О вентильных схемах

О. Б. Лупанов

Вентильные схемы являются одним из основных модельных объектов, на которых изучаются закономерности сложности управляющих систем. Целесообразность их изучения объясняется, с одной стороны, их простотой, и, с другой стороны, возможностью использовать методы и конструкции, разработанные для них, в случае «более сильных» классов управляющих систем.

Вентильную схему можно определить как ориентированный граф, в котором выделено некоторое подмножество вершин — множество полюсов — и эти вершины занумерованы. С каждой вентильной схемой S связывается матрица из нулей и единиц $A=\|a_{ij}\|$ — матрица проводимостей ($a_{ij}=1$ тогда и только тогда, когда в S имеется ориентированный путь из полюса i в полюс j). Очевидно, что матрица проводимостей любой вентильной схемы является транзитивной. Важным классом вентильных схем являются такие, в которых полюса разбиты на два подмножества: «входные» — с номерами $P=\{1, \ldots, p\}$ и «выходные» — с номерами $Q=\{p+1, \ldots, p+q\}$ и на матрицу проводимостей наложено дополнительное ограничение: $a_{ij}=0$, если $i\neq j$ и либо $i\in P, j\in P$, либо $i\in Q, j\in Q$, либо $i\in Q, j\in P$. В этом случае система проводимостей полностью определяется подматрицей данной матрицы, имеющей p строк и q столбцов; ее обычно и называют матрицей проводимостей.

Одной из основных задач в теории вентильных схем является задача синтеза — построение по данной матрице A вентильной схемы, имеющей в качестве матрицы проводимостей матрицу A. Для решения этой задачи существует тривиальный способ, сводящийся к непосредственному соединению полюсов вентилями. Однако этот способ является неэкономным. Поэтому задача синтеза уточняется — требуется указать метод построения схем, который, с одной стороны, является не очень трудоемким и, с другой стороны, позволяет строить достаточно простые схемы. Для характеристики сложности схем вводится функция $B(p, q)$ — минимальное число вентилей, достаточное для реализации любой матрицы с p строками и q столбцами (функция Шеннона). Пусть $B_r(p, q)$ — аналогичная функция для схем глубины r (глубина схемы — максимальная длина цепи от входа к выходу).

Первые результаты об оценках функций $B(p, q)$ и $B_r(p, q)$ были получены в работе автора [1].

Теорема 1 [1]. *Пусть выполнены условия**

а) $p \to \infty$;

б) $p \leqq q$;

в) $\dfrac{\log q}{p} \to 0$.

Тогда

$$B_2(p, q) \sim \frac{pq}{\log q}.$$

Следствие 1. При условиях а), б), в)

$$\frac{pq}{\log(pq)} \lesssim B(p, q) \lesssim \frac{pq}{\log q}.$$

Следствие 2. При условиях а), б), в) и дополнительном условии

г$_0$) $\dfrac{\log p}{\log q} \to 0$

выполняются соотношения

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim \frac{pq}{\log q}.$$

Конструкция, использованная в методе синтеза вентильных схем глубины 2, легла в основу методов синтеза «более сильных» классов управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, автоматов и т. д.) — см., например, [2].

Уточнение оценок для $B(p, q)$ было получено Э. И. Нечипоруком.

Теорема 2 [3, 4]. *Пусть выполнены условия* а) *и* б) *теоремы* 1, *а также условие*

г$_c$) $\lim \dfrac{\log p}{\log q} = \dfrac{\mu}{\mu(\varrho - 1) + \varrho}$, *где* μ, ϱ *— целые числа, большие нуля.*

Тогда

$$B(p, q) \sim B_3(p, q) \sim \frac{pq}{\log(pq)}.$$

Замечание. Условие г$_c$) включает важный в приложениях случай, когда $p \asymp q$.

Случай, когда не выполняется условие в), был исследован В. А. Орловым. Оказалось, что в этом случае функция $B_2(p, q)$ ведет себя «ступенчатообразно». Именно справедливы утверждения.

---

* Здесь и ниже имеется в виду, что p и q являются функциями некоторого параметра n, и имеются в виду асимптотические соотношения при $n \to \infty$; log означает логарифм по основанию 2.

Теорема 3 [5]. *Пусть* k *произвольное фиксированное целое положительное число. Тогда*

$$B_2([k \log q], q) \sim (k+1) q.$$

Теорема 4 [5]. *Пусть выполнены условия*

а′) $q \to \infty$,

в$_\alpha$) $\lim \dfrac{p}{\log q} = \alpha$, *причем* $\alpha > 1$, α *не целое.*

Тогда

$$B_2(p, q) \sim [\alpha+1] q.$$

Теорема 5 [5]. *Пусть* $q \geqq p2^{p-1} - p$. *Тогда*

$$B_2(p, q) = p2^{p-1} - p + q.$$

Теорема 6 [5]. *Пусть выполнено условие* а), *а также условия*

в$_1$) $\dfrac{p}{\log q} \to 1$,

д) $q \geqq p2^{p-1} - p$.

Тогда

$$B_2(p, q) \sim 2q.$$

Теорема 7 [5]. *Пусть выполнены условия* а), в$_1$), *а также*

д$^-$) $q \leqq 2(2^p - p - 1)$.

Тогда

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim 2q.$$

Теорема 8 [5]. *Пусть выполнены условия* а) *и*

д$^+$) $q \geqq 2(2^p - p - 1)$.

Тогда

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim 2 \cdot 2^p + q.$$

Наряду с задачей о реализации произвольных матриц (заданных размеров) рассматривался вопрос о реализации матриц из специальных классов и о реализации конкретных матриц.

Пусть $B_r(p, q, \alpha)$ функция Шеннона для матриц с p строками q столбцами, имеющих αpq единиц. Пусть

$$\alpha^* = \min(\alpha, 1-\alpha), \quad H(\alpha) = \alpha \log \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha) \log \frac{1}{1-\alpha}.$$

Э. И. Нечипорук доказал следующие утверждения.

Теорема 9 [3, 4]. *Пусть выполнены условия* б), *а также*

а$_\alpha$) $\alpha p \to \infty$,

е$_{\alpha,\varrho}$) $\dfrac{\log q}{\log \dfrac{1}{\alpha}} \to \varrho$, $\varrho > 0$, *целое*

ж$_{\alpha,\varrho}$) $q\alpha^{\varrho} \to \infty$.

Тогда

$$B_2(p, q, \alpha) \sim \frac{\alpha pq}{\varrho}.$$

Теорема 10 [12, 4]. *Пусть выполнены условия* а), б), *а также*

в$_\alpha$) $H(\alpha)\dfrac{p}{\log q} \to \infty$,

е$_\infty$) $\dfrac{\log q}{\log \dfrac{1}{\alpha^*}} \to \infty$.

Тогда

$$B_2(p, q, \alpha) \sim H(\alpha)\frac{pq}{\log q}.$$

Теорема 11 [4]. *Пусть выполнены условия* а), в$_\alpha$), е$_\alpha$), *а также*

г$_1$) $\log p \sim \log q$.

Тогда

$$B_3(p, q, \alpha) \sim H(\alpha)\frac{pq}{2\log q}.$$

Пусть $B_r^\gamma(p, q)$ — функция Шеннона для не всюду определенных матриц, у которых число определенных элементов — нулей и единиц — равно γpq (остальные $(1-\gamma)pq$ элементов не определены и при реализации матрицы заменяются нулями и единицами так, чтобы реализация была простейшей). Э. И. Нечипорук установил следующий факт.

Теорема 12 [13, 4]. *Пусть выполнены условия* а), б), *а также*

в$^\gamma$) $\dfrac{\gamma p}{\log q} \to \infty$,

е$^\gamma$) $\dfrac{\log q}{\log \dfrac{1}{\gamma}} \to \infty$.

Тогда

$$B_2^\gamma(p, q) \sim \gamma\frac{pq}{\log q}.$$

Конструкция, использованная при доказательстве верхней оценки в этой теоремы, применялась впоследствии многими авторами при реализации не всюду определенных булевых функций в различных классах схем (например, [6—9]).

При изучении сложности реализации конкретных матриц наиболее высокие оценки (порядка $p^{3/2}$ в случае квадратных матриц порядка p) были получены Э. И. Нечипоруком («матрицы без прямоугольников» — см. [10]), а также Т. Г. Тарьяном (матрицы Адамара — см. [11]).

Отметим в заключение некоторые задачи, решение которых, по-видимому, будет связано с созданием новых методов.

1. Получить асимптотическое выражение для $B(p, q)$ в случае $\log p \asymp \log q$ (например, при $\frac{\log p}{\log q} \to \delta$, δ — иррациональное число; т. е. снять ограничение г_c) — см. стр. 312).

2. Получить асимптотическую формулу для функции Шеннона $B(p)$ в случае схем, реализующих произвольные транзитивные матрицы с p строками и p столбцами (в которых не выделены специально входы и выходы); оценки

$$c_1 \frac{p^2}{\log p} \leqq B(p) \leqq c_2 \frac{p^2}{\log p}$$

получаются легко на основе, например, теоремы 1.

3. Построить «эффективно» последовательность матриц порядка p, которые реализуются лишь со сложностью, существенно большей, чем $p^{3/2}$.

Литература

[1] Лупанов, О. Б., О вентильных и контактно-вентильных схемах, *ДАН СССР*, т. 111, № 6, 1956, стр. 1171—1174.
[2] Лупанов, О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем, *Проблемы кибернетики*, вып. 10, 1963, стр. 63—97.
[3] Нечипорук, Э. И., О вентильных схемах, *ДАН СССР*, т. 148, № 1, 1963, срт. 50—53.
[4] Нечипорук, Э. И., О топологических принципах самокорректирования, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 5—102.
[5] Орлов, В. А., Реализация «узких» матриц вентильными схемами, *Проблемы кибернетики* вып. 22, 1970, стр. 45—52.
[6] Шоломов, Л. А., О реализации недоопределенных булевых функций схемами из функциональных элементов, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 215—226.
[7] Мадатян, Х. А., О реализации не всюду определенных матриц заданной «густоты» вентильными схемами глубины два, *Кибернетика*, Киев, № 6, 1973, стр. 12—15.
[8] Липатов, Е. П., Об одном случае неравномерного локального кодирования, *Проблемы кибернетики*, вып. 26, 1973, стр. 95—107.
[9] Pippenger, N., Information theory and the complexity of Boolean functions, *Math. Systems Theory*, v. 10, 1976/77, No. 2, pp. 129—167.
[10] Нечипорук, Э. И., Об одной булевской матрице, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 237—240.
[11] Tarján, T. G., Complexity of lattice-configurations, *Studia Sci. Math. Hungar.*, v. 10, 1975, pp. 203—211.
[12] Нечипорук, Э. И., О синтезе вентильных схем, *Проблемы кибернетики*, вып. 9, 1963, стр. 37—44.
[13] Нечипорук, Э. И., О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами, *ДАН СССР*, т. 163, № 1, 1965, стр. 40—42.

(Поступило 2-ого августа 1979 г.)