.

Пример 3. $u_1^l = -2$, $u_2^l = 0.4$ (координаты точки P (рис. 3.13) точно такие, как и в примере 1), функции $u_\alpha^0(x)$ представлены на рис. 3.13 а.

Полученная асимптотика представляет собой последовательность волн: быстрая простая волна, последовательность трех особых разрывов с простой структурой и медленная ударная вол-

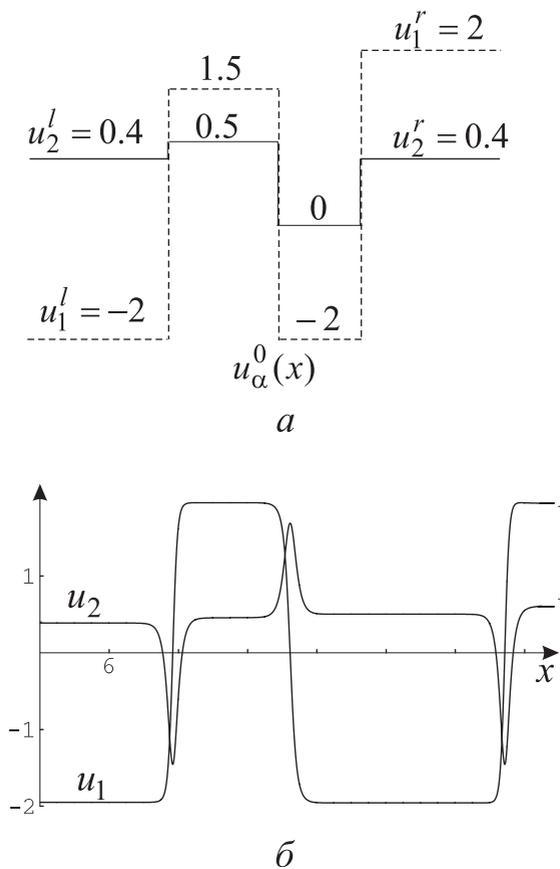


Рис. 3.13. Последовательность волн, представляющих решение примера 3 ($\kappa > 0$)

на. Последовательность трех особых разрывов, имеющих простые структуры, изображена на рис. 3.13 б.

В примерах 1 и 3 взяты одинаковые граничные условия, а функции $u_\alpha^0(x)$ различны. Полученные решения различны и содержат разное число особых разрывов.

Примеры 4-7 решались при следующих значениях параметров: $m = 1.5$, $\mu = 0.05$, $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = -2$, $u_1^r = 1$, $u_2^r = 0.1$ (точка A на рис. 3.11–3.13), различных значений u_α^l и различных $u_\alpha^0(x)$.

Пример 4. $u_1^l = -1.2$, $u_2^l = 0.4$ (точка P на рис. 3.14 в), функции $u_\alpha^0(x)$ представляют собой монотонный переход от значений u_α^l к значениям u_α^r (схема на рис. 3.14 а).

На рис. 3.14 в представлено решение при больших значениях времени $T \sim 2$ (когда волны успели разойтись) на плоскости u_1 , u_2 и изменение функций u_1 и u_2 в зависимости от координаты x в фиксированный момент времени t (рис. 3.14 б). Решение представляет последовательность волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_p$, особый разрыв $A_p \rightarrow C_1$, медленная ударная волна $C_1 \rightarrow P$. Особый разрыв имеет простую структуру, изображенную на рис. 3.8 а.

Пример 5. $u_1^l = -1.4$, $u_2^l = 1.4$ (точка P на рис. 3.15), функции $u_\alpha^0(x)$ представляют монотонный переход от значений u_α^l к значениям u_α^r .

Решение, представленное на рис. 3.15, состоит из последовательности волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_p$, особый разрыв $A_p \rightarrow C_2$, медленная ударная волна $C_2 \rightarrow P$. Структура особого разрыва соответствует простой структуре, изображенной на рис. 3.8 б.

Пример 6. $u_1^l = -1.4$, $u_2^l = 1.4$ (точка P на рис. 3.16), функции $u_\alpha^0(x)$ представлены на схеме 3.16 а.

Решение, представленное на рис. 3.16, состоит из последовательности волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_p$, особый разрыв $A_p \rightarrow C_2$, особый разрыв $C_2 \rightarrow C'_1$ (этот особый разрыв имеет простую структуру, изображенную на рис. 3.8 а из начального состояния, соответствующего точке C_2), медленная ударная волна $C'_1 \rightarrow P$.

Пример 7. $u_1^l = -1.2$, $u_2^l = 0.4$ (точка P на рис. 3.17), функции $u_\alpha^0(x)$ представлены на схеме рис. 3.17 а.

Решение состоит из последовательности волн: быстрая ударная волна $A \rightarrow A_p$, последовательность трех особых разрывов

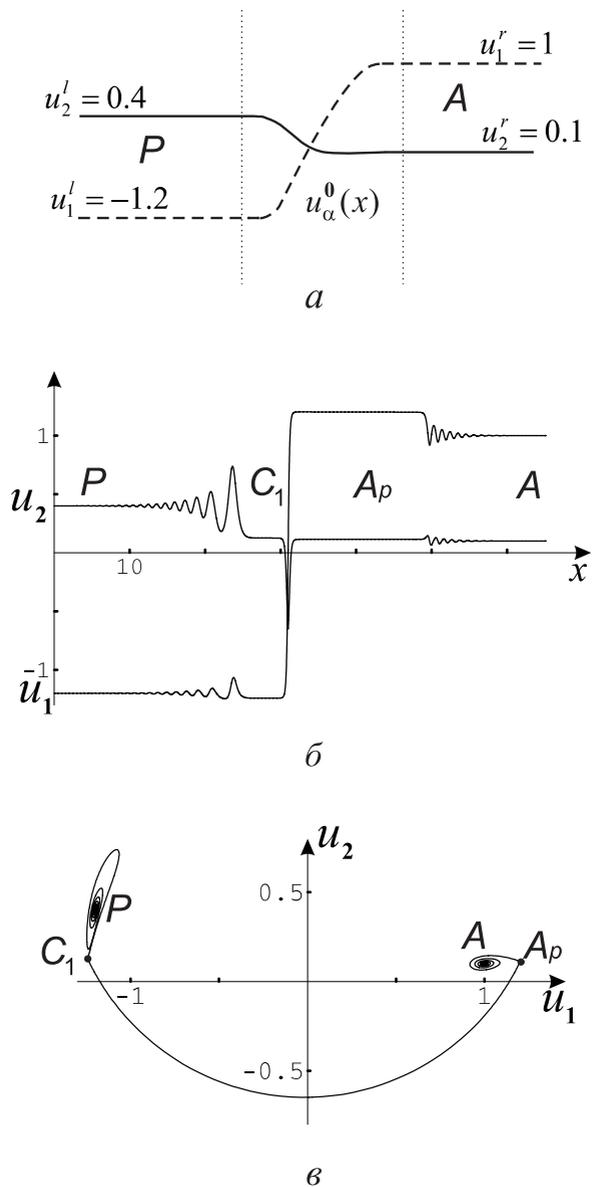


Рис. 3.14. Последовательность волн, представляющих решение *при-*
мера 4 ($\kappa < 0$)

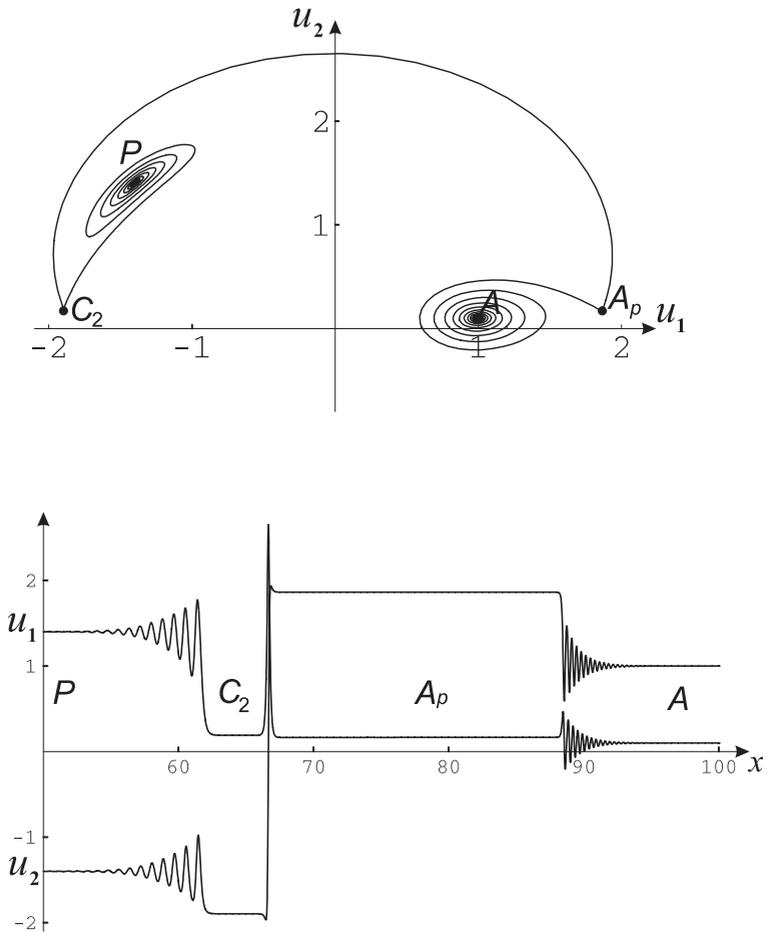
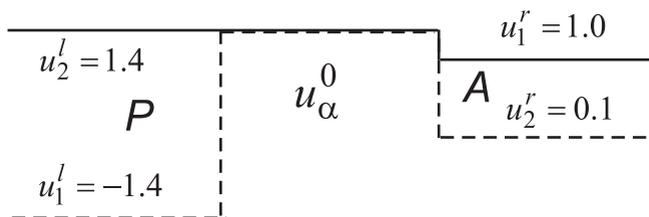
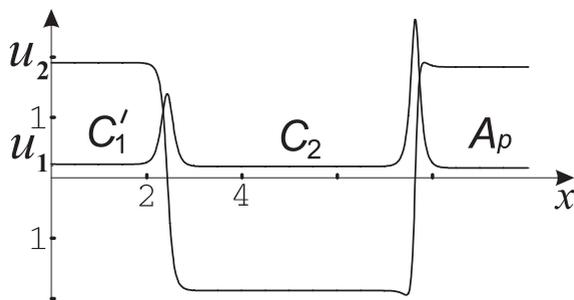


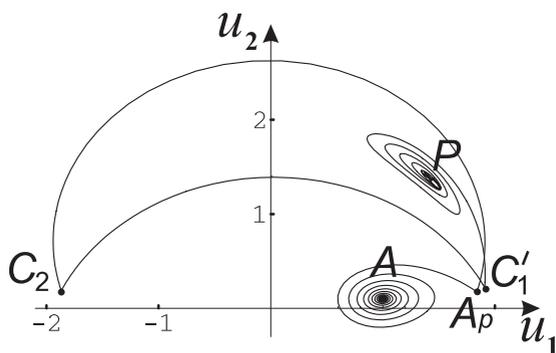
Рис. 3.15. Последовательность волн, представляющих решение примера 5 ($\kappa < 0$)



a



б



в

Рис. 3.16. Последовательность волн, представляющих решение *при-*
мера δ ($\kappa < 0$)

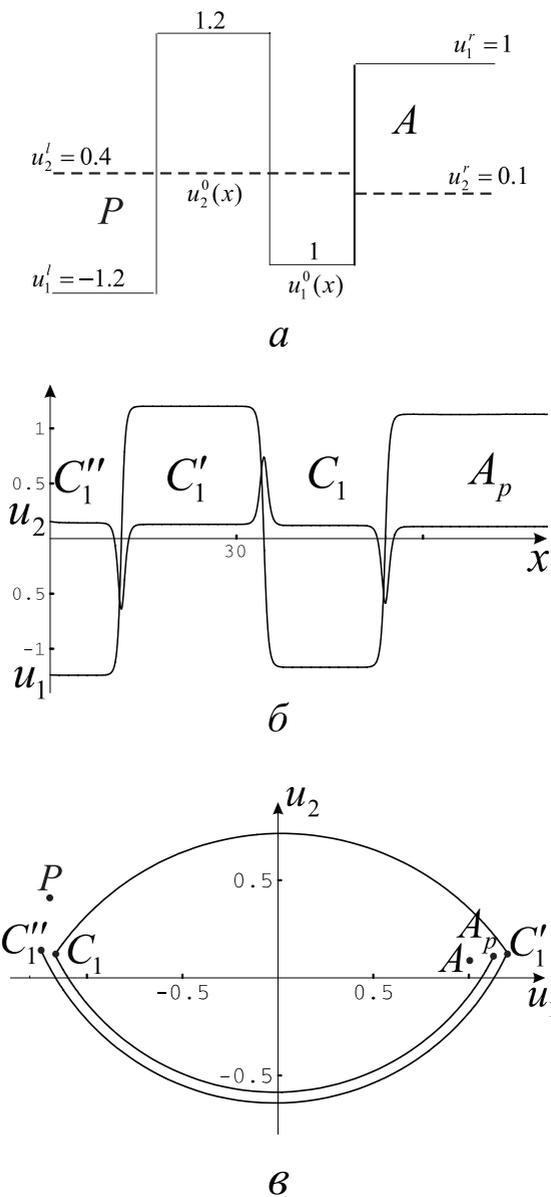


Рис. 3.17. Последовательность волн, представляющих решение примера 7 ($\kappa < 0$)

$A_p \rightarrow C_1$, $C_1 \rightarrow C_1'$ (имеет простую структуру, изображенную на рис. 3.8 а из начального состояния, соответствующего точке C_1), $C_1' \rightarrow C_1''$ (имеет простую структуру, изображенную на рис. 3.3 а из начального состояния, соответствующего точке C_1') и медленная ударная волна $C_1'' \rightarrow P$. На рис. 3.17 б, в представлена последовательность трех особых разрывов с простыми структурами.

В примерах 4 и 7 взяты одинаковые граничные условия, а функции $u_\alpha^0(x)$ различны. Полученные решения различны и содержат разное число особых разрывов. Сравнение начальных функций в этих примерах иллюстрирует возможность получения решений с различным количеством особых разрывов для задач с одинаковыми граничными условиями.

Исследование стационарных структур особых разрывов (п. 3.1) показало, что для различных значений параметров существуют две “простые” структуры (рис. 3.3 ($\kappa > 0$), рис. 3.8 ($\kappa < 0$)) $A \rightarrow C_1$ и $A \rightarrow C_2$. Если начальные условия рассматриваемой обобщенной задачи о распаде произвольного разрыва задавать в виде “ступеньки” (как в примерах 1,2,4,5), то если для выбранных начальных данных не существует решения не содержащего особых разрывов, то решение состоит из последовательности волн, содержащих только простые структуры. Отметим, что даже в том случае, когда правое и левое граничное условие расположены в одной координатной четверти и возможно решение без особых разрывов, тем не менее решение может содержать последовательность особых разрывов. Этот факт иллюстрирует пример 6.

Численные эксперименты проведенные для других наборов параметров m , μ , u_α^r , u_α^l , показали, что отмеченные в предыдущем абзаце закономерности сохраняются.

Для описанной модели имеет место подобие нелинейных явлений, если сохраняются отношения величин m/μ и начальные условия, рассматриваемые как функции $x/\sqrt{\mu}$ (или, если заданы граничные условия, то $t/\sqrt{\mu}$). Поэтому полученные и описанные выше результаты могут рассматриваться как решения тех же уравнений с другим набором параметров.

3.4. Выводы. Исследование проблемы неединственности решений автомодельных волновых задач, описываемых нелинейными гиперболическими уравнениями, проведено в рамках модели, включающей описание мелкомасштабных процессов дисперсии и диссипации внутри структуры разрывов. На основе чис-

ленных экспериментов показано, что все возможные решения могут реализовываться в области неединственности как асимптотики полной системы уравнений, учитывающей мелкомасштабные процессы. Осуществление той или иной асимптотики зависит от мелкомасштабного “сглаживания” начального разрыва.

Асимптотики, содержащие простые стационарные структуры реализуются наиболее часто. Асимптотики с разрывами, имеющими сложные стационарные структуры, имеют малые области притяжения в пространстве функций, задающих “сглаживание”. Асимптотическое решение со сложной структурой может возникнуть только в том случае, если задаваемые начальные функции близки к этому решению.

§ 4. Неклассические разрывы при распространении продольных волн в вязко-упругих стержнях со сложной нелинейностью

В предыдущих параграфах, посвященных нелинейным квазипоперечным волнам в упругих средах при наличии мелкомасштабных эффектов дисперсии и диссипации, показано, что сложное строение множества допустимых ударных волн обусловлено помимо наличия дисперсии и диссипации также некоторыми свойствами гиперболической части уравнений. А именно, нужно, чтобы состояние за разрывом, распространяющимся по заданному состоянию с заданной скоростью не определялось бы однозначно соотношениями, следующими из законов сохранения, а было бы, как минимум трехзначным. Это свойство является случаем общего положения для достаточно сложных систем уравнений.

При распространении продольных волн в упругой среде можно ожидать сложного поведения ударных волн и многозначных решений автомодельных задач только в случае сложной нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Ниже рассматривается простая модель [8, 25, 49, 50] для описания продольных волн в стержнях, обладающая требуемым свойством.

4.1. Разрывы со стационарной структурой. Задача о распаде произвольного разрыва. Если изучать умеренно длинные волны в вязкоупругом стержне, то продольную деформацию $u = \partial w / \partial x$ (w – продольное перемещение точек стержня) можно приближенно рассматривать как функцию x и t , а суммарное по сечению напряжение стержня σ как функцию u . Уравнение, описывающее в этом случае распространение продольных волн, имеет вид [50]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \quad (4.1)$$

Здесь x – лагранжева координата. Член с β^2 представляет главное проявление дисперсии, возникающей за счет слабой неоднородности движений. Для круглых стержней $\beta = \nu r$, где ν – коэффициент Пуассона, r – радиус стержня [24]. Коэффициенты α и β для волн малой амплитуды принимаются постоянными.

При малой нелинейности из уравнения (4.1) можно получить независимые уравнения для волн, распространяющихся в каждую сторону, как это делается при выводе уравнения Бюргера или Кортевега–де Вриза. Для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (4.2)$$

$$\mu = \frac{1}{2}\alpha, \quad m = \frac{1}{2}c_0\beta^2, \quad \varphi(u) = \int c(u) du, \quad c(u) = \sqrt{\frac{d\sigma}{du}}.$$

Здесь $c_0(u)$ – некоторое среднее значение c в интервале изменения u . Для дальнейшего исследования будут представлять интерес функции, имеющие две точки перегиба, так как именно в этом случае имеется неединственность решений уравнения (4.2). При этом функция $\sigma(u)$ должна также иметь так же две точки перегиба, как это показано на рис. 4.1.

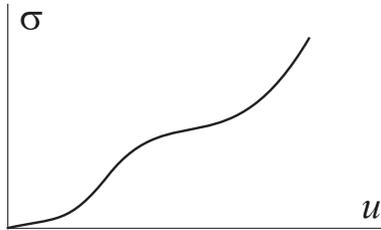


Рис. 4.1. $\sigma(u)$

При распространении очень длинных волн оба члена в правой части становятся малыми по сравнению с членами в левой части и при пренебрежении правой частью уравнение (4.2) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c(u) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}. \quad (4.3)$$

Здесь $c(u)$ – характеристическая скорость, уравнение (4.3) допускает разрывные решения. Заметим, что при преобразовании Галилея к $c(u)$ прибавляется постоянная, а функция $\varphi(u)$ приобретает линейное по u слагаемое.

Уравнение (4.3) (так же как и (4.2)) выражает закон сохранения, поэтому соответствующее соотношение на разрыве можно

записать в виде

$$W = \frac{[\varphi(u)]}{[u]}. \quad (4.4)$$

Здесь W – скорость разрыва, квадратными скобками обозначена разность значений функций за и перед разрывом.

Как упомянуто выше, неединственность решений автомодельных задач для уравнения (4.3) с использованием разрывов со стационарной структурой имеет место, если график функции $\varphi(u)$ имеет две точки перегиба. В качестве такой функции при расчетах, результаты которых излагаются ниже, взята функция

$$\varphi(u) = u^4 - u^2. \quad (4.5)$$

График этой функции изображен на рис. 4.2.

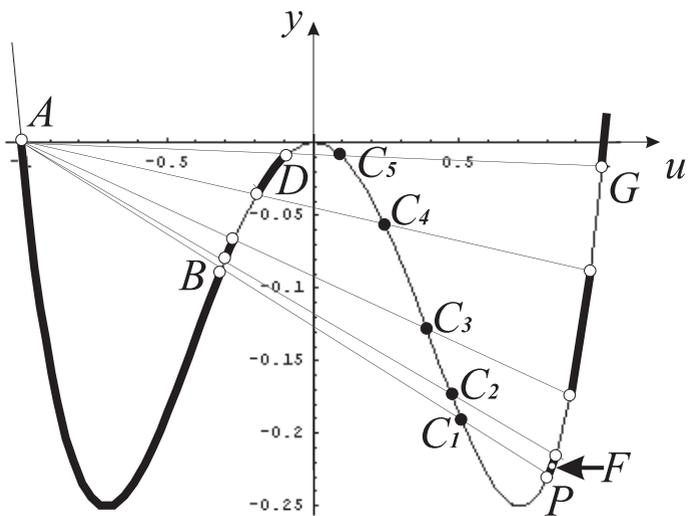
Стационарная структура разрывов описывается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} u &= u(\xi), \quad \xi = x - Wt, \\ m \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \mu \frac{du}{d\xi} &= F(u), \quad F(u) = W(u - u^R) - (\varphi(u) - \varphi(u^R)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

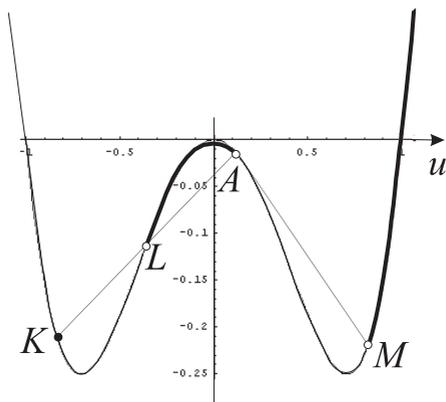
$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = u^R, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u^L.$$

Если такое решение существует, то с точки зрения большого масштаба длины оно должно представлять собой разрыв со стационарной структурой, в котором $u = u^R$ и $u = u^L$ – состояния перед ($x > 0$) и за ($x < 0$) разрывом. Нетрудно убедиться, что состояния u^R и u^L удовлетворяют соотношениям (4.4) и представляют таким образом состояния за и перед разрывом, соответствующим закону сохранения. Состояние перед разрывом будем обозначать буквой A на графике функции $\varphi(u)$ (рис. 4.2).

Путем качественного анализа было показано [25], что при достаточно большом значении m/μ^2 множество состояний u^L при заданном u^R состоит из отрезков и отдельных точек оси u . Для удобства это множество на рис. 4.2 а изображено на графике функции $\varphi(u)$ а в виде жирных отрезков и отдельных точек C_i , ($i = 1, \dots, 5$). Оно было рассчитано для параметров $u^R = -1$, $m = 1.3$, $\mu = 0.05$. Будем называть разрыв $A \rightarrow C_i$ особым, если A – состояние перед разрывом, а C_i – выделенные отдельные



a



б

Рис. 4.2. $\varphi(u) = u^4 - u^2$

точки, представляющие состояния за разрывом, для которых существует решение задачи (4.6) о структуре разрыва. Выделение отдельных точек в качестве возможных состояний за разрывом связано с тем, что структура этих разрывов представляет интегральную кривую, соединяющую две особые точки типа седла. Такое соединение возможно только при выполнении специального условия на параметры, входящие в уравнение, описывающее структуру. Оно представляет собой некоторое соотношение, выполняющееся на разрыве, которое не следует из закона сохранения, представленного равенством (4.4), а вытекает из факта существования структуры. Это – “дополнительное соотношение” по терминологии [8, 19, 53]. Число и расположение отрезков и отдельных точек зависит от параметра m/μ^2 . При увеличении этого параметра, когда u^R фиксировано, число отдельных точек и отрезков увеличивается.

Если точку A перемещать, то качественных изменений множества возможных состояний за разрывом происходить не будет пока точка A не перейдет через точку перегиба графика функции $\varphi(u)$. Множество допустимых разрывов для начальной точки A , лежащей между двумя точками перегиба, изображено на рис. 4.2 б и состоит из точки K и отрезков $[A, L]$, $[M, \infty]$. Точка M лежит на продолжении касательной к графику функции $\varphi(u)$ в точке A , а положение отдельной точки K и точки L зависит от m/μ^2 . Если точка A лежит правее обеих точек перегиба графика функции $\varphi(u)$, то множество состояний за возможными разрывами представляется полубесконечным интервалом, примыкающим к точке A справа.

Уравнение (4.3) допускает непрерывные расширяющиеся со временем решения $u(x, t)$, принимающие постоянные значения на веере расходящихся характеристик на плоскости x, t . В этих решениях величина $\varphi'(u) = c(u)$ должна убывать по модулю с ростом t . Это означает, что со временем u растет, если $\varphi''(u) < 0$ и убывает при $\varphi''(u) > 0$.

Рассмотрим автомодельные решения уравнения (4.3) считая, что они могут содержать описанные выше разрывы со стационарной структурой. Будем считать, что при $t = 0$ начальные данные имеют вид $u = u^L$ при $(x < 0)$ и $u = u^R$ при $x > 0$. В дальнейшем будем рассматривать случай $u^R = -1$.

Пусть сначала состояние u^L при $x < 0$ задано точкой F (рис. 4.2 б, $m = 1.3$, $\mu = 0.05$), тогда задача о распаде разрыва для

уравнения (4.3) имеет несколько решений. Одно из них представляется скачком $A \rightarrow F$. Остальные решения состоят из двух скачков $A \rightarrow C_i$ ($i = 2, 3, \dots, 5$) и $C_i \rightarrow F$. Скорости этих разрывов, определяемые соотношением (4.4) таковы, что для $i = 2, 3, \dots, 5$ разрыв $A \rightarrow C_i$ движется быстрее разрыва $C_i \rightarrow F$, (заметим, что для $i = 1$ это условие нарушается). Если точку F двигать по графику вверх направо, то последовательно будут исчезать некоторые из перечисленных решений, пока не останется одно, представляемое скачком $A \rightarrow F$, когда точка F будет расположена выше точки G .

Если точку F , представляющую состояние при $x = -\infty$, передвигать по графику функции $\varphi(u)$ налево (левее точки P (рис. 4.2 а)), то будет возможно еще одно решение, состоящее из двух разрывов $A \rightarrow C_1$, $C_1 \rightarrow F$, однако решение $A \rightarrow F$ пропадет. При дальнейшем движении точки F по кривой функции $\varphi(u)$ налево выше точки C_1 разрыв $C_1 \rightarrow F$ заменится на непрерывную волну, в которой изменения u и $\varphi(u)$ происходят от точки C_1 до точки F или до точки, из которой можно провести касательную в точку F , представляющую скачок (имеющий стационарную структуру) из точки касания в точку F . При уменьшении u^L некоторые из ударных волн $C_i \rightarrow F$ заменяются сначала непрерывной волной, а затем сложными волнами, которые состоят из непрерывной расширяющейся со временем волны, начинающейся из состояния, соответствующего точке C_i , и примыкающего к нему разрыва с конечным состоянием, соответствующим точке F .

Если точка F принадлежит отрезку DP , то существует пять решений, состоящих из разрыва $A \rightarrow C_i$ ($i = 1, \dots, 5$) и перехода $C_i \rightarrow F$, который представляется либо разрывом, либо непрерывной волной, либо сложной волной, содержащей разрыв и непрерывную волну.

Когда точка F переходит через точку D , двигаясь по графику функции $\varphi(u)$ влево, то сначала прекращает существование решение $A \rightarrow C_5$, $C_5 \rightarrow F$, поскольку скорость разрыва $C_5 \rightarrow F$ будет иметь скорость меньшую, чем разрыв $A \rightarrow C_5$. Далее при движении точки F к точке B последовательно исчезают решения, связанные с C_4 , C_3 , C_2 и C_1 . Когда точка F принадлежит отрезку AB , то имеется одно решение, представляемое разрывом $A \rightarrow F$. В случае $u^L < -1$ имеется также единственное решение в виде непрерывной волны.

Таким образом, для описанного выше множества значений u^L решение задачи о распаде разрыва неединственно, причем для данных значений параметров m и μ число возможных решений (которые строятся с использованием разрывов, имеющих структуру) в случае неединственности достигает пяти.

В случае неединственности с целью выбора решения ниже будут рассматриваться нестационарные решения уравнения (4.2), которые должны иметь автомодельные асимптотики, описываемые уравнением (4.3), когда пространственные масштабы решения становятся большими. При рассмотрении аналогов задачи о распаде произвольного разрыва такое соответствие имеет место в переменных x/t , t при $t \rightarrow \infty$.

4.2. Описание численных экспериментов. Для численного моделирования нестационарных процессов, описываемых уравнением (4.2), начальные данные можно задавать не в виде кусочно-постоянной функции (ступеньки), а в виде непрерывно изменяющейся на некотором отрезке функции (“сглаженной” ступеньки). Заметим, что умножением x и t на одно и то же число параметр μ можно обратить в единицу, тогда решение задачи будет зависеть от функции, задающей начальное условие, и одного параметра, входящего в преобразованное уравнение, а именно от m/μ^2 .

Приведем теперь результаты численных экспериментов. Для изучения стационарных структур разрывов численно решалось обыкновенное дифференциальное уравнение (4.6). Для исследования нестационарных решений уравнение (4.2) решалось двумя различными способами и проводилось сравнение результатов. Первый из этих методов состоял в следующем: уравнение (4.2) представлялось в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} - F(u) = v, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \end{cases} \quad F(u) = -\varphi(u) + W(u+1). \quad (4.7)$$

Уравнения (4.7) записывались в виде неявных нелинейных разностных уравнений, которые были линеаризованы методом Ньютона и решались методом матричной прогонки [42]. Второй

способ состоял в том, что уравнение (4.2) решалось как нелинейное разностное уравнение с использованием явной схемы. Решались различные тестовые задачи: были найдены известные решения уравнения (4.2), когда либо $m = 0$, либо $\mu = 0$; найдены решения этого уравнения, когда решение единственно и представляет собой стационарную структуру. Эти решения совпадали с соответствующими решениями обыкновенных дифференциальных уравнений (4.6) с точностью 10^{-5} для выбранных параметров счета: $\Delta\xi = 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-6}$, число итераций 8, расчетное время $T \sim 2$.

Получены следующие результаты:

а) Численно найдены стационарные структуры как решения обыкновенного дифференциального уравнения (4.6). Выявлены и рассчитаны волны $A \rightarrow C_i$, ($i = 1, \dots, 5$). На рис. 4.3 приведены графики решений для отдельных точек C_i и значений параметров $m = 1.3$, $\mu = 0.05$.

На этих графиках видно, что структура решений в каждой из выделенных точек различна, причем число колебаний внутри структуры увеличивается с увеличением индекса точки. Самую простую структуру имеет волна, состояние за которой определяется точкой C_1 . Отметим, что положение и величины выделенных на рис. 4.2 а отрезков, в которых существует решение в виде стационарной структуры, найдено численно. Для каждого из этих отрезков решение различно и содержит различное число колебаний.

б) Проведено исследование устойчивости стационарных структур и, в частности, структур особых разрывов по отношению к различным возмущениям. С этой целью решались следующие начально-краевые задачи для уравнения (4.2): правое граничное условие $u^R = -1$ (при $x = 0, t \geq 0$), левое граничное условие $u^L = C_i$ (при $x = x_L, t \geq 0$), в качестве начального условия ($t = 0$) задавалась функция $u = u_*(x) + \delta u(x)$, причем $u_*(x)$ представляет решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.6) для данного значения u_L , соответствующего одной из точек C_i . Кроме того, произвольные различные возмущения задавались перед исследуемой волной, т.е. при больших значениях x , где u_* практически не отличается от -1 . Решались также задачи, когда $\delta(x) = 0$, а внесены возмущения в правое граничное условие $u^R = -1 + \delta u(t)$. Во всех перечисленных задачах в последующие моменты времени ($t > 0$) возмущение распространялось и взаи-

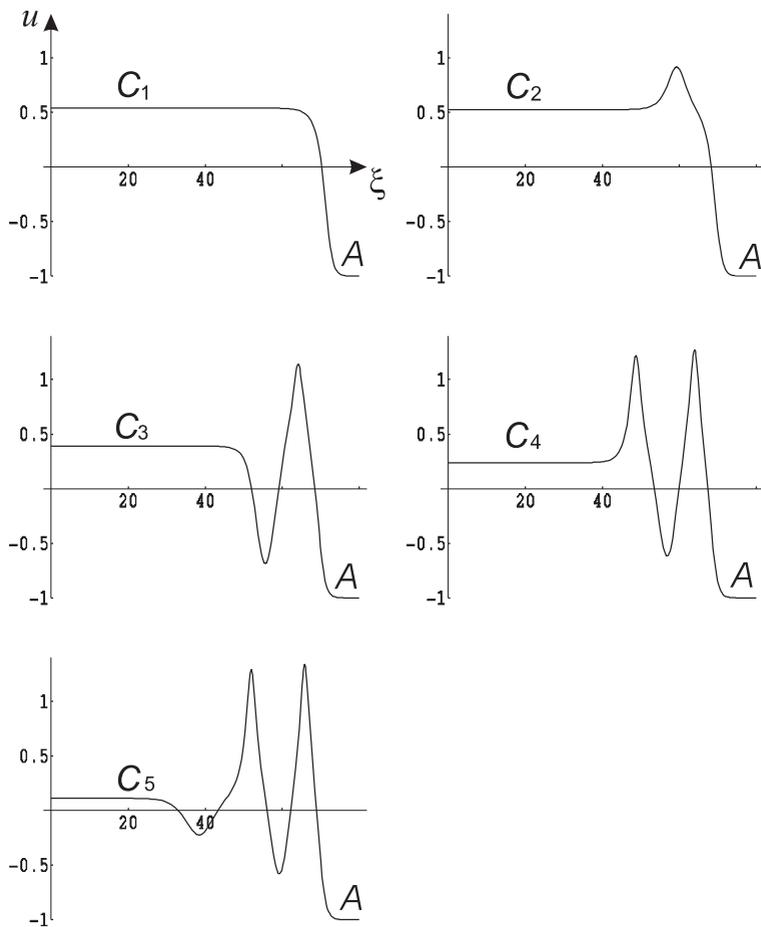


Рис. 4.3. Стационарные структуры

модействовало со структурой особого разрыва. В зависимости от амплитуды и ширины возмущения решение в виде стационарной структуры восстанавливалось с ростом времени, либо распадалось на систему волн. Численные эксперименты показали, что стационарные волны, представляющие структуру особого разрыва, устойчивы по отношению к возмущениям не только малой, но также и конечной амплитуды. В случае, когда возмущения были так велики, что происходил распад исходной волны, с течением времени формировалось решение, состоящее из следующей последовательности волн: волна $A \rightarrow C_1$, далее движущаяся с меньшей скоростью простая волна, в которой величины меняются от точки C_1 до точки, из которой существует касательная к графику функции $\varphi(u)$ проходит через точку C_i , и затем ударная волна в точку C_i . Только волна $A \rightarrow C_1$ во всех проведенных численных экспериментах восстанавливалась после взаимодействия с любыми возмущениями.

Аналогичным способом численно исследовалась устойчивость неособых разрывов с конечными состояниями, принадлежащими отрезкам ударной адиабаты. Все эти разрывы оказались устойчивыми по отношению к не слишком большим возмущениям. При действии больших возмущений некоторые разрывы приобретали структуру, периодически зависящую от времени.

в) Численно решены аналоги задачи о распаде произвольного разрыва. Начально-краевая задача для уравнения (4.2) формулируется следующим образом: левое граничное условие $u^L = u_F$ (при $x = 0, t \geq 0$), правое граничное условие $u^R = -1$ (при достаточно большом $x = x_R, t \geq 0$), начальные данные $u = u_0(x)$ выбирались так, что $u_0(x) = -1$, если $x > a$ и $u_0(x) = u_F$, если $x < b$.

Оказалось, что если $u_B < u_F < u_P$ (здесь u_B и u_P – координаты точек B и P рис. 4.2 а), то при достаточно общем виде функции $u_0(x)$ на $[a, b]$ решение при $t \rightarrow \infty$ стремится к одному из решений, описанных в п. 4.1, а именно к системе волн с волной $A \rightarrow C_1$, идущей первой. График этого решения в некоторый момент времени представлен на рис. 4.4 а.

К этому типу решений относятся описанные выше решения, возникающие при распаде волн $A \rightarrow C_i$ ($i = 2, \dots, 5$). На рис. 4.4 б представлен график решения этой же начально-краевой задачи, но в качестве начальных данных задана функция, близкая к решению обыкновенного дифференциального уравнения (4.6) в том

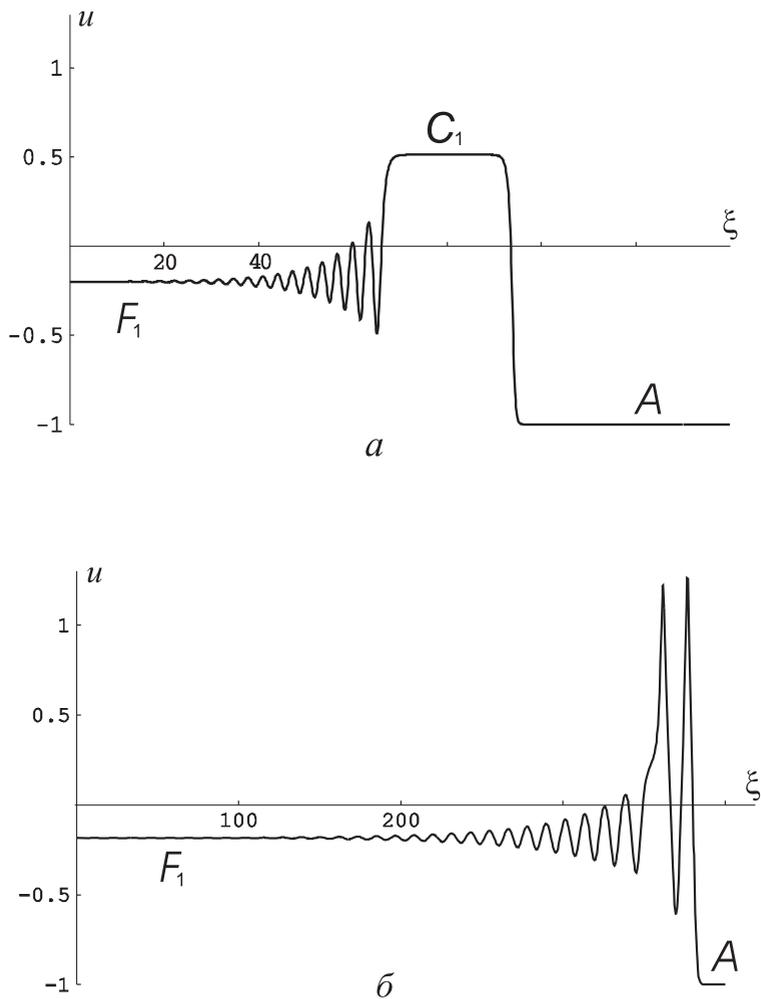


Рис. 4.4. Асимптотики решений уравнений в частных производных

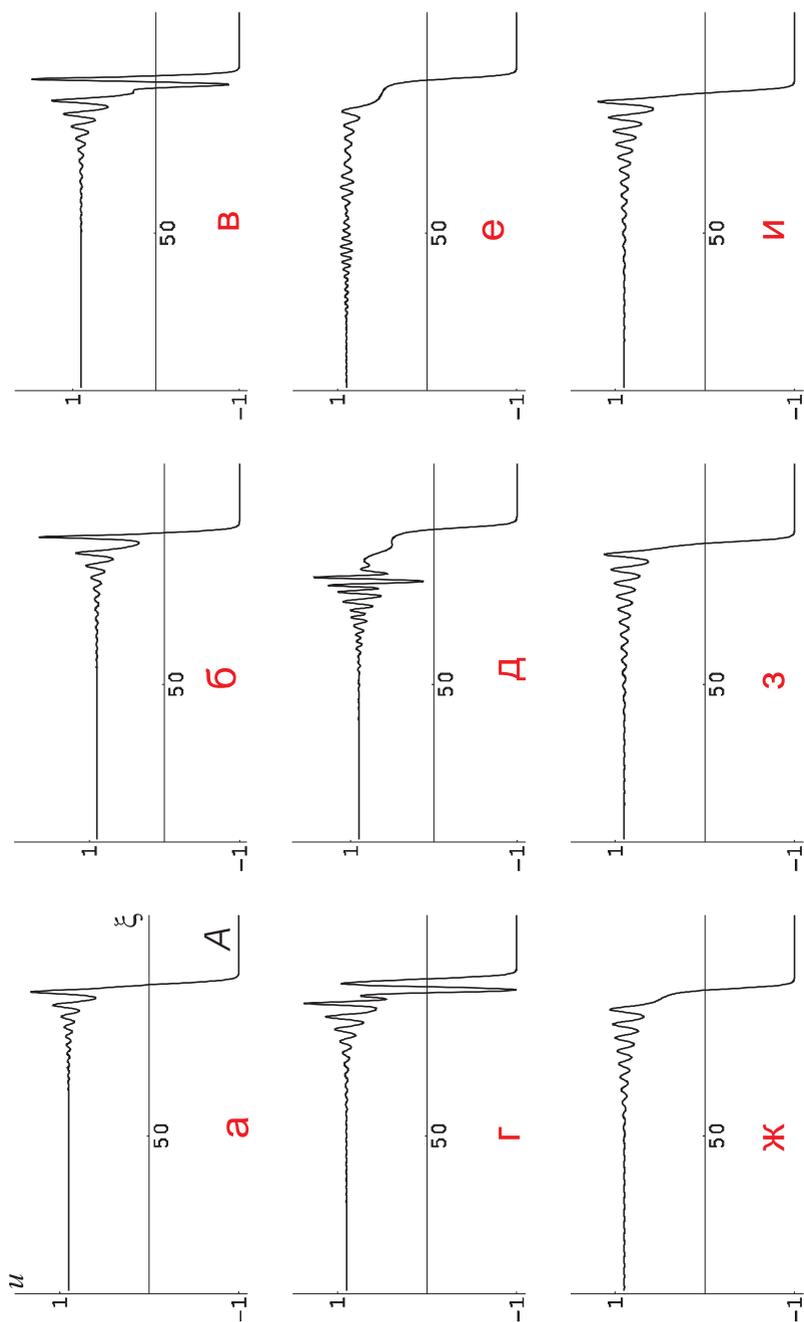


Рис. 4.5. Нестационарное периодическое решение

случае, когда правое граничное условие соответствует участку ниже точки D , выделенному жирной линией на рис. 4.2 а. Это решение с увеличением времени стремится к стационарной структуре. Таким образом, продемонстрировано, что вид решения зависит от того, какая функция задает начальные условия.

Если $u_P < u_F < u_G$ рис. 4.2 а), то образуется одна волна с периодической нестационарной структурой.

На рис. 4.5 а-и представлено решение $u(x, t)$ в последовательные моменты времени. Для демонстрации периодичности решения по времени была построена функция $\Phi(t)$ абсолютного максимума функции $u(x, t)$ в зависимости от переменной t , которая оказалась периодической (рис. 4.6).

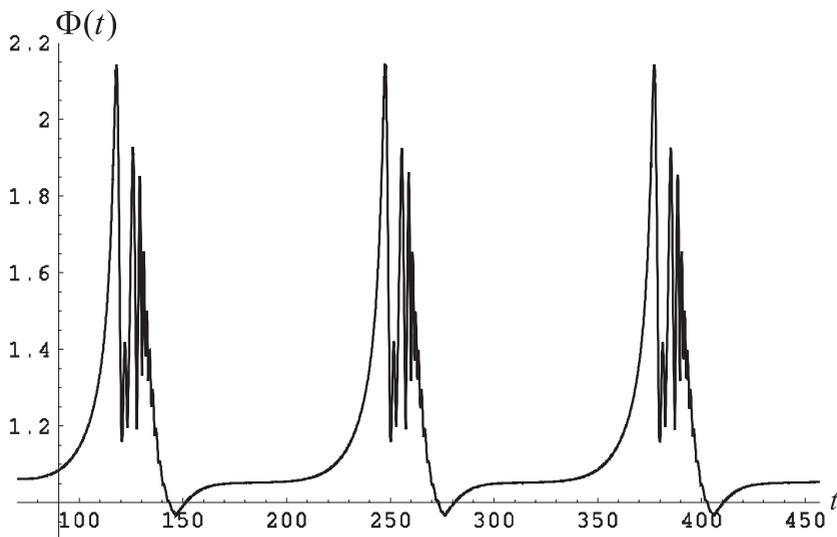


Рис. 4.6. $\Phi(t) = \max_x u(x, t)$ – периодическая функция абсолютного максимума функции $u(x, t)$

Устойчивость стационарных структур разрывов и, в частности, волн $A \rightarrow C_i$ обеспечивает существование таких функций, задающих начальные условия для уравнения (4.2), что при $t \rightarrow \infty$ решения будут иметь асимптотики, описанные в п. 4.1, в том числе асимптотики со стационарными волнами $A \rightarrow C_i$. Такие решения также получались при расчетах.

Таблица 1.

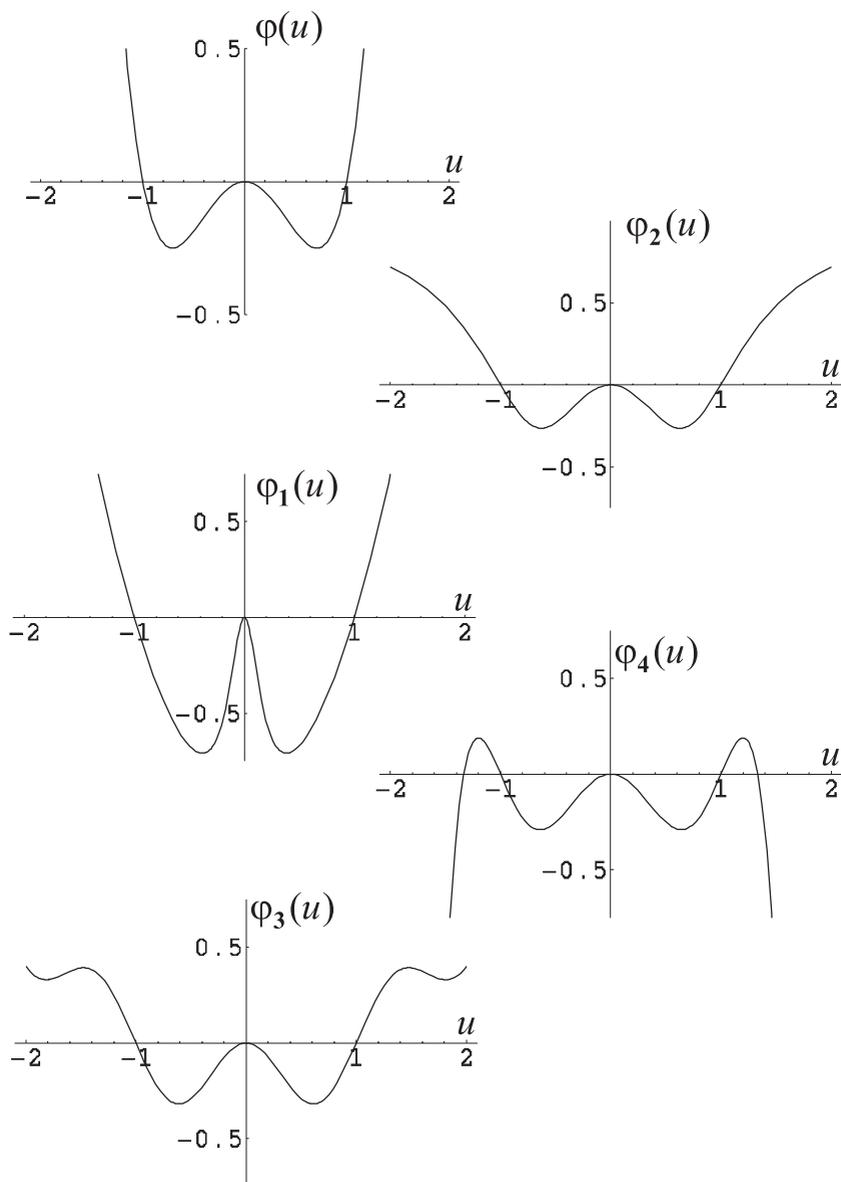
$\varphi(u)$	m	μ	
$\varphi(u) = u^4 - u^2$	0.42	0.05	3
$\varphi(u) = u^4 - u^2$	0.42	0.03	7
$\varphi_1(u) = \frac{A}{1 + u^2/(A - 1)} + u^2 - A, A = 1.03$	2	0.05	5
$\varphi_2(u) = \frac{2u^2(u^2 - 1)}{2u^4 + 1.5}$	0.55	0.03	5
$\varphi_3(u) = 0.2(\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right) + u^2 - 1)$	0.55	0.05	5
$\varphi_4(u) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 u^4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 u^2 - \left(\frac{5}{16}\right)^2 u^6$	0.42	0.05	5

г) Численно исследованы решения начально-краевых задач, сформулированных в пункте в) при различных значениях параметра m/μ^2 , различных функциях $\varphi(u)$, описывающих нелинейность, и с граничными условиями $u^R = -1, u^L \in (-1, 1)$. Были рассчитаны следующие варианты (табл. 1, в последнем столбце указано число отдельных точек C_i).

Представленные в таблице функции имеют простые корни в точках $u = \pm 1$ и двукратный корень при $u = 0$. Графики этих функций приведены на рис. 4.7.

Результаты расчетов аналогов задачи о распаде произвольного разрыва для данных, приведенных в таблице 1, качественно совпадают с результатами, описанными в п. в). В частности не удалось подобрать такую функцию $\varphi(u)$, для которой не возникали бы разрывы со структурой, периодически зависящей от времени.

4.3. Выводы. Таким образом, в результате численных экспериментов было выяснено, что наряду с разрывами в решениях уравнения (4.3), имеющих стационарную структуру, описываемую уравнением (4.2), существуют разрывы, имеющие нестационарную структуру. Поскольку возмущения не могут уходить на

Рис. 4.7. $\varphi_i(u)$

бесконечность в силу диссипативности уравнения (4.2), то равенство (4.4) остается справедливым по отношению к средней скорости разрыва.

Колебательная нестационарная структура разрыва может существовать при тех же условиях при $x = \pm\infty$, что и стационарная. Стационарные структуры устойчивы по отношению к возмущениям, не превышающим некоторого порога. Это утверждение относится также к структуре особых разрывов за исключением особого разрыва с простейшей монотонной структурой, которая не разрушалась при всех рассматриваемых возмущениях.

Решения обобщенной задачи о распаде произвольного разрыва при более или менее произвольной функции, задающей начальные данные в виде сглаженной ступеньки, представляют собой при больших временах нестационарные решения с периодической колебательной структурой, если при заданных параметрах задачи такое решение имеет место. Это говорит о том, что автомодельная асимптотика, содержащая разрывы с периодической колебательной структурой, имеет большую область притяжения в пространстве функций, задающих сглаживание ступеньки в начальных условиях, чем область притяжения автомодельных асимптотик с ударными волнами, имеющими стационарную структуру при тех же значениях параметров задачи.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что при заданных значениях параметров u^L , u^R , m/μ^2 может существовать много автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва, которые являются асимптотиками соответствующих задач с учетом дисперсии и диссипации. При этом к известным ранее решениям, содержащим разрывы со стационарной структурой присоединились решения, содержащие разрывы с нестационарной периодической колебательной структурой, обнаруженные численно.

§ 5. Заключение

Основная часть результатов работы связана с проблемой неединственности решений нелинейной теории упругости. Было обнаружено (п. 1.3), что решения автомодельных задач, состоящие из волн Римана и эволюционных разрывов с неубывающей энтропией (ударных волн) неединственны. Показано, что эта неединственность может иметь место при сколь угодно малых отклонениях от однородного ненапряженного состояния (Приложение 1). Такая ситуация ранее не встречалась при рассмотрении задач механики сплошных сред. Сформулирован признак неединственности или несуществования решений автомодельных задач для уравнений, выражающих законы сохранения, с помощью достаточно просто проверяемого условия, приведенного в Приложении 2.

Результаты § 2 связаны с попыткой избавиться от неединственности решений уравнений, описывающих нелинейные квазипоперечные волны в упругой среде, путем введения дополнительной гипотезы о так называемой исчезающей вязкости. При этом решения уравнений теории упругости рассматриваются как предел решений уравнений вязко-упругости при вязкости, стремящейся к нулю. Однако, как требования существования структуры разрывов, так и требования устойчивости структуры метастабильных разрывов (т.е. разрывов, которым законы сохранения не препятствуют распасться на систему волн) не привели к каким-либо выводам, способным выделить единственные решения в задачах нелинейной теории упругости. В § 2 показано, что осуществление того или иного решения или распада метастабильной волны зависит от деталей постановки начальных и граничных условий на отрезках осей x или t , длины которых пропорциональны вязкости и исчезают при вязкости, стремящейся к нулю.

В качестве второго варианта поведения нелинейных квазипоперечных волн в § 3 рассмотрен случай, когда в мелкомасштабных процессах, происходящих в упругой среде, помимо вязкости существенную роль играет дисперсия. Требование существования структуры квазипоперечных разрывов выделяет при этом в качестве допустимых разрывов сложно устроенное множество, существенно отличающееся от соответствующего множества при отсутствии дисперсии. При этом оказываются допустимыми особые разрывы, скорость распространения которых принимает дис-

кретный набор значений. Число этих дискретных значений тем больше, чем больше относительная роль дисперсии по сравнению с вязкостью в структуре ударных волн. Показано, что число решений автомодельной задачи об упругих волнах в полупространстве, строящихся из волн Римана и допустимых разрывов может быть велико и тем больше, чем больше относительная роль дисперсии в мелкомасштабных процессах.

Численно исследовались неавтомодельные задачи с автомодельной асимптотикой как нестационарные решения уравнений в частных производных, описывающих как крупномасштабные, так и мелкомасштабные процессы. Выявлено, что параметры и функции, характеризующие неавтомодельность определяют асимптотику решения при больших временах. Показано, что в качестве асимптотики может оказаться любое из автомодельных решений. Сделаны выводы о том, какие автомодельные асимптотики реализуются при достаточно простом выборе функций, характеризующих неавтомодельность задачи.

Другая модель, в которой существенную роль играют мелкомасштабные дисперсионные эффекты, описывает распространение продольных волн в вязко-упругих стержнях со сложной нелинейностью и вязкостью. В случае этой модели так же, как и в случае распространения квазипоперечных волн в упругой среде с мелкомасштабной дисперсией, имеют место те же эффекты – сложное строение множества допустимых разрывов, многократная неединственность решений, полученных из непрерывных волн и разрывов, имеющих структуру в виде бегущей волны, а также выявленная при численном построении решений неавтомодельных задач зависимость вида автомодельной асимптотики от параметров и функций, не входящих в автомодельную постановку задачи. Однако имеется отличие. При определенных условиях в асимптотике появляются разрывы, структура которых не представляется бегущей волной, а испытывает внутренние периодические колебания.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод, что сложное строение множества допустимых разрывов и множественность автомодельных решений систем уравнений, выражающих законы сохранения, следует ожидать при выполнении двух условий. Необходимо, чтобы по заданному состоянию перед разрывом с одной и той же скоростью мог распространяться более чем один разрыв, удовлетворяющий условиям, следующим из за-

конов сохранения. Кроме того, необходимо, чтобы мелкомасштабная дисперсия существенно превосходила диссипацию в структурах разрывов, что обеспечивает колебания внутри стационарной структуры разрыва.

Во всех рассмотренных случаях, происходит ли отбор допустимых разрывов с помощью введения мелкомасштабной вязкости, или одновременно вязкости и дисперсии, существует область параметров, для которых в рамках гиперболической модели оказывается неединственным решение автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва. Выход неавтомодельного решения на ту или иную асимптотику регулируется деталями постановки неавтомодельной задачи, которые отсутствуют в автомодельной постановке. Это означает, что если, например, требуется в рамках гиперболической модели рассчитать какой-то процесс, в котором по мере его развития возникают произвольные разрывы (например, при столкновении ударных волн), то имеется две возможности. Либо процесс распада этих разрывов следует каждый раз рассчитывать как неавтомодельную асимптотику для уравнений, усложненных учетом мелкомасштабных явлений, либо, может быть, в ряде случаев удастся путем классификации условий возникновения произвольных разрывов и соответствующего численного эксперимента заранее предсказать, каков будет результат распада в изучаемых процессах.

Пример последнего подхода продемонстрирован в п. 2.3, где при рассмотрении задачи о взаимодействии ударных волн выяснен тип автомодельного решения, возникающего как асимптотика неавтомодельного решения.

§ 6. Приложение 1. Упрощенные уравнения одномерной теории упругости для квазипоперечных волн

При рассмотрении волн малой амплитуды известны подходы, связанные с получением более простых приближенных уравнений по сравнению с исходной системой. Примерами могут служить уравнения Хопфа, Бюргерса и Кортевега–де-Фриза. Эти уравнения описывают поведение волн, связанных с одним семейством характеристик гиперболической части достаточно произвольной системы уравнений. Преимущество такого подхода связано не только с упрощением уравнений (что очень важно, например, при проведении численных процедур), но также с единообразием описания решений целых классов дифференциальных уравнений. Ниже упрощенные системы уравнений получены для одномерных систем уравнений теории упругости.

Идея получения упрощенных уравнений заключается в том, что возмущения, распространяющиеся с существенно различающимися скоростями, в случае волн малой амплитуды слабо взаимодействуют между собой. Это позволяет в качестве искоемых функций выбрать инварианты Римана линейного приближения и рассматривать ситуации, когда определяющую роль играют только некоторые из них. Остальные инварианты Римана предполагаются малыми и для них строятся приближенные решения.

При рассмотрении квазипоперечных волн, если эффекты нелинейности и анизотропии сравнимы, оказывается необходимым учитывать взаимодействие двух квазипоперечных волн, распространяющихся с близкими скоростями. Соответственно будет предположено, что определяющую роль будут играть два инварианта Римана (линейного приближения), которые связаны с соответствующими семействами характеристик. Однако, остальные инварианты Римана не могут быть положены равными нулю, поскольку нелинейность приводит к их появлению внутри волны даже при нулевых начальных условиях. Для этих инвариантов будет получено приближенное вынужденное решение, учет которого необходим для правильного описания основных инвариантов в принятом приближении. В результате в следующем п. 6.2 получим систему двух уравнений в частных производных для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону.

Упрощение уравнений теории упругости проведем в два этапа: сначала, в п. 6.1, исключим продольные возмущения и получим систему уравнений для квазипоперечных волн. Эта система совпадает с системой уравнений, описывающей поперечные волны в некоторой (эквивалентной) несжимаемой среде, упругий потенциал которой находится по исходному упругому потенциалу. В следующем пункте будет получена система двух уравнений для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону.

6.1. Эквивалентная несжимаемая среда при описании квазипоперечных волн. Одномерные уравнения теории упругости имеют вид (1.1)

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right); \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

Первая группа уравнений – динамические уравнения. Вторая группа – кинематические. Упругий потенциал Φ будем записывать в виде разложения по степеням u_i и $S - S_0$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} d u_3^2 + a u_3^3 \\ & + b(u_1^2 + u_2^2) u_3 + \frac{1}{4} h(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0 (S - S_0) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Коэффициенты разложения f , d , b и h имеют величины порядка единицы, а g считается малым параметром. Разложение функции Φ представлено в виде, обеспечивающем в уравнениях (6.1) правильный учет главных членов, отвечающих проявлениям нелинейности и изменению энтропии [19]. При этом предполагается, что возмущения развиваются на однородном фоне, где $\rho = \rho_0$, $S = S_0$. Разность $S - S_0$ может возникнуть при прохождении ударных волн и считается малой величиной, более высокого порядка, чем изменения величин u_i .

Если в уравнениях не учитываются нелинейные эффекты и анизотропия, то в разложении (6.2) останутся только члены с коэффициентами f и d . При этом линейные возмущения, удовлетворяющие (6.1), как нетрудно понять, разделяются на продольные, распространяющиеся со скоростями $\pm \sqrt{d/\rho_0}$, в которых изменяются u_3 и v_3 , и поперечные, распространяющиеся со скоростями

$\pm\sqrt{f/\rho_0}$, в которых изменяются u_1, v_1 , и u_2, v_2 . В теории упругости $d > f$, т.е. продольная волна движется быстрее поперечной. При учете остальных членов в разложении (6.2) эти волны становятся квазипродольными и квазипоперечными.

Будем интересоваться квазипоперечными волнами, в которых u_α ($\alpha = 1, 2$) не превосходит по порядку величины $\varepsilon \ll 1$, а изменение u_3 в волне предполагается не превосходящим по порядку величины $\chi = \max\{\varepsilon^2, g\}$. Это предположение будет проверено для изучаемого типа, если начальные и граничные условия обладают теми же свойствами.

В силу малости амплитуды изучаемая волна близка к линейной поперечной волне. В системе координат, движущейся со скоростью $\sqrt{f/\rho_0}$, изменения решения, представляющего квазипоперечную волну, будут обусловлены нелинейными членами или членами, содержащими g . Пренебрегая этими малыми членами, можно с относительной погрешностью, не превосходящей по порядку величины χ , записать, что решение в исходной системе координат является бегущей волной. В частности, с указанной точностью имеем

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + \sqrt{\frac{f}{\rho_0}} \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} + \sqrt{\frac{f}{\rho_0}} \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0.$$

Последние равенства означают рассмотрение только вынужденного решения скорости v_3 и деформации u_3 в квазипоперечной волне и отсутствие свободной квазипродольной волны, движущейся со скоростью $\sqrt{d/\rho_0}$. С учетом соответствующего кинематического уравнения имеем

$$\rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} = f \frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Подставляя полученное соотношение в третье динамическое уравнение исходной системы, получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{1}{d-f} \left(\Phi_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \Phi_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}. \quad (6.3)$$

Если воспользоваться приведенным выше выражением для Φ , то

$$\Phi_{13} = 2bu_1, \quad \Phi_{23} = 2bu_2.$$

Таким образом, при сделанных предположениях получаем

$$u_3 = -\frac{1}{d-f}(u_1^2 + u_2^2) + u_3^0, \quad (6.4)$$

где u_3^0 – постоянная интегрирования. Изменение u_3 в квазипоперечных волнах, согласно равенству (6.4), не превосходит по порядку величины ε^2 , что находится в соответствии с исходными предположениями.

Учитывая (6.4), первые два динамических и два кинематических уравнения системы (6.1) примут вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u_\alpha} \right), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.5)$$

Функция

$$H = H(u_1, u_2)$$

определяется через функцию $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ из условия

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\alpha \partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial u_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

где производная $\partial u_3 / \partial u_\beta$ вычисляется согласно формуле (6.4). Отсюда нетрудно найти, что

$$\frac{\partial H}{\partial u_\alpha} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right)_{u_3} = -b(u_1^2 + u_2^2)/(d-f) + u_3^0$$

Таким образом, с учетом разложения (6.2) упругого потенциала изучаемой среды $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ можно ввести функцию $H(u_1, u_2)$ с помощью равенства

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} f_1 (u_1^2 + u_2^2) + Q, \\ Q &= \frac{1}{2} g (u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} \kappa (u_1^2 + u_2^2)^2, \\ f_1 &= f + 2b u_3^0, \quad \kappa = \frac{2b^2}{d-f} - h. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Уравнения (6.5) представляют систему уравнений для описания несжимаемой упругой среды. Функция $H(u_1, u_2)$, заданная выражением (6.6), представляет упругий потенциал этой вспомогательной (эквивалентной) несжимаемой упругой среды.

6.2. Упрощенные уравнения для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону. Получим теперь уравнения, описывающие квазипоперечные волны, распространяющиеся направо, при условии, что начальные и граничные условия таковы, что волны, распространяющиеся налево, не возбуждаются (или возбуждаются в достаточно малой степени). Введем в качестве новых переменных четыре инварианта Римана уравнений (6.5) для квазипоперечных волн в случае, когда $Q \equiv 0$

$$w_{\alpha}^{+} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha} - v_{\alpha} \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}} \right), \quad w_{\alpha}^{-} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha} + v_{\alpha} \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}} \right).$$

Индексом “+” обозначены инварианты, соответствующие волнам, распространяющимся направо, а индексом “-” – налево.

Домножив динамические уравнения (6.5) на $1/\sqrt{\rho_0 f_1}$ и взяв их полуразности и полусуммы с соответствующими кинематическими уравнениями, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\alpha}^{+}}{\partial t} + \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}} \frac{\partial w_{\alpha}^{+}}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}} \frac{\partial}{\partial x} (w_{\beta}^{+} + w_{\beta}^{-}) &= 0, \\ \frac{\partial w_{\alpha}^{-}}{\partial t} - \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}} \frac{\partial w_{\alpha}^{-}}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}} \frac{\partial}{\partial x} (w_{\beta}^{+} + w_{\beta}^{-}) &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}}.$$

Если считать, что отрезок оси x , занятый волной, распространяющийся направо, равен L , а производная $\partial w_{\beta} / \partial x$ по порядку величины совпадает с изменением w_{β} , деленным на L , то из уравнений для w_{α}^{-} можно получить, что та часть изменения w_{α}^{-} , которая обязана своим происхождением наличию члена $\partial w_{\beta}^{+} / \partial x$ в уравнениях, имеет по отношению к изменению w_{β}^{+} порядок величины, определяемый $Q_{\alpha\beta}$, т.е. χ . Это позволяет пренебречь в уравнениях для w_{α}^{+} членами с $\partial w_{\beta}^{-} / \partial x$, поскольку эти малые производные умножаются на малые коэффициенты $Q_{\alpha\beta}$. Тогда

уравнения для w_α^+ приобретают вид

$$\frac{\partial w_\alpha^+}{\partial t} + \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}} \frac{\partial w_\alpha^+}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}} \frac{\partial w_\alpha^+}{\partial x} = 0 \quad (6.8)$$

Якобиан преобразования от переменных u_1, u_2 к переменным w_1^+, w_2^+ отличается от единичной матрицы (которая соответствует $w_\alpha^- = 0$) наличием членов порядка χ . Производя в уравнениях (6.8) указанное преобразование переменных и пренебрегая членами порядка χ^2 , получим те же самые уравнения, но уже для переменных u_α . Перепишем их в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} R(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} f_* (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g_* (u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} \kappa_* (u_1^2 + u_2^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} f_* (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2\rho_0 f_*} Q(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$f_* = \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}, \quad g_* = \frac{g}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}, \quad \kappa_* = \frac{\kappa}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}.$$

Система (6.9) упрощенных уравнений теории упругости состоит из двух связанных уравнений и служит для описания двух квазипоперечных волн, распространяющихся с близкими скоростями в одном направлении и взаимодействующих между собой. Уравнения (6.9), так же как и исходные уравнения (1.1) для поперечных движений среды, выражают сохранение поперечных компонент импульса и имеют дивергентную форму. Это позволяет написать соотношения на разрывах

$$\left[\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \right] - W[u_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.11)$$

В уравнения (6.9) входят постоянные коэффициенты f_* , g_* и κ_* . При переходе к движущейся системе координат, движущейся со скоростью f_* , можно обратить в нуль коэффициент f_* . Выбирая масштабы измерения для t и x , а также масштаб для u_α , можно обратить оставшиеся коэффициенты по модулю в единицы. Таким образом, можно принять в качестве канонических форм запись уравнений (6.9) с $f_* = 0$, $g_* = 1$ и $\kappa_* = \pm 1$. В дальнейшем

каноническая форма уравнений (6.9) почти не будет применяться, но важно отметить, что все результаты, полученные для этих уравнений, имеют универсальный характер, т.е. решение уравнений (6.9) и (6.10) с заданными f_* , g_* и κ_* можно преобразовать в некоторое решение тех же уравнений с произвольными значениями этих параметров.

Отметим, что уравнения несжимаемой среды (6.5), (6.6), которые также характеризуются тремя параметрами f , g и κ , не преобразуются к одной или нескольким каноническим формам, поскольку вид этих уравнений не допускает преобразования Галлилея. Из указанных параметров только два можно преобразовать по модулю в единицы.

6.3. Движения вязко-упругих сред. Модель Кельвина–Фойхта. В качестве усложненной модели будет рассмотрена одна из простейших моделей, в которой разрывы отсутствуют, а именно, модель вязко-упругой среды Кельвина–Фойхта [54]. Согласно этой модели, напряжения p_{ij} в вязко-упругой среде представляют собой сумму слагаемых $p_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Одно из них выражает упругие напряжения σ_{ij} , которые определяются точно так же, как в модели упругого тела, заданием зависимости внутренней энергии от компонент тензора деформации и энтропии. Второе слагаемое в выражении для тензора напряжений представляет собой вязкие напряжения. В модели Кельвина–Фойхта они предполагаются линейно зависящими от тензора скоростей деформации. Коэффициенты пропорциональности (коэффициенты вязкости) зависят от свойств среды и, в частности, могут зависеть от текущего значения тензора деформации.

При рассмотрении одномерных движений необходимо знать три компоненты тензора вязких напряжений τ_{3i} , $i = 1, 2, 3$, которые, согласно предположению, должны линейно зависеть от производных от компонент скорости по координате x , т.е. от $\partial v_i / \partial x = \partial u_i / \partial t$. Сделаем дополнительные упрощающие предположения, которые могут быть оправданы для задач о волнах малой амплитуды. А именно, предположим, что связь между τ_{3i} и $\partial v_i / \partial x$ не зависит от тензора деформации, а также каких-либо других тензоров и векторов. Это предположение исходит из малости тензора деформации и, кроме того, в дальнейшем предполагается рассматривать явления, в которых вязкие напряжения

малы (они не будут превышать по порядку величины нелинейных поправок к напряжениям). Поэтому малые относительные погрешности в малых членах можно считать несущественными.

Из сделанных предположений следует

$$\tau_{3\alpha} = \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \tau_{33} = \mu_\perp \frac{\partial v_3}{\partial x},$$

где коэффициенты вязкости $\mu \geq 0$ и $\mu_\perp \geq 0$ – постоянные. Уравнения движения вязко-упругой среды в лагранжевых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right) + \mu \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) + \mu_\perp \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial v_3}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Уравнение энергии в отсутствии притоков тепла может быть записано в виде

$$\rho_0 T \frac{dS}{dt} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \mu_\perp \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} \right)^2, \quad \left(\rho_0 T = \frac{\partial \Phi}{\partial S} \right). \quad (6.13)$$

Эти уравнения будут использованы в качестве усложненной модели, которая пригодна, в частности для описания структуры разрывов. Если в этих уравнениях коэффициенты вязкости μ и μ_\perp , определяющие диссипативность процесса, положить равными нулю, то получим гиперболическую систему уравнений теории упругости. Как известно, уравнения теории упругости обладают разрывными решениями. Однако, при любых отличных от нуля значениях μ и μ_\perp решения системы (6.12), (6.13) будут непрерывными, поскольку наличие разрывов привело бы к бесконечным вязким напряжениям. Следуя методу описания движений, предложенному в п. 6.2, наряду с системой уравнений (6.12), (6.13) может быть получена упрощенная система уравнений теории упругости для описания квазипоперечных волн в вязко-упругой среде, распространяющихся в одном направлении. Эта система уравнений (аналогичная уравнениям (6.9) для упругих волн) имеет вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.14)$$

Функция $R(u_1, u_2)$ определяется, как и прежде, выражением (6.10), $\nu = \mu/(2\rho_0)$.

Действительно, можно повторить вычисления, которые приводят от исходных уравнений теории упругости (6.1) к упрощенным уравнениям (6.9), но исходя теперь из уравнений (6.12), которые отличаются от уравнений (6.1) наличием вязких членов в правых частях. Учет этих членов привел бы к появлению добавочного члена

$$-\frac{\mu_{\perp}}{(d-f)} \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

в правой части равенства (6.4). В динамических уравнениях (6.5) это слагаемое даст несущественный вклад (порядка χ^2), а влияние вязкости будет представлено в правой части членом $\mu \frac{\partial^2 v_{\alpha}}{\partial x^2}$, пришедшим в уравнения (6.5) из исходных уравнений (6.12). Воспользовавшись кинематическими уравнениями и тем, что в самом грубом приближении решение представляет бегущую волну, движущуюся со скоростью f_* , этот член можно переписать в виде $-\mu f_* \frac{\partial^2 v_{\alpha}}{\partial x^2}$. С множителем $\sqrt{\rho_0 f_1}/2$ это слагаемое войдет в первое уравнение (6.7), а во втором уравнении, которое используется в самом грубом приближении, вязким членом можно пренебречь, это позволяет получить уравнения (6.14).

Вид вязкого члена в уравнениях (6.14) можно было бы написать сразу и даже связать коэффициенты μ и ν , если потребовать совпадения соответствующих корней дисперсионных уравнений для квазипоперечных волн при малой вязкости у исходной системы (6.12) и упрощенной (6.14).

6.4. Подобие нелинейных эффектов. Функцию $R(u_1, u_2)$ (6.10) можно представить в виде, не зависящем от упругих коэффициентов среды. При дальнейшем изложении индекс “*”, которым снабжались упругие коэффициенты, будем опускать. Переходя к движущейся системе координат, можно исключить f . Изменением масштабов зависимых и независимых переменных в уравнениях (6.9) величины $|g|$ и $|\kappa|$ могут быть приведены к единице. В этом случае система уравнений (6.9) и соотношений на разрыве (6.11) сохранят свой вид, а функция $R(u_1, u_2)$ приобретает одну из двух канонических форм, соответствующую значениям $\kappa = \pm 1$, $G = 1$, где $G = g/\kappa$.

Из предыдущего следует, что две задачи Коши для уравнений (6.9), (6.10) подобны, если начальные условия $u_\alpha^0(x)$ у этих задач таковы, что функции $u_\alpha^0(x/L)/\sqrt{G}$ этих задач совпадают при некоторых различных в общем случае параметрах L и $G = g/\kappa$, характеризующих начальные условия. Поэтому решение задачи с некоторыми заданными функциями $u_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, может оказаться подобным решению с меньшими по модулю $u_\alpha^0(x)$, если во второй задаче окажется меньше масштаб $\sqrt{G} = \sqrt{g/\kappa}$. Для изотропной среды с конкретным значением κ , величина \sqrt{G} , характеризующая волновую анизотропию, может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малых предварительных деформациях в плоскостях $x = \text{const}$. Таким образом, все нелинейные эффекты, и в частности, неединственность решений задач, могут проявляться в изотропном теле уже при сколь угодно малых деформациях (и, соответственно, напряжениях).

§ 7. Приложение 2. Достаточный признак несуществования или неединственности решений гиперболических уравнений, выражающих законы сохранения

Неединственность решений автомодельных задач теории упругости является одним из проявлений некоторой закономерности [36], справедливой для общего вида одномерных нелинейных гиперболических систем, выражающих законы сохранения. Ниже формулируется достаточное условие для системы гиперболических уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения, при выполнении которого решение автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва (задачи о поршне) либо не существует, либо неединственно. При этом предполагается, что решение состоит из автомодельных волн Римана и эволюционных разрывов, граничные условия на которых следуют из законов сохранения. Предлагаемое достаточное условие определяется существованием таких неэволюционных разрывов, которые можно рассматривать как последовательность двух эволюционных разрывов, движущихся с одинаковыми скоростями, если такое представление неэволюционного разрыва единственно.

Пусть имеется система гиперболических уравнений

$$\frac{\partial p_k(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial r_k(u_i)}{\partial x} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.1)$$

и соответствующие соотношения на разрывах

$$[p_k] - W[r_k] = 0 \quad (7.2)$$

Искомыми являются величины u_i , рассматриваемые как функции x и t . Функции p_k и r_k зависят от u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и таковы, что система (7.1) является гиперболической. Скорости характеристик системы c_1, c_2, \dots, c_n также являются функциями u_i . Величина W в (7.2) представляет скорость разрыва $W = dX/dt$, где $x = X(t)$ есть закон движения разрыва. Квадратные скобки обозначают разность значений заключенной в них величины, взятых непосредственно за и перед разрывом $[p] = p^l - p^r$.

Соотношения на разрыве (7.2) позволяют для каждого состояния перед скачком $u_i^r = U_i$ указать возможные состояния u_i^l за разрывом как функции скорости разрыва W . Это определяет

ударную адиабату – кривую, состоящую из всех возможных точек u_i^l , удовлетворяющих соотношениям (7.2) при заданных u_i^r . Ударная адиабата проходит через начальную точку A с координатами $u_i = U_i$, в которой имеется самопересечение ударной адиабаты, так как ее ветви касаются в точке A интегральных кривых n волн Римана [20]. Скорость скачка W представляет собой функцию положения точки на ударной адиабате.

Для системы уравнений (7.1), (7.2) рассмотрим задачу о распаде произвольного начального разрыва, которая формулируется так: при $t = 0$ плоскость $x = 0$ разделяет два полупространства с различными однородными состояниями: при $x > 0$, $u_i = U_i = \text{const}$ и при $x < 0$, $u_i = u_i^* = \text{const}$. При $t > 0$ от границы в обе стороны оси x идут последовательности автомодельных плоских волн в виде фронтов разрыва и автомодельных волн Римана, которые требуется найти. Можно также рассматривать автомодельную задачу только в полупространстве $x > 0$, задавая на его границе постоянные значения $u_i = u_i^*$ (задача о поршне).

Будем считать, что разрывы, которые могут использоваться в решении, должны, кроме уравнений (7.2), удовлетворять условиям априорной эволюционности (или условиям Лакса). Они выражаются в виде систем неравенств между скоростью скачка W и характеристическими скоростями c_j^r , c_k^l , ($j, k = 1, 2, \dots, n$) перед и за разрывом соответственно (пронумерованны в порядке неубывания).

$$c_k^r \leq W \leq c_{k+1}^r, \quad c_{k-1}^l \leq W \leq c_k^l, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

В условиях (7.3) следует исключить неравенства, содержащие не существующие c_0^l и c_{n+1}^r . Для каждого k такая пара неравенств определяет тип разрывов, которые называются разрывами, или ударными волнами k -го типа.

Неравенства (7.3) выделяют на ударной адиабате отрезки, соответствующие эволюционным ударным волнам (эволюционные отрезки).

Для наглядного представления неравенств (7.3) удобно пользоваться диаграммой, где по взаимно ортогональным осям отложены скорости, участвующие в неравенствах (7.3). На рис. 7.1 каждый из заштрихованных прямоугольников соответствует определенному $(k-1)$ -му и k -му типу ударных волн. Как и ранее на диаграмме изобразим ударную адиабату как некоторую кривую. По горизонтальной оси c_i^r и значения W изображаются в одном

и том же масштабе, а по вертикальному направлению только сохраняются неравенства между c_i^l и W .

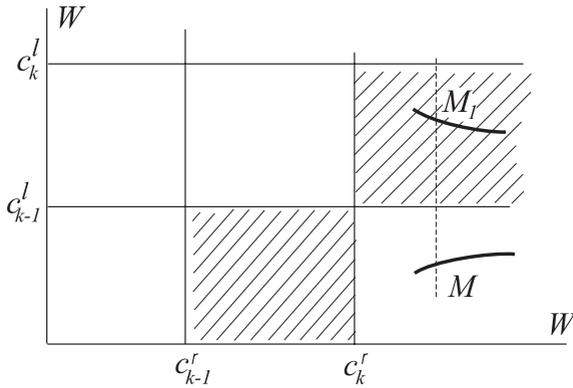


Рис. 7.1.

В дальнейшем исследовании основной интерес представляют разрывы, соответствующие на рис. 7.1 прямоугольникам, примыкающим к эволюционным снизу и справа. Для эволюционности таких разрывов число граничных условий должно было бы быть равно $n - 1$, в то время как на самом деле число соотношений (7.2), равно n , т.е. на единицу больше, чем нужно для эволюционности этих разрывов. Такие разрывы будем в дальнейшем называть неэволюционными{1} (в фигурных скобках стоит недостаток числа уходящих характеристик).

Подсчитывая число уходящих от разрывов характеристик различных типов, нетрудно заключить, что условиям эволюционности не противоречит формальная возможность замены такого неэволюционного разрыва двумя эволюционными разрывами, которые двигаются с одинаковыми скоростями. Очевидно, что, если один из двух разрывов, которыми можно заменить неэволюционный{1} разрыв, эволюционный k -го типа, то второй – также эволюционный $(k - 1)$ -го типа. Возможно ли на самом деле представление неэволюционного{1} разрыва последовательностью двух эволюционных разрывов (будем называть это распадом) зависит от свойств ударной адиабаты, и этот вопрос будет рассматриваться ниже.

Далее будет показано, что, если существует неэволюционный{1} отрезок ударной адиабаты, такой, что со скоростью, соот-

ветствующей некоторой точке этого отрезка, может распространяться по тому же состоянию перед разрывом эволюционный разрыв и при том только один, то решение автомодельной задачи типа распада произвольного разрыва (или задачи о поршне) в случае общего положения либо неединственно, либо не существует.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 7.1, когда над неэволюционным $\{1\}$ отрезком ударной адиабаты с начальной точкой A расположен эволюционный отрезок (на рис. 7.1 изображены только части ударной адиабаты). Рассмотрим точки M и M_1 ударной адиабаты, соответствующие одной и той же скорости W . В фазовом пространстве u_i на ударной адиабате также имеются соответствующие точки, которые будем обозначать теми же буквами M и M_1 . Так как разрывы $A \rightarrow M$ и $A \rightarrow M_1$ (A – начальная точка ударной адиабаты) движутся с одной и той же скоростью W , то выполнение законов сохранения (7.2) на разрывах $A \rightarrow M$ и $A \rightarrow M_1$ означает выполнение законов сохранения и на разрыве $M_1 \rightarrow M$, движущемся с той же скоростью W . Таким образом, разрыв $A \rightarrow M$ распадается, т.е. существует последовательность разрывов $A \rightarrow M_1$ и $M_1 \rightarrow M$, каждый из которых движется с той же скоростью W , что и неэволюционный $\{1\}$ разрыв $A \rightarrow M$, причем состояния впереди (A) и позади (M) у них совпадают. Согласно предыдущему, из эволюционности разрыва $A \rightarrow M_1$, который принадлежит k -му типу, следует эволюционность разрыва $M_1 \rightarrow M$, который, очевидно, принадлежит $(k-1)$ -му типу. Будем в дальнейшем при упоминании ударных адиабат указывать в скобках их начальные точки.

Рассмотрим серию задач о распаде произвольного разрыва (или задач о поршне), в которых фиксированы все волны (которые могут быть разрывами или волнами Римана), кроме волн с номерами k и $k-1$. При этом состояние перед k -й волной (A) будет фиксировано и будет приниматься в качестве начального состояния для ударной адиабаты (A).

Будем изменять величины (амплитуды) разрывов k -го и $(k-1)$ -го типов и рассматривать точки в пространстве u_i , соответствующие состояниям после прохождения указанных разрывов. В общем случае разрывы можно характеризовать их скоростями W_k и W_{k-1} . Очевидно, что при фиксированном состоянии A состояниям за этими разрывами в пространстве u_i соответствует двумерное множество–поверхность. Поскольку в силу эволюционности разрывов должно выполняться неравенство $W_{k-1} \leq W_k$, то

эта двумерная поверхность должна быть ограничена кривой, на которой $W_{k-1} = W_k$, т.е. неэволюционным{1} отрезком ударной адиабаты (A).

Если теперь разрешить изменяться остальным $n - 2$ волнам, которые ранее считались фиксированными, то кривая, соответствующая неэволюционной{1} части ударной адиабаты заметет, в случае общего положения, в пространстве u_i поверхность Σ размерности $n - 1$ (гиперповерхность). Эта поверхность разделит пространство u_i на две части, в одной из которых решение задачи о распаде разрыва содержит ударные волны k -го и $(k - 1)$ -го типов, скорости которых совпадают на поверхности Σ и равны скорости неэволюционного{1} разрыва. Будем называть это решение решением I.

Если существует только одна пара разрывов k -го и $(k - 1)$ -го типов с совпадающими скоростями, на которые распадается неэволюционный разрыв, то очевидно, что с другой стороны от поверхности Σ решение задачи не содержит одновременно разрывов k -го и $(k - 1)$ -го типов, скорости которых совпадали бы на поверхности Σ . Это означает, что, если решение в области, примыкающей к Σ с другой стороны, существует, то оно либо содержит хотя бы одну из волн Римана k -го и $(k - 1)$ -го типов, либо содержит разрывы k -го и $(k - 1)$ -го типов, скорости которых на поверхности Σ различны. Такие решения (если они существуют) будем называть решениями II. Область существования решений II в общем случае не связана с ударной адиабатой (A) и, следовательно, поверхность Σ в общем случае не является ее границей.

При этом по ту сторону от поверхности Σ , где нет решений I, решение II в общем случае либо не существует в некоторой зоне, примыкающей к поверхности Σ , либо оно там существует, но граница области существования этого решения не совпадает с Σ и тогда должна существовать область, где имеют место оба решения типа I и II, т.е. область неединственности решений.

Приведенное выше утверждение о неединственности или несуществовании решения теряет силу, если нет эволюционных разрывов, имеющих те же скорости, что и неэволюционные{1}, или если таких эволюционных разрывов два для каждого значения скорости. В первом случае возможные решения никак не связаны с наличием рассматриваемого неэволюционного разрыва и предложенным выше способом никаких заключений о решении сделать нельзя. Во втором случае существует две комбинации k -й

и $(k - 1)$ -й эволюционных разрывов в случае фиксированных амплитуд остальных $n - 2$ волн. Теперь может оказаться, что с одной стороны от поверхности Σ имеется решение I, содержащее одну комбинацию k -го и $(k - 1)$ -го разрывов, а с другой стороны – решение II, содержащее другую комбинацию разрывов указанных типов, причем поверхность Σ разделяет области, соответствующие решениям I и II. Таким образом, в этом случае решения, содержащие разрывы k -го и $(k - 1)$ -го типов, существуют по обе стороны от поверхности Σ и определяются единственным образом.

Если сопоставить полученное условие несуществования или неединственности в случае квазипоперечных упругих волн малой амплитуды, то можно заметить, что в этом случае решение всегда существует. Неединственность же проявляется как раз в тех случаях и в тех областях, которые предсказываются приведенным выше общим рассмотрением. Так при $\kappa > 0$ неединственность решений имеет место тогда, когда на ударной адиабате имеется неэволюционный {1} отрезок (PE на рис. 1.4), такой, что на диаграмме эволюционности (рис. 1.2 б, г) над ним (т.е. при тех же скоростях разрыва) имеется только один эволюционный отрезок ударной адиабаты. Область неединственности решений, как это предсказывается общим рассмотрением, примыкает на плоскости $u_1 u_2$ к отрезку PE (рис. 1.4). В случае $\kappa < 0$ неединственность решений имеет место всегда, поскольку всегда существует неэволюционный {1} отрезок ударной адиабаты DD' или PD' на рис. 1.5 и рис. 1.3 б с требуемыми для неединственности свойствами. На плоскости $u_1 u_2$ область неединственности примыкает к отрезкам ударной адиабаты, названным теми же буквами.

Найденное достаточное условие несуществования или неединственности решений может применяться, в частности, к случаю, когда амплитуды упругих волн не малы, или для упругих волн в средах с внутренней энергией другого вида.

Список литературы

- [1] Г. Я. Галин, “Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния”, *Докл. АН СССР*, **119**:6 (1958), 1106–1109, [MR 101050](#), [Zbl 0079.18603](#).
- [2] О. А. Олейник, “О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения”, *УМН*, **14**:2(86) (1959), 159–164, [MR 117426](#), [Zbl 0131.09101](#), [Zbl 0096.06603](#).
- [3] Г. Я. Галин, “К теории ударных волн”, *Докл. АН СССР*, **127**:1 (1959), 55–58, [MR 0112500](#), [Zbl 0092.42901](#).
- [4] И. М. Гельфанд, “Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений”, *УМН*, **14**:2(86) (1959), 87–158, [MR 110868](#), [Zbl 0127.04901](#).
- [5] Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе, *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, М., 1980, [MR 0613984](#).
- [6] А. А. Бармин, А. Г. Куликовский, “Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле”, *Докл. АН СССР*, **178**:1 (1968), 55–58.
- [7] А. Г. Куликовский, “О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации”, *ПММ*, **32**:6 (1968), 1125–1131, [Zbl 0187.25206](#).
- [8] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, М., 2001, [MR 1915786](#), [Zbl 1007.65058](#).
- [9] С. К. Годунов, “О неединственности “размазывания” разрывов в решениях квазилинейных систем”, *Докл. АН СССР*, **136**:2 (1961), 272–273, [MR 116141](#), [Zbl 0117.06401](#).
- [10] В. Ф. Дьяченко, “К задаче Коши для квазилинейных систем”, *Докл. АН СССР*, **136**:1 (1961), 16–17, [Zbl 0124.30604](#).
- [11] Н. Д. Введенская, “Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений”, *Докл. АН СССР*, **136**:3 (1961), 532–534, [Zbl 0114.30001](#).
- [12] В. А. Левин, В. В. Марков, С. Ф. Осинкин, “Иницирование детонации в водородовоздушной смеси взрывом сферического заряда ТНТ”, *Физика горения и взрыва*, **31**:2 (1995), 91–95.
- [13] В. А. Левин, В. В. Марков, С. Ф. Осинкин, “Моделирование иницирования детонации в горючей смеси газов электрическим разрядом”, *Химическая физика*, **3**:4 (1984), 611–613.
- [14] В. А. Левин, В. В. Марков, С. Ф. Осинкин, “Восстановление детонации с помощью разрушающейся оболочки”, *Докл. РАН*, **352**:1 (1997), 333–335.

- [15] А. А. Бармин, В. С. Успенский, “Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с выключением электропроводности”, *Изв. АН СССР, МЖТ*, **26**:4 (1986), 115–122.
- [16] D. R. Bland, *Nonlinear Dynamic Elasticity*, Toronto, etc., Waltham, 1969, [MR 0356636](#), [Zbl 0236.73035](#); Д. Р. Бленд, *Нелинейная динамическая теория упругости*, Мир, М., 1972, [MR 0356637](#), [Zbl 0242.73002](#).
- [17] Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 2, Наука, М., 1994, [MR 1461018](#), [Zbl 0224.73002](#).
- [18] А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, *Магнитная гидродинамика*, Логос, М., 2005, 325 с.
- [19] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, *Нелинейные волны в упругих средах*, Моск. лицей, М., 1998, 412 с.
- [20] P. D. Lax, “Hyperbolic systems of conservation laws”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 537–566, [MR 93653](#), [Zbl 0081.08803](#).
- [21] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978, [MR 0694242](#), [Zbl 0544.35001](#).
- [22] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Об устойчивости квазиперечных ударных волн в анизотропных упругих средах”, *ПММ*, **64**:6 (2000), 1020–1026, [MR 1838532](#), [Zbl 0984.74041](#).
- [23] Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит, “Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах”, *Докл. РАН*, **370**:1 (2000), 1–4, [MR 1755633](#), [Zbl 1047.35015](#).
- [24] Д. В. Релей, *Теория звука*, Гостехиздат, М., 1955.
- [25] А. Г. Куликовский, “О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов”, *Докл. АН СССР*, **275**:6 (1984), 1349–1352, [MR 746384](#).
- [26] А. Г. Куликовский, “О нелинейных волнах малой амплитуды в анизотропном упругом теле”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, К 70-летию со дня рожд. акад. Е. Ф. Мищенко, Труды МИАН, **211**, Наука, М., 1995, 268–303, [MR 1423113](#), [Zbl 0879.73014](#).
- [27] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, А. П. Чугайнова, “Некоторые проблемы нелинейной динамической теории упругости”, *Нелинейная динамика*, Труды МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 173–199, [MR 2234381](#).
- [28] A. G. Kulikovskii, A. P. Chugainova, E. I. Sveshnikova, “On the nonuniqueness of solutions to the nonlinear equations of elasticity theory”, *J. Engrg. Math.*, **55**:1–4 / August (2006), 97–110, [doi 10.1007/s10665-004-3064-7](#), [MR 2270810](#), [Zbl 1104.74035](#).
- [29] В. В. Лохин, Л. И. Седов, “Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов”, *ПММ*, **27**:3 (1963), 597–629, [MR 158584](#), [Zbl 0291.15025](#).

- [30] А. Г. Куликовский Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропном упругом теле, *ПММ*, **50**:4 (1986), 597–604, [MR 922194](#), [Zbl 0624.73032](#).
- [31] Е. И. Свешникова, “ПММ”, , **46**:4 (1982), 642–646.
- [32] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, “Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде”, *ПММ*, **46**:5 (1982), 831–840.
- [33] Л. В. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 6. *Гидродинамика*, Наука, М., 1986, [MR 0850480](#).
- [34] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, “Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства”, *ПММ*, **49**:2 (1985), 284–291, [MR 845179](#), [Zbl 0603.73019](#).
- [35] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, “О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде”, *ПММ*, **52**:6 (1988), 1007–1012, [MR 985042](#), [Zbl 0717.73027](#).
- [36] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, “Признак несуществования и неединственности решений автомодельных задач механики сплошной среды”, *ПММ*, **65**:6 (2001), 971–982, [MR 1888591](#), [Zbl 1026.35077](#).
- [37] А. Г. Куликовский, “Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии”, *Современные математические проблемы механики и их приложения*, к 80-летию со дня рожд. акад. Л. И. Седова, Труды МИАН, **186**, Наука, М., 1989, 132–139, [MR 1063738](#), [Zbl 0718.73028](#).
- [38] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, “О структуре квазипоперечных упругих ударных волн”, *ПММ*, **51**:6 (1987), 926–932, [MR 988040](#), [Zbl 0678.73020](#).
- [39] А. П. Чугайнова, “Исследование структуры квазипоперечных ударных волн для определенного класса упругих сред”, *Проблемы механики, экологии, технологии*, Наука, М., 1991.
- [40] А. П. Чугайнова, “О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве”, *ПММ*, **52**:4 (1988), 692–697, [MR 981985](#).
- [41] А. П. Чугайнова, “О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границу упругого полупространства”, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, **25**:3 (1990), 187–189.
- [42] А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, М., 1978, [MR 0619540](#), [Zbl 0523.76062](#).
- [43] А. П. Чугайнова, “О взаимодействии нелинейных волн в слабоанизотропной упругой среде”, *ПММ*, **57**:2 (1993), 149–156, [MR 1246306](#), [Zbl 0790.73019](#).

- [44] А. П. Чугайнова, “О перестройке нелинейной упругой волны в среде с малой анизотропией”, *Изв. РАН. Механика твердого тела*, **28**:5 (1993), 75–81.
- [45] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде”, *ЖВМ и МФ*, **38**:2 (1998), 315–323, [MR 1609111](#), [Zbl 0962.74030](#).
- [46] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Об устойчивости к двумерным возмущениям метастабильной ударной волны в вязкоупругой среде”, *ПММ*, **66**:1 (2002), 109–117, [Zbl 1094.74671](#).
- [47] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, “Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах”, *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 753–756, [Zbl 0217.25004](#).
- [48] Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, “Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков”, *Акустический журнал*, **15**:1 (1969), 40–47.
- [49] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений”, *ЖВМ и МФ*, **44**:6 (2004), 1119–1126, [MR 2098957](#), [Zbl 02208624](#).
- [50] А. Г. Куликовский, Н. И. Гвоздовская, “О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды”, *Современные методы механики сплошных сред*, к 90-летию со дня рожд. акад. Л. И. Седова, Труды МИАН, **223**, Наука, М., 1998, 63–73, [MR 1727280](#), [Zbl 01523059](#).
- [51] А. П. Чугайнова, “Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией”, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 240–256, [Mi tmf1961](#), [MR 2254878](#).
- [52] А. П. Чугайнова, “Автомодельные асимптотики волновых задач и структуры неклассических разрывов в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией”, *ПММ*, 2007 (в печати).
- [53] А. Г. Куликовский, “О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами: Волны рекомбинации”, *ПММ*, **32**:6 (1968), 1125–1131, [Zbl 0187.25206](#).
- [54] П. Жермен, *Курс механики сплошных сред*, Высшая школа, М., 1983, 400 с.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 7

*Андрей Геннадьевич Куликовский
Анна Павловна Чугайнова*

**Классические и неклассические разрывы
и их структуры в нелинейно-упругих средах
с дисперсией и диссипацией**

Компьютерная верстка: *О. Г. Мисюрин*

Сдано в набор 01.01.2007. Подписано в печать 10.04.2007.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 9,375. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru