О. Б. ЛУПАНОВ

# О СЛОЖНОСТИ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СЕТИ ГЛУБИНЫ 3

Автором было установлено [3], что минимальное число контактов, достаточное для реализации посредством параллельно-последовательной контактной схемы (П-схемы) любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, асимптотически равно $2^n/\log_2 n$. Е. А. Кондратьева установила [1], что эта оценка достигается на схемах, получающихся при каждом $n$ из одной сети. Для уточнения формулировок результатов введем следующие понятия. Двухполюсная сеть $S$ называется *n-универсальной*, если для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует расстановка по ребрам сети $S$ символов $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ (быть может, с повторениями; некоторые символы могут не использоваться), превращающая $S$ в контактную схему, реализующую $f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $U(n)$ — минимальное число ребер в $n$-универсальной сети. Тогда результат Е. А. Кондратьевой может быть сформулирован следующим образом:

$$U(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n},$$

причем эта оценка достигается уже в классе параллельно-последовательных сетей (П-сетей).

Определим по индукции следующие классы сетей.

$\sum_\vee^0 = \sum_\&^0$ содержит одну сеть, состоящую из одного ребра.

Класс $\sum_\vee^k$ $(k \geqslant 1)$ определяется следующим образом:

(1) $\sum_\&^{k-1} \cup \sum_\vee^{k-1} \subseteq \sum_\vee^k$;

(2) если $S_1 \in \sum_\vee^k$, $S_2 \in \sum_\vee^k$ и сеть $S$ получена в результате параллельного соединения сетей $S_1$ и $S_2$, то $S \in \sum_\vee^k$;

(3) $\sum_\vee^k$ не содержит никаких других сетей, кроме предусмотренных п. (1) и (2).

Класс $\sum_\&^k$ определяется двойственным образом.

Пусть, наконец, $\sum^\infty = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sum_\vee^k$ $\left(\text{очевидно, что } \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sum_\vee^k = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sum_\&^k\right)$. Таким образом, класс $\sum^\infty$ есть класс всех параллельно-последовательных сетей.

Пусть $U_\vee^k(n)$ (соответственно $U_\&^k(n)$, $U^\infty(n)$) — минимальное число ребер в $n$-универсальной сети из $\sum_\vee^k$ (соответственно из $\sum_\&^k$, $\sum^\infty$)[1]. Очевидно, что $U_\vee^k(n) = U_\&^k(n)$. Это общее значение обозначим через $U^k(n)$.

[1] Здесь $k \geqslant 2$. Очевидно, что при этом условии такие сети существуют. При $k=1$ универсальных $n$-сетей не бывает.

Ясно, что

$$U^2(n) \geqslant U^3(n) \geqslant \ldots \geqslant U^\infty(n). \tag{1}$$

Из уже сказанного следует, что

$$U^\infty(n) \geqslant \frac{2^n}{\log_2 n}. \tag{2}$$

Из доказательства теоремы Е. А. Кондратьевой следует, что

$$U^7(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

А. Д. Коршунов показал, что

$$U^4(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема.

$$U^3(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Заметим, что дальнейшее уменьшение «глубины» $k$ (с сохранением той же асимптотики) невозможно: как известно, функция $x_1 + \ldots + x_n \pmod 2$ имеет сложность $n2^{n-1}$ в классе параллельно-последовательных схем глубины 2. Из известных результатов следует, что

$$U^2(n) = n2^{n-1}.$$

Доказательство теоремы. В силу (1) и (2) достаточно показать, что

$$U^3(n) \leqslant \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Метод построения соответствующей сети получается путем переделки метода [4] (§ 4). Как и в [4], множество наборов

$$(\bar{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d), \quad (\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_d), \ldots, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, \bar{\alpha}_d)$$

будем называть *сферой* с центром $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Пусть $\varphi(u_1, \ldots, u_d)$ — характеристическая функция этой сферы. Тогда

$$\varphi(u_1, \ldots, u_d)\, u_l^{\bar{\alpha}_l} = u_1^{\alpha_1} \ldots u_{l-1}^{\alpha_{l-1}} u_l^{\bar{\alpha}_l} u_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \ldots u_d^{\alpha_d} \quad (1 \leqslant l \leqslant d). \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\varphi = \psi\chi,$$

где

$$\psi = u_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \ldots \vee u_d^{\bar{\alpha}_d},$$

$$\chi = \mathop{\&}_{1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant d} \left(u_{l_1}^{\alpha_{l_1}} \vee u_{l_2}^{\alpha_{l_2}}\right).$$

Поэтому $\varphi$ может быть реализована схемой с сетью из $\sum_{\&}^{2}$, имеющей $d^2$ ребер.

Как известно (см., например, [5], стр. 75—77), в случае, когда $d$ — степень двойки, множество всех наборов длины $d$ можно разбить на попарно не пересекающиеся сферы. Пусть

$$\varphi_i(\tilde{u}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant \frac{2^d}{d},$$

— характеристические функции этих сфер.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики. Обозначим наборы аргументов

$$(x_1, \ldots, x_a),\ (x_{a+1}, \ldots, x_{a+b}),\ (x_{a+b+1}, \ldots, x_{a+b+c}),\ (x_{a+b+c+1}, \ldots, x_{a+b+c+d})$$

соответственно через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\tilde{u}$ ($a+b+c+d=n$; $d$ — степень двойки). Пусть

$$f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho}}(\tilde{z}, \tilde{u}) = \varphi_i(\tilde{u})\, f(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, \tilde{z}, \tilde{u}).$$

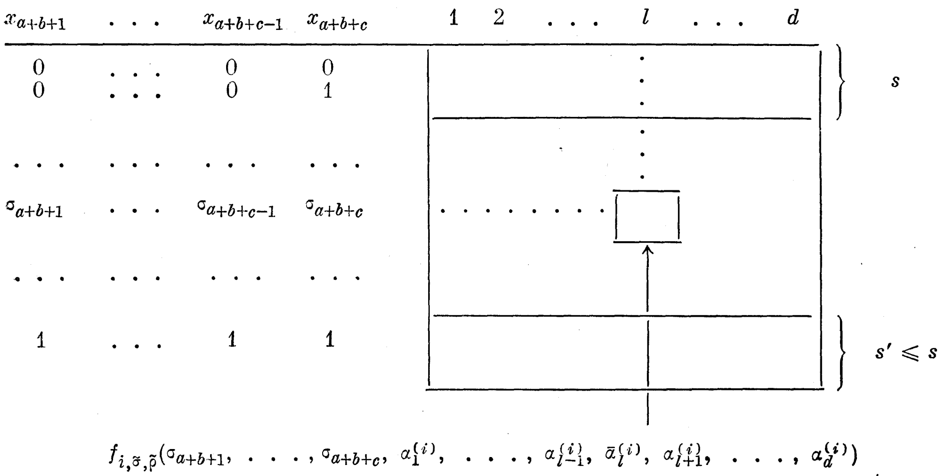
Будем обозначать через $K_{\tilde{\beta}}(\tilde{v})$ конъюнкцию $v_1^{\beta_1} \ldots v_m^{\beta_m}$ ($\tilde{v} = (v, \ldots, v_m)$ — набор аргументов, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ — набор их значений). Легко видеть, что

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) = \bigvee_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho}} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\, K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})\, f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho}}(\tilde{z}, \tilde{u}).$$

Функция $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho}}(\tilde{z}, \tilde{u})$ принимает значения, отличные от 0, лишь на наборах вида

$$(\sigma_{a+b+1}, \ldots, \sigma_{a+b+c}, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{l-1}^{(i)}, \bar{\alpha}_l^{(i)}, \alpha_{l+1}^{(i)}, \ldots, \alpha_d^{(i)})$$

(здесь $\sigma_{a+b+r}$ есть 0 или 1 при $1 \leqslant r \leqslant c$; $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_d^{(i)})$ — центр $i$-й сферы, $1 \leqslant l \leqslant d$), и поэтому может быть задана таблицей.




Строки таблицы соответствуют наборам $(\sigma_{a+b+1}, \ldots, \sigma_{a+b+c})$, столбцы — наборам $i$-й сферы ($d$ штук). Разобьем строки матрицы $M$, определяющей значения функции, на полосы $A_1, \ldots, A_p$, содержащие по $s$ строк (последняя полоса может содержать меньшее число строк). Очевидно, что

$$p \leqslant \frac{2^k}{s} + 1.$$

Пусть $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k}$ — функция, совпадающая с $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho}}$ на полосе $A_k$ в $M$ и равная 0 вне этой полосы. Столбцы матрицы, соответствующей функции $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k}$, разбиваются на множества одинаковых между собой столбцов. Пусть $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,\tilde{\tau}}$ — множество столбцов, равных $\tilde{\tau}$ (в полосе $A_k$). Следуя А. Д. Коршунову [2], введем параметр $q$ и разобьем каждое множество $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,\tilde{\tau}}$ на подмножества (быть может, пересекающиеся) $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,\tilde{\tau},m}$, содержащие по $q$ столбцов. Если множество содержало $t$ столбцов, то из него получится $\left]\frac{t}{q}\right[ \leqslant \frac{t}{q} + 1$ подмножеств. Будем считать, что при любых фиксированных $i$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\rho}$, $k$ общее число подмножеств одно и то же и равно $N$. Тогда

$$N \leqslant \frac{d}{q} + 2^s.$$

Перенумеруем теперь (при фиксированных $i$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\rho}$, $k$) подмножества $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,\tilde{\tau},m}$, вводя новый индекс $j$: $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Пусть $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$ есть функция, совпадающая с $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k}$ на подмножестве столбцов $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$ и равная 0 в остальных случаях. Матрица для функции $f_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$ имеет столбцы двух сортов:

а) столбцы из $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$, равные некоторому набору $\tilde{\tau}(i, \tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, k, j)$ в полосе $A_k$ и состоящие из нулей вне $A_k$;

б) остальные столбцы, состоящие сплошь из нулей. Поэтому эта функция может быть представлена в виде конъюнкциии двух функций, зависящих соответственно от $\tilde{u}$ и от $\tilde{z}$:

1) функции $f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$, равной 1 на столбцах из $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$ и равной 0 на остальных столбцах;

2) функции $f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$, в матрице которой все столбцы равны $\tilde{\tau}(i, \tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, k, j)$ в полосе $A_k$ и состоят из нулей вне $A_k$.

В силу (3) функция $f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$ может быть представлена в виде

$$f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}) = \varphi_i(\tilde{u})\, f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}), \tag{4}$$

где

$$f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}) = \bigvee x_{a+b+c+l}^{\tilde{\alpha}_l^{(i)}}$$

(дизъюнкция берется по множеству номеров $l$ столбцов из $B_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}$; их $q$ штук).

Учитывая (4), получаем равенство (ср. с (12) в [4])

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) = \bigvee_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\, K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})\, \varphi_i(\tilde{u})\, f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{z})\, f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}). \tag{5}$$

Рассмотрим функции

$$g_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{z}) = \bigvee_{\tilde{\rho}} K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})\, f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{z}),$$

$$h_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{u}) = \bigvee_{\tilde{\rho}} K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})\, f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}).$$

Пусть $D_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) = \overline{K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})}$ (это — дизъюнкция переменных или их отрицаний). Легко проверить, что

$$h_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{u}) = \mathop{\&}_{\tilde{\rho}} \left(D_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) \vee f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u})\right)$$

и

$$\bigvee_{\tilde{\rho}} K_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})\, f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{z})\, f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u}) = g_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{z})\, h_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{u}).$$

Поэтому из (5) получаем

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) = \underbrace{\bigvee_{i,\tilde{\sigma},k,j} \underbrace{\underbrace{K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})}_{F^7_{\tilde{\sigma}};\ \Sigma^1_{\&}}\ \underbrace{\varphi_i(\tilde{u})}_{F^6_i;\ \Sigma^2_{\&}}\ \underbrace{g_{i,\tilde{\sigma},k,j}(\tilde{y}, \tilde{z})}_{F^5_{i,\tilde{\sigma},k,j};\ \Sigma^2_{\&}}\ \underbrace{\mathop{\&}_{\tilde{\rho}} \underbrace{\left(\underbrace{D_{\tilde{\rho}}(\tilde{y})}_{F^2_{\tilde{\rho}};\ \Sigma^1_{\vee}} \vee \underbrace{f^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j}(\tilde{u})}_{F^1_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j};\ \Sigma^1_{\vee}}\right)}_{F^3_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\rho},k,j};\ \Sigma^1_{\vee}}}_{F^4_{i,\tilde{\sigma},k,j};\ \Sigma^2_{\&}}}_{F^8_{i,\tilde{\sigma},k,j};\ \Sigma^2_{\&}}}_{F^9;\ \Sigma^3_{\vee}} \tag{6}$$

Будем строить П-схему для $f$, выбирая подсхемы для выделенных в (6) подформул так, чтобы их сети принадлежали указанным в (6) классам, а сложность удовлетворяла следующим условиям:

$L(F^1_{i,\tilde\sigma,\tilde\rho,k,j}) = q;$

$L(F^2_{\tilde\rho}) = b;$

$L(F^3_{i,\tilde\sigma,\tilde\rho,k,j}) = q + b;$

$L(F^4_{i,\tilde\sigma,k,j}) = 2^b(q + b);$

$L(F^5_{i,\tilde\sigma,k,j}) = 2^{b+c}(b + c)$ (к. н. ф. для функции от $b + c$ аргументов);

$L(F^6_{i}) = d^2;$

$L(F^7_{\tilde\sigma}) = a;$

$L(F^8_{i,\tilde\sigma,k,j}) = 2^b(q + b + 2^c(b + c)) + d^2 + a;$

$$L(F^9) = \frac{2^d}{d}\cdot 2^a pN(2^b(q + b + 2^c(b + c)) + d^2 + a) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^d}{d}\cdot 2^a\left(\frac{2^c}{s} + 1\right)\left(\frac{d}{q} + 2^s\right)\left(2^b(q + b + 2^c(b + c)) + d^2 + a\right).$$

Очевидно, что построенная таким способом П-схема имеет сеть, зависящую (при фиксированном $n$) только от значений параметров. Глубина ее равна трем. Положим

$$b = [2\log_2 n],\qquad c = [2\log_2\log_2 n],\qquad d = 2^{[\log_2 n]-1},$$
$$q = [\log_2^4 n],\qquad s = [\log_2 n - 5\log_2\log_2 n].$$

Тогда

$$d \asymp n,\qquad \frac{b}{q}\to 0,\qquad \frac{2^c(b + c)}{q}\to 0,$$
$$\frac{a + d^2}{q2^b}\to 0,\qquad \frac{s}{2^c}\to 0,\qquad \frac{q2^s}{d}\to 0.$$

Поэтому

$$L(F^9)\leqslant\frac{2^n}{s}\sim\frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность В. М. Храпченко, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Кондратьева.* Об универсальных П-сетях для функций алгебры логики от $n$ переменных. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 14. «Наука», 1965, 5—16.
2. *А. Д. Коршунов.* Об асимптотических оценках сложности некоторых классов контактных схем. «Кибернетика», № 2. Киев, 1965, 18—28.
3. *О. Б. Лупанов.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 3. М., Физматгиз, 1960, 61—80.
4. *О. Б. Лупанов.* О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе &, $\vee$, —. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 6. М., Физматгиз, 1961, 5—14.
5. *О. Б. Лупанов.* О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10. М., Физматгиз, 1963, 63—97.