ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА
1958 г. том LI

О. Б. Лупанов

О ВОЗМОЖНОСТЯХ СИНТЕЗА СХЕМ ИЗ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Одной из задач теории схем является задача синтеза, т. е. построения схем, реализующих заданные функции, исходя из некоторого запаса средств.

Особый интерес представляет случай, когда используется сравнительно небольшой запас средств, и эти средства достаточно просты. Естественно, что стараются при этом строить возможно более простые схемы, реализующие данные функции.

Наиболее полно задача синтеза решена для случая, когда функции алгебры логики реализуются контактными схемами. Известно, что такая реализация всегда возможна. Пусть $L(f)$ — число контактов в простейшей схеме, реализующей функцию f. Введем функцию $L(n) = \max L(f)$ (максимум берется по всем функциям алгебры логики от n аргументов). Шеннон показал [7], что для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N(\varepsilon)$

$$(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n} < L(n) < (1+\varepsilon)\frac{2^{n+2}}{n},$$

причем доля функций от n аргументов, для реализации которых достаточно $(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}$ контактов, неограниченно убывает с ростом n.

Известно, что для некоторых функций использование, наряду с контактами, вентилей, сопротивлений и других элементарных средств, позволяет существенно упростить схемы. Может показаться, что расширение запаса средств дает возможность значительно упростить схемы для всех функций, однако это не так.

После того как автор установил (1954 г.), что добавление вентилей не позволяет существенно упростить схемы для подавляющего большинства функций, С. В. Яблонский высказал предположение, что это имеет место для более широкого запаса элементарных средств. Автором было показано [3], что при естественных предположениях оценка снизу для $L(n)$ не допускает существенного понижения. Позднее (1956 г.)

С. В. Яблонский заметил, что этот результат должен быть справедливым в более общем виде, именно для индекса простоты, частным случаем которого является число элементарных подсхем. Здесь это устанавливается для индекса простоты, удовлетворяющего некоторым естественным условиям.

§ **1.** Обобщим определение схемы и связанных с ним понятий.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{M}=\{a_1, \ldots, a_z\}$ — конечное множество и $\mathcal{E}_i (i=0, 1, \ldots, h)$ — непустые его подмножества, причем $\bigcup\limits_{i=1}^{h}\mathcal{E}_i=\mathfrak{M}$ (подмножества $\mathcal{E}_i$ не обязательно попарно различны). Совокупность множеств $\mathfrak{M}$, $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_h$ будем называть *сетью* и обозначать $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0; \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_h)$*.

Элементы $\mathfrak{M}$ будем называть *вершинами* сети, элементы $\mathcal{E}_0$ — *полюсами* сети. Число элементов подмножества $\mathcal{E}_i$ будем называть *степенью* этого *подмножества* (и обозначать m_i). Максимальную степень подмножеств $\mathcal{E}_i (i\neq 0)$ будем называть *степенью сети* (и обозначать m). Пусть h_s — число подмножеств $\mathcal{E}_i$ сети $(i\neq 0)$ степени s; упорядоченную совокупность чисел $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ будем называть *степенной структурой сети*, число $\mu=\frac{1}{h}\sum\limits_{s=1}^{m} sh_s$ будем называть *средней степенью сети*. (В дальнейшем подмножества $\mathcal{E}_i (i\neq 0)$ сети будем просто называть *подможествами*.)

Две сети $\mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_0^{(1)}; \mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_h^{(1)})$ и $\mathfrak{M}_2(\mathcal{E}_0^{(2)}; \mathcal{E}_1^{(2)}, \ldots, \mathcal{E}_h^{(2)})$ будем называть *изоморфными*, если между $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ и между $\{\mathcal{E}_i^{(1)}\}$ и $\{\mathcal{E}_j^{(2)}\}$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что

1) соответствующие (друг другу) множества $\mathcal{E}_i^{(1)}$ и $\mathcal{E}_j^{(2)}$ состоят из соответствующих (друг другу) элементов;

2) $\mathcal{E}_0^{(1)}$ и $\mathcal{E}_0^{(2)}$ соответствуют друг другу.

В дальнейшем сети рассматриваются с точностью до изоморфизма, в том смысле, что две изоморфные сети считаются одинаковыми.

Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ *подставлено* вместо множества $\mathfrak{B}=\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$, если задано отображение множества $\mathfrak{A}$ на множество $\mathfrak{B}$. (Очевидно, это имеет смысл только при $p\geqslant q$.)

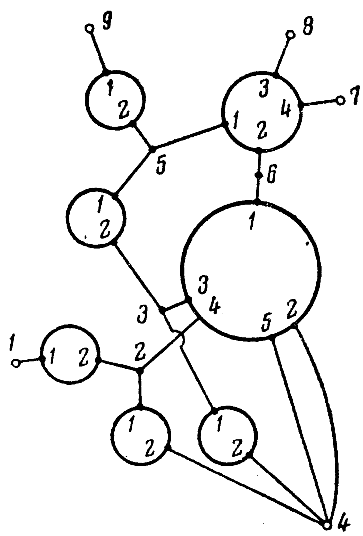
Определение 2. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество конечных множеств $E_j=\{\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jp_j}\}$, называемых *элементарными подсхемами*. Сеть $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0; \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_h)$ с подставленными вместо каждого из подмножеств $\mathcal{E}_i (i\neq 0)$ элементарными подсхемами из $\mathfrak{S}$ (не обязательно различными) будем называть *схемой* над множеством элементарных подсхем $\mathfrak{S}$ и обозначать $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0; E_{j_1}, \ldots, E_{j_h})$ (E_{j_i} подставлено вместо $\mathcal{E}_i$).

---

* Ср. с определением графа в [6] и сети в [5]. Более подробно см. наст. сб., стр. 228.

Элементы из E_j будем называть *полюсами* этой элементарной подсхемы. Вершины сети $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0;\ \mathcal{E}_1,\ \ldots,\ \mathcal{E}_h)$ будем называть *узлами* схемы $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0;\ E_{j_1},\ \ldots,\ E_{j_h})$. Полюсы сети будем называть *полюсами схемы*. Максимальное число элементов E_j будем называть *степенью* $\mathfrak{S}$. Понятия степени подсхемы, степени, средней степени и степенной структуры схемы вводятся так же, как для сетей. Ясно, что средняя степень сети, из которой получена схема, не превосходит средней степени схемы.

Совокупность подмножеств $\{\mathcal{E}_{i_1},\ \ldots,\ \mathcal{E}_{i_t}\}$; $0 < i_r < h$, $i_{r_1} \neq i_{r_2}$ при $r_1 \neq r_2$ с подставленными вместо каждого из них элементарными подсхемами (в соответствии с подстановкой элементарных подсхем вместо подмножеств $\mathcal{E}_i$ в схеме $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0;\ E_{j_1},\ \ldots,\ E_{j_h})$ будем называть *подсхемой* схемы $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0;\ E_{j_1},\ \ldots,\ E_{j_h})$. Две подсхемы называются *непересекающимися*, если множества номеров входящих в них подмножеств $\mathcal{E}_{i_r}^{j}$ не пересекаются.

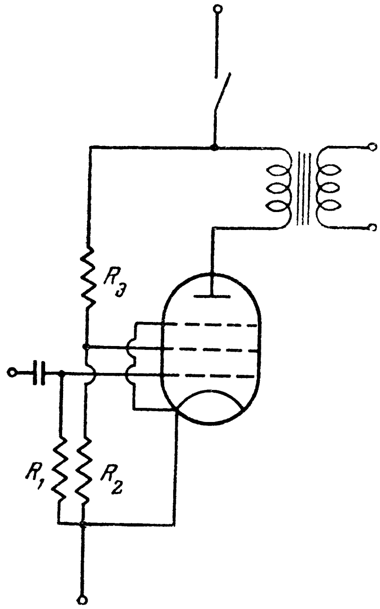


Фиг. 1

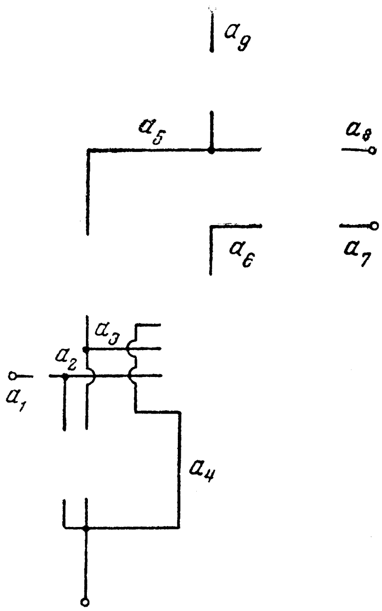
Две схемы над $\mathfrak{S}$ будем называть *изоморфными*, если они получены из изоморфных сетей, так что вместо соответственных подмножеств сети подставлена одна и та же элементарная подсхема, причем образы одноименных полюсов суть соответственные вершины сетей.

В определении схемы ничего не говорится (и этого достаточно для дальнейшего) о том, что представляют из себя элементарные подсхемы с функциональной точки зрения. Важно лишь, что подсхемы имеют полюсы, и полюсы элементарных подсхем в схеме каким-то образом соединены между собой. Геометрически схему можно изображать следующим образом: подсхемы изображаются кружками с отростками (число отростков равно числу полюсов элементарных подсхем); отростки некоторым образом соединены между собой (пример см. на фиг. 1).

Покажем теперь на примере, как по «реальной» схеме строится «абстрактная». Пусть имеется электрическая схема (фиг. 2). Удалим из нее элементы (сопротивления, лампу и т. д., — элементарные подсхемы; вообще же элементарными подсхемами можно считать и целые совокупности элементов и части элементов). Останутся проводники (фиг. 3). Связные конфигурации проводников объявим вершинами схемы (множество $\mathfrak{M}$). Совокупность конфигураций, которые



Фиг. 2



Фиг. 3

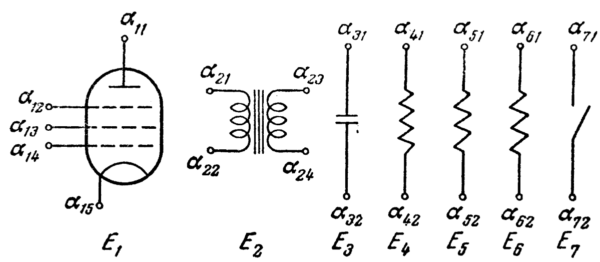
были соединены с i-м элементом схемы, назовем множеством $\mathscr{E}_i$; совокупность конфигураций, соединенных с полюсами схемы, — множеством $\mathscr{E}_0$. Нужная «абстрактная» схема получается из сети

$$\mathfrak{M}(\mathscr{E}_0;\ \mathscr{E}_1,\ \mathscr{E}_2,\ \mathscr{E}_3,\ \mathscr{E}_4,\ \mathscr{E}_5,\ \mathscr{E}_6,\ \mathscr{E}_7):$$

$$\mathfrak{M}=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\};$$

$$\mathscr{E}_0=\{a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_8,\ a_9\},\ \mathscr{E}_1=\{a_1,\ a_2\},\ \mathscr{E}_2=\{a_2,\ a_4\},\ \mathscr{E}_3=\{a_3,\ a_4\},$$

$$\mathscr{E}_4=\{a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_6\},\ \mathscr{E}_5=\{a_3,\ a_5\},\ \mathscr{E}_6=\{a_5,\ a_9\},\ \mathscr{E}_7=\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8\}$$



Фиг. 4

и элементарных подсхем (фиг. 4)

$$E_1=\{\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{15}\},\ E_2=\{\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23},\ \alpha_{24}\},$$

$$E_3=\{\alpha_{31},\ \alpha_{32}\},\ E_4=\{\alpha_{41},\ \alpha_{42}\},$$

$$E_5=\{\alpha_{51},\ \alpha_{52}\},\ E_6=\{\alpha_{61},\ \alpha_{62}\},\ E_7=\{\alpha_{71},\ \alpha_{72}\}$$

следующей подстановкой:

E_3 вместо $\mathcal{E}_1$: $\begin{pmatrix}\alpha_{31} & \alpha_{32}\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}$, E_6 вместо $\mathcal{E}_5$: $\begin{pmatrix}\alpha_{61} & \alpha_{62}\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$,

E_4 вместо $\mathcal{E}_2$: $\begin{pmatrix}\alpha_{41} & \alpha_{42}\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}$, E_7 вместо $\mathcal{E}_6$: $\begin{pmatrix}\alpha_{71} & \alpha_{72}\\ a_9 & a_5\end{pmatrix}$,

E_5 вместо $\mathcal{E}_3$: $\begin{pmatrix}\alpha_{51} & \alpha_{52}\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$, E_2 вместо $\mathcal{E}_7$: $\begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ a_5 & a_6 & a_8 & a_7\end{pmatrix}$.

E_1 вместо $\mathcal{E}_4$: $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15}\\ a_6 & a_4 & a_3 & a_2 & a_4\end{pmatrix}$.

§ 2. В настоящем параграфе формулируется и доказывается основной результат.

Лемма 1. *Пусть* $\xi_s \geqslant 0$ $(s=1, \ldots, m)$, $f(\xi_1, \ldots, \xi_m) \equiv \sum_{s=1}^{m} s\xi_s - \mu = 0$, $\mu \geqslant 1$; *тогда*

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_m) \equiv \sum_{s=1}^{m} \xi_s \ln \xi_s \geqslant -\mu(1+\ln 2)$$

(в случае $\xi_s = 0$ выражение $\xi_s \ln \xi_s$ полагается равным 0).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $F(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ не может достигать абсолютного минимума на границе рассматриваемой области. Тогда числа $\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0$, при которых $F(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ достигает минимума, удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_s} F(\xi_1, \ldots, \xi_m) - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi_s} f(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \quad s = 1, \ldots, m$$

и

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0,$$

откуда

$$\xi_s^0 = \frac{1}{e} t_0^s,$$

где $t_0 > 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{s=1}^{m} s t^s = e\mu,$$

или

$$mt^{m+2} - (m+1)t^{m+1} + t - e\mu(1-t)^2 = 0.$$

Так как при $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$

$$mt^{m+2} - (m+1)t^{m+1} < 0$$

и

$$t - e\mu(1-t)^2 \leqslant 0$$

(последнее из-за $e\mu > 2$), то $t_0 > \frac{1}{2}$ и

$$\min F(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{e} t_0^s (s \ln t_0 - 1) > \sum_{s=1}^{m} \frac{s}{e} t_0^s (\ln t_0 - 1) > -\mu(1+\ln 2).$$

Лемма 2. *Число различных* (т. е. неизоморфных) *сетей с фиксированным числом полюсов данной степенной структуры* $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ *не превосходит**

$$[2e(2e^2)^{\mu}\mu^{\mu}]^h\, h^{(\mu-1)h} \quad \left(h=\sum_{s=1}^{m} h_s,\ \ \mu=\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{m} sh_s\right).$$

Доказательство. Число вершин каждой такой сети не превосходит $\sum_{s=1}^{m} sh_s=\mu h=p$ (так как $\mathcal{E}_0 \subseteq \bigcup_{i\neq 0} \mathcal{E}_i$). Каждой сети поставим в соответствие матрицу (инциденций)

$$\| a_{ij} \|, \ i=0,\ 1,\ \ldots,\ h;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu h,$$

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } a_j \in \mathcal{E}_i \ \ (a_j,\ \mathcal{E}_i \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}_0;\ \mathcal{E}_1,\ \ldots,\ \mathcal{E}_h)), \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

Можно предполагать, что вершины сети занумерованы так, что $\{a_1, \ldots, a_{m_0}\}=\mathcal{E}_0$. Строки матриц будем считать занумерованными первыми индексами стоящих в них элементов a_{ij} (т. е. номерами $0, 1, \ldots, h$). Матрицы, различающиеся только порядком 1-й, 2-й, ..., h-й строк, соответствуют изоморфным сетям. Во всех рассматриваемых матрицах число строк, имеющих s единиц, равно h_s. Различных строк с s единицами может быть $p_s=C_p^s$. Пусть $h_s\neq 0$. Число различных совокупностей из h_s строк, каждая строка в которых имеет s единиц, равно числу сочетаний с повторениями из p_s элементов по h_s, т. е.

$$C_{p_s+h_s-1}^{h_s} \leqslant \frac{(C_p^s+h_s-1)^{h_s}}{h_s!} \leqslant \frac{(2C_p^s)^{h_s}}{h_s!} \leqslant \frac{2^{h_s}p^{sh_s}}{(s!)^{h_s}h_s!}\,.$$

Применяя к последнему выражению формулу Стирлинга, получим

$$C_{p_s+h_s-1}^{h_s} < \frac{(h\mu)^{sh_s}e^{(s+1)h_s}2^{h_s}}{s^{sh_s}\cdot h_s^{h_s}}\,.$$

Число всех рассматриваемых матриц (с точностью до перестановки 1-й, 2-й, ..., h-й строк) равно

$$Q=\prod_{h_s\neq 0} C_{p_s+h-1}^{h_s} < \prod_{h_s\neq 0} \frac{(h\mu)^{sh_s}\cdot e^{h_s(s+1)}\,2^{h_s}}{s^{sh_s}\cdot h_s^{h_s}} = \prod_{s=1}^{m} \frac{(h\mu)^{sh_s}\cdot e^{h_s(s+1)}\,2^{h_s}}{s^{sh_s}\, h_s^{h_s}}\,,$$

где $h_s^{h_s}$ считается равным 1, если $h_s=0$.

---

* Может быть получена более точная верхняя оценка; в случае двухполюсных сетей степени 2 она имеет вид $\left(C\dfrac{h}{\lg^2 h}\right)^h$, где C — некоторая константа.

Обозначим $\frac{h_s}{h}$ через ξ_s. Тогда

$$\ln Q \leqslant \ln(\mu h)\sum_{s=1}^{m} sh_s + \sum_{s=1}^{m} h_s(s+1) + \ln 2\sum_{s=1}^{m} h_s - h\ln h\sum_{s=1}^{m}\xi_s - h\sum_{s=1}^{m}\xi_s\ln\xi_s -$$

$$-h\sum_{s=1}^{m}\xi_s s\ln s \leqslant (\mu-1)h\ln h + h[\mu\ln\mu + \mu(2+\ln 2)+1+\ln 2].$$

Число различных сетей степенной структуры $(h_1, \ldots, h_m)$ не превосходит Q, что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть*

$$G(k, N) = (q(N)\cdot g(k)\cdot k)^{ck}$$

есть неубывающая функция k, *причем*

$$\frac{\log_b q(N)}{\log_b\log_b N}\to 0\ (N\to\infty),\ g(k)\to a\ (k\to\infty),$$

а и с — положительные константы. Тогда минимальный корень $k(N)$ *неравенства* $G(k, N)\geqslant N$ *удовлетворяет условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $N > N(\varepsilon)$

$$k(N) > \frac{1-\varepsilon}{c}\,\frac{\log_b N}{\log_b\log_b N} = k_{N,\varepsilon}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$d = \frac{(q(N)\cdot g(k_{N,\varepsilon}))\cdot k_{N,\varepsilon}^{ck_{N,\varepsilon}}}{N}\to 0$$

при $N\to\infty$. Покажем, что это условие выполнено. В самом деле,

$$d = \left[\frac{\left\{q(N)\cdot g(k_{N,\varepsilon})\cdot\frac{1-\varepsilon}{c}\cdot\frac{\log_b N}{\log_b\log_b N}\right\}^{\frac{1-\varepsilon}{\log_b\log_b N}}}{b}\right]^{\log_b N} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1-\varepsilon}{c\log_b\log_b N}\cdot q(N)\cdot g(k_{N,\varepsilon})\right)^{\frac{1-\varepsilon}{\log_b\log_b N}}}{b^{\varepsilon}}\right]^{\log_b N}\to 0,$$

так как при $N > N(\varepsilon)$ числитель дроби в квадратных скобках станет меньше $b^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат.

Пусть имеется последовательность $\mathfrak{S}$ множеств элементарных подсхем $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n, \ldots$ ($\mathfrak{S}_n$ степени не более $\tilde{m} = \mathrm{const}$ и содержит M_n подсхем); над каждым $\mathfrak{S}_n$ построены схемы $\tilde{S}$, обладающие свойствами:

1) средняя степень $\tilde{\mu}(\tilde{S})$ схем заключена в пределах $1 < \mu' \leqslant \tilde{\mu}(\tilde{S}) \leqslant \mu''$, μ' и μ'' — константы;

2) число полюсов принимает не более l_n различных значений.

Пусть далее $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, \ldots$ — последовательность некоторых множеств ($\mathfrak{N}_n$ содержит N_n элементов). Пусть схемы над $\mathfrak{S}_n$ реализуют элементы из $\mathfrak{N}_n$ (т. е. каждой схеме поставлено в соответствие некоторое подмножество из $\mathfrak{N}_n$; как это соответствие устроено, в данном случае совершенно не имеет значения), причем изоморфные схемы реализуют одно и то же подмножество элементов, каждая схема над $\mathfrak{S}_n$ реализует не более ν_n элементов из $\mathfrak{N}_n$, и схемами над $\mathfrak{S}_n$ можно реализовать все элементы из $\mathfrak{N}_n$ (т. е. подмножества множества $\mathfrak{N}_n$, реализуемые схемами, покрывают все множество $\mathfrak{N}_n$).

Пусть на множестве всех подсхем S рассматриваемых схем определена функция $L(S)$ (индекс простоты), обладающая свойством: если S_1 и S_2 — две подсхемы (вообще говоря, неэлементарные) некоторой схемы, не имеющие общих элементарных подсхем, то

$$L(S_1 \cup S_2) \geqslant L(S_1) + L(S_2).$$

Введем функцию $L_{\mathfrak{N}, \mathfrak{S}}(n)$ — наименьшее число такое, что схемами, имеющими индекс простоты не более $L_{\mathfrak{N}, \mathfrak{S}}(n)$, можно реализовать все элементы $\mathfrak{N}_n$.

Теорема. *Если при* $n \to \infty$

$$N'_n = \frac{N_n}{\nu_n l_n} \to \infty, \tag{1}$$

$$\frac{\log_b M_n}{\log_b \log_b N'_n} \to 0 \tag{2}$$

и для всех элементарных подсхем E индекс простоты удовлетворяет условию

$$L(E) \geqslant \alpha (m(E) - 1) + \beta^* \tag{3}$$

(α и β — *неотрицательные константы*, $\alpha + \beta > 0$), *то при ограничениях, наложенных выше на* $\mathfrak{f}$, $\bar{\mu}(S)$, l_n, $L(S)$

$$L_{\mathfrak{N}, \mathfrak{f}}(n) > (1 - \varepsilon)\left(\alpha + \frac{\beta}{\mu'' - 1}\right) \frac{\log_b N'_n}{\log_b \log_b N'_n} = L_{n, \varepsilon} \tag{4}$$

для любого $\varepsilon > 0$ *и* $n > n(\varepsilon)$, *причем доля элементов из* $\mathfrak{N}_n$, *реализуемых схемами с индексом простоты, не превосходящим* $L_{n, \varepsilon}$, *неограниченно убывает с ростом* n.

Замечание 1. Требования (1)—(3) — естественны. Обычно они выполняются (см. примеры § 3). Требование (1) — условие того, чтобы $\mathfrak{N}_n$ покрывалось подмножествами, число которых стремится к ∞. Требование (2) — ограничение на число средств, употребляемых в схемах, и на сложность схем.

Замечание 2. Из (3) следует, что если средняя степень схемы S есть μ, то $L(S) \geqslant h((\mu - 1)\alpha + \beta)$.

* $m(E)$ — степень элементарной подсхемы E.

Доказательство. В силу замечания 2, число схем над $\mathfrak{S}_n$ с индексом простоты не большим L, получающихся из одной сети степенной структуры $(h_1, \ldots, h_m)$, не превосходит

$$M_n^h \tilde{m}^{\tilde{m}h} \leqslant (M_n \tilde{m}^{\tilde{m}})^{\frac{L}{(\mu-1)\alpha+\beta}}. \tag{5}$$

Число сетей степенной структуры $(h_1, \ldots, h_m)$, из которых получаются схемы с индексом простоты не большим L, обладающих свойствами 1, 2, не превосходит (лемма 2)

$$R = [2e(2e^2)^\mu \mu^\mu]^h \, h^{(\mu-1)h}.$$

Так как $(\mu-1)\log(\mu-1) = \mu\log\mu + \mu\log\left(1-\frac{1}{\mu}\right) - \log(\mu-1)$, то из свойства 1 следует, что

$$\mu^\mu \leqslant [c_0(\mu-1)]^{\mu-1},$$

где c_0 не зависит от μ,

$$R \leqslant [c_1 h(\mu-1)]^{h(\mu-1)},$$

где c_1 не зависит от h и μ.

Из замечания 2 следует, что в рассматриваемом случае

$$(\mu-1)h \leqslant \frac{L}{\alpha + \frac{\beta}{\mu''-1}}.$$

Поэтому

$$R \leqslant (c_2 L)^{\frac{L}{\alpha + \frac{\beta}{\mu''-1}}}. \tag{6}$$

Число степенных структур схем, у которых индекс простоты не более L, не превосходит числа неотрицательных (т. е. $h_s \geqslant 0$) целочисленных решений неравенства

$$\sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s h_s \leqslant L \quad (\gamma_s = (s-1)\alpha + \beta, \quad s = 1, \ldots, \tilde{m}),$$

или (что то же самое) числа положительных целочисленных решений (т. е. $h'_s \geqslant 1$), эквивалентных друг другу неравенств

$$\sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s (h'_s - 1) \leqslant L \text{ и } \sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s h'_s \leqslant L + \sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s{}^*,$$

* Т. е. равно числу точек с целочисленными положительными координатами в $\tilde{m}$-мерном пространстве, расположенном в области, ограниченной плоскостями

$$h'_s = 0 \; (s = 1, \ldots, \tilde{m}), \quad \sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s h'_s = L + \sum_{s=1}^{\tilde{m}} \gamma_s.$$

которое не превосходит

$$\frac{1}{\tilde{m}!}\prod_{t=1}^{\tilde{m}}\left(L+\sum_{s=1}^{\tilde{m}}\gamma_s\right)\frac{1}{\gamma_t}=V(L). \tag{7}$$

Очевидно, что $V(L)$ есть неубывающая функция L и $V(L)^{\frac{1}{L}}\to 1$ при $L\to\infty$.

Из (5)—(7) следует, что число (неизоморфных) схем над $\mathfrak{S}_n$, обладающих свойствами 1 и 2, индекс простоты которых не более L, не превосходит

$$l_n\left(M_n^{\frac{1}{\mu'-1}}\cdot\tilde{m}^{\frac{\tilde{m}}{\mu'-1}}c_2\cdot L\right)^{\frac{L}{\alpha+\frac{\beta}{\mu''-1}}}\cdot V(L)\leqslant l_n\left[q(N_n')\cdot g(L)\cdot L\right]^{\frac{L}{\alpha+\frac{\beta}{\mu''-1}}},$$

где

$$\frac{\log_b q(N_n')}{\log_b\log_b N_n'}\to 0,\ \ g(L)\to\text{const}.$$

Число N_n реализуемых ими элементов из $\mathfrak{N}_n$ удовлетворят условию

$$N_n\leqslant\nu_n l_n\left[q(N_n')\,g(L)\cdot L\right]^{\frac{L}{\alpha+\frac{\beta}{\mu''-1}}}.$$

Отсюда из (1) и из леммы 3 следует, что

$$L_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}(n)>(1-\varepsilon)\left(\alpha+\frac{\beta}{\mu''-1}\right)\frac{\log_b N_n'}{\log_b\log_b N_n'}.$$

Последнее утверждение теоремы следует из доказательства леммы 3. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если $\sqrt[\log_b N_n]{\nu_n l_n}\to 1$, то в (4) N_n' можно заменить на N_n.

2°. Так как всегда $\mu''\leqslant\tilde{m}$, то формула (4) останется справедливой, если в ней μ'' заменить на $\tilde{m}$.

3°. Если над $\mathfrak{S}_n$ строятся схемы средней степени не менее μ_n' и не более μ_n'', причем

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n'=\mu'>1,\ \ \varlimsup_{n\to\infty}\mu_n''=\mu'',$$

то неравенство (4) останется справедливым. Аналогичное условие можно сформулировать и для α и β.

§ 3. В рассматриваемых ниже примерах реализуются функции алгебры логики от n аргументов (аргументы могут принимать 2 значения, функции — тоже) или некоторые их совокупности (известно, что число всех функций n аргументов $x_1,\ldots,x_n$ равно 2^{2^n}). Во всех примерах $b=2$.

В примерах 1—4 в качестве индекса простоты взято число элементарных подсхем, т. е. $\alpha=0$, $\beta=1$. Для необходимого числа элементарных подсхем сохранено обозначение $L(n)$.

Пример 1. Реализация систем функций контактно-вентильными схемами. Реализуются множества различных функций (не более $l=\mathrm{const}$ штук) алгебры логики от n аргументов. Средства, используемые для реализации (элементарные подсхемы) — контакты n реле (замыкающие и размыкающие) — $2n$ сортов — и вентили (здесь: двухполюсные устройства, проводящие ток только в одном направлении *) одного сорта; поэтому $M_n=2n+1$. Очевидно, $\tilde{m}=\tilde{\mu}=2$. Функции f_i реализуются как функции проводимости между полюсами A_0 и A_i; тогда схема с выбранным множеством полюсов A_0, $A_1, \ldots$ $\ldots, A_k (k\leqslant l)$ реализует не более одной совокупности различных функций ($\nu_n=1$). Число N_n реализуемых множеств функций не больше числа сочетаний с повторениями из 2^{2^n} элементов по l, т. е. $C^l_{2^{2^n}+l-1}$. Далее

$$\sqrt[\log_2 N_n]{l+1}\to 0.$$

Так как $\log_2 N_n$ асимптотически равен $l\cdot 2^n$, то

$$L(n)>(1-\varepsilon_1)\frac{l\cdot 2^n}{n+\log_2 l}<(1-\varepsilon)\frac{l\cdot 2^n}{n}\text{**}.$$

В частности, при $l=1$ (реализуется одна функция)

$$L(n)>(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}. \tag{8}$$

(Обе оценки — для числа контактов и вентилей вместе или только для контактов, если вентили не используются.)

Пример 2. Реализация функций n аргументов, определенных не на всех наборах значений аргументов, контактными схемами. Пусть множество значений аргументов содержит A_n элементов, где $\frac{\log_2 A_n}{\log_2 n}\to\infty$ (см. условие (2)). Число таких функций — 2^{A_n}. Средства — контакты n реле. Тогда

$$L(n)>(1-\varepsilon)\frac{A_n}{\log_2 A_n}.$$

В частности, в случае, $A_n=\frac{1}{2}2^n$

$$L(n)>(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{n}.$$

Пример 3. Реализация функций релейно-контактными многотактными схемами. Реализуются функции n аргументов. Средства — контакты n реле и промежуточные реле с контактами. Значение функции определяется как проводимость между неко-

---

* См. М. А. Гаврилов [1].

** Аналогичные оценки получены Г. Н. Поваровым [4] для больших значений l (для контактных схем).

торой парой полюсов после последнего такта (рассматриваются схемы, которые после ряда тактов переходят в устойчивое состояние). Оценивается число контактов (всех) в схеме. Можно считать, что каждое промежуточное реле имеет один контакт, замыкающий или размыкающий (так как каждое реле с r контактами можно заменить одноконтактными реле с параллельно соединенными обмотками). В каждой такой схеме число элементарных подсхем (т. е. промежуточных реле двух сортов и контактов «входных» реле) равно числу контактов. Очевидно, что

$$M_n = 2n + 2, \quad \nu_n = 1, \quad 2 \leqslant \mu \leqslant 4, \quad N_n = 2^{2^n}.$$

Поэтому

$$L(n) > (1 - \varepsilon)\frac{1}{3} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Если доля контактов промежуточных реле неограниченно уменьшается с ростом n, то остается справедливой оценка (8).

Пример 4. Реализация функций схемами из контактов и сопротивлений. Реализуются функции n аргументов. Средства — контакты n реле, сопротивления M'_n сортов ($M'_n = e^{o(n)}$). К парам A_0A_1, A_0A_2, ..., A_0A_q узлов схемы прикладываются напряжения U_1, U_2, ..., U_q. Функция определяется по напряжению V между узлами A_0 и B:

$$f = \begin{cases} 0, & \text{если } V < V_0, \\ 1, & \text{если } V \geqslant V_0. \end{cases}$$

Можно предполагать, что число элементарных подсхем (контактов и сопротивлений) в рассматриваемых схемах меньше, чем $\frac{2^{n+3}}{n}$ (Шеннон показал [7], что всякую функцию алгебры логики n аргументов можно реализовать схемой из одних контактов, содержащей менее $\frac{2^{n+3}}{n}$ контактов). Покажем, что в этом случае при любом выборе $q+2$ узлов (к которым прикладывается и с которых снимается напряжение) и любых напряжениях U_1, U_2, ..., U_q, V_0 число ν_n функций, реализуемых схемой, удовлетворяет условию

$$\sqrt[2^n]{\nu_n} \to 1 \text{ при } n \to \infty \tag{9}$$

(т. е. выполнено условие замечания 1°, стр. 167).

Из законов Кирхгофа следует, что для каждого набора $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ значений аргументов функция $V = V_\sigma(U_1, \ldots, U_q)$ является линейной. Набор $(U_1, \ldots, U_q)$ можно рассматривать как точку q-мерной координатной плоскости U $(q+1)$-мерного эвклидова пространства $U \times V$, а $V = V_\sigma(U_1, \ldots, U_q)$ как уравнение q-мерной плоскости $P_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}$ в пространстве $U \times V$ (таких плоскостей 2^n штук). Проекции попарных пересечений плоскостей $P_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}$ на плоскость U $((q-1)$-

мерные плоскости) разбивают U на области. Пусть для некоторой точки $U_{10}, \ldots, U_{q0}$ такой области справедливо соотношение

$$V_{\sigma'}(U_{10}, \ldots, U_{q0}) \leqslant V_{\sigma''}(U_{10}, \ldots, U_{q0}) \leqslant \ldots \leqslant V_{\sigma^{(2^n)}}(U_{10}, \ldots, U_{q0}).$$

Тогда это соотношение справедливо для всех точек этой области. При любом выборе напряжений $U_1, \ldots, U_q$ из этой области и любом выборе V_0 схема может реализовать не более 2^n+1 функций: это функция, тождественно равная 0, если $V_{\sigma^{(2^n)}}(U_1, \ldots, U_q) < V_0$, функция, принимающая значение 1 только на наборе $\sigma^{(2^n)}$, если

$$V_{\sigma^{(2^n-1)}}(U_1, \ldots, U_q) < V_0 \leqslant V_{\sigma^{(2^n)}}(U_1, \ldots, U_q),$$

и т. д., наконец, — функция, тождественно равная 1, если $V_{\sigma'}(U_1, \ldots \ldots, U_q) \geqslant V_0$.

Подсчитаем число функций, реализуемых схемой при всевозможных выборах значений $U_1, \ldots, U_q$, V_0 и фиксированном выборе полюсов $A_0, A_1, \ldots, A_q, B$. Для этого достаточно решить следующую комбинаторную задачу.

В $(q+1)$-мерном эвклидовом пространстве $U \times V$ (U есть q-мерная плоскость, V — прямая) имеется pq-мерных плоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$; причем Π_i не перпендикулярно U. Проекции (параллельно V) их пересечений на координатную плоскость U разбивают эту плоскость на области. Каждой внутренней точке области поставлена в соответствие перестановка из p символов $1, 2, \ldots, p$ — последовательность номеров плоскостей вдоль оси, проходящей через эту точку параллельно оси V. Перестановка $(i_1, \ldots, i_p)$ порождает (по определению) множества символов: Λ (пустое множество), $\{i_1\}, \{i_1, i_2\}, \ldots, \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$. Требуется определить (оценить сверху) число различных множеств, порожденных всеми перестановками, соответствующими всем внутренним точкам областей на U.

Перейдем к решению этой задачи. Обозначим через $f(p, q)$ максимальное число областей, на которые делят q-мерное пространство p штук $(q-1)$-мерных плоскостей, и через $F(p, q)$ — максимальное число множеств, порожденных разбиением q-мерного пространства p плоскостями. Покажем, что

$$F(p, q) \leqslant F(p-1, q) + f(p-1, q-1). \tag{10}$$

Действительно, пусть имеется разбиение пространства множеством плоскостей $\Pi = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_{p-1}\}$. Рассмотрим плоскость Π_p, $\Pi_p \overline{\in} \Pi$. Плоскости из Π рассекают ее на области. Множества, порожденные $\Pi + \Pi_p$, можно разбить на три класса:

I. Множества, образованные (символами) точками пересечения, «расположенными под Π_p».

II. Множества, состоящие из всех символов, «лежащих под Π_p» и p.

III. Множества, состоящие из всех символов, «лежащих под Π_p», p и некоторых символов над Π_p.

Пусть III′ — класс множеств, получающихся из III удалением из каждого из них символа p (это соответствует удалению плоскости Π_p). Очевидно, что I + III′ есть совокупность всех тех и только тех множеств, которые порождаются плоскостями из Π.

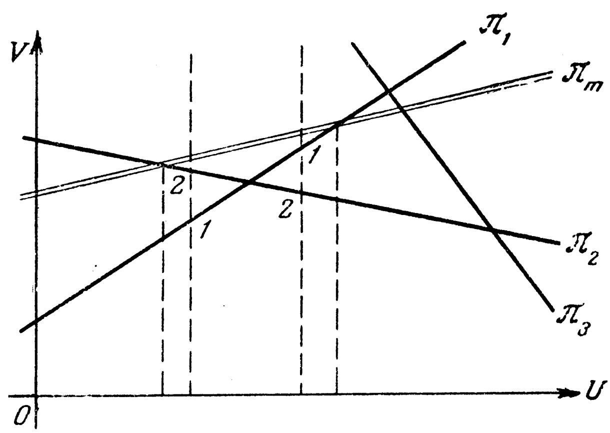
Остановимся несколько подробнее на множествах типа II. Плоскости из Π рассекают Π_p на области. Рассмотрим проекции этих областей на U. Легко видеть, что множества типа II для точек одной такой области совпадают (фиг. 5). Поэтому число множеств типа II не превосходит числа областей, на которые рассекается Π_p. Это число равно числу областей, на которые рассекают $(q-1)$-мерное пространство $p-1$ штука $(q-2)$-мерных плоскостей. Этим соотношение (10) установлено.

Перейдем к оценке $f(p, q)$. Имеем

$$f(p, q) = f(p-1, q) + N,$$

где N — число областей, образованных $p-1$ плоскостями, которые пересекает p-я плоскость, или число областей, на которые делят $(q-1)$-мерное пространство $p-1$ штука $(q-2)$-мерных плоскостей. Поэтому

$$f(p, q) = f(p-1, q) + f(p-1, q-1);$$



Фиг. 5

ясно, что $f(1, q) = 2$, $f(p, 1) = p + 1$. Суммируя, получим *

$$f(p, q) = f(1, q) + \sum_{k=1}^{p-1} f(k, q-1) = C_{p-1}^{q} + 2\sum_{k=0}^{q-1} C_{p-1}^{k}$$

(здесь положено $C_t^s = 0$, если $t < s$).

Наконец, оценим $F(p, q)$. Суммируя (10), получим

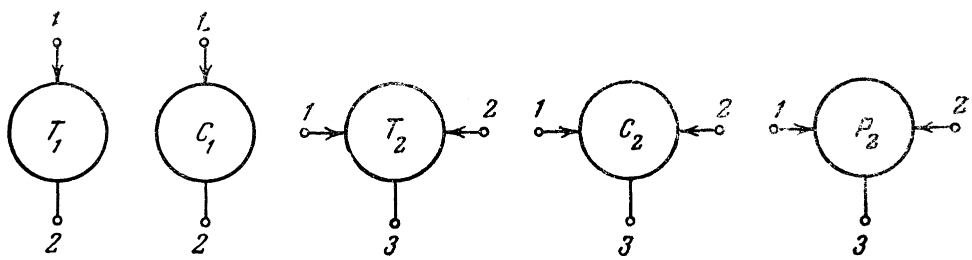
* Последнее равенство можно получить также индукцией по q.

$$F(p,\ q) \leqslant F(1,\ q) + \sum_{k=1}^{p-1} f(k,\ q-1).$$

Так как $F(1,\ q) = 2 = f(1,\ q)$, то $F(p,\ q) = f(p,\ q)$. При $p \geqslant 2q > 0$

$$F(p, q) < 2 \sum_{k=0}^{q} C_p^k \leqslant 2(q+1)\frac{p^q}{q!} \leqslant 4q\left(\frac{3p}{q}\right)^q = \Phi(p,\ q)$$

$\Big(\Phi(p,\ q)$ — монотонно возрастающая функция по обоим аргументам при $p > \frac{e}{3}\, q;\ q > 1\Big)$. В нашем случае (для рассматриваемой схемы)



Фиг. 6

$p = 2^n$, $q \leqslant \frac{2^{n+4}}{n}$. Поэтому, при фиксированном выборе полюсов число функций, реализуемых схемой, не превосходит

$$4\,\frac{2^{n+4}}{n}\left(\frac{3\cdot 2^n}{2^{n+4}/n}\right)^{\frac{2^{n+4}}{2n}}$$

при достаточно больших n).

Так как рассматриваемые схемы имеют не более $\frac{2^{n+4}}{n}$ вершин, то в них B, A_0; $A_1, \ldots, A_q$ можно выбрать не более, чем $\left(\frac{2^{n+4}}{n}\right)^2 2^{\frac{2^{n+4}}{n}}$ способами. Поэтому ν_n — максимальное число функций, реализуемых схемой, — не превосходит

$$2^{14}\frac{2^{3n}}{n^3}\left(\frac{3}{8}\,n\right)^{\frac{2^{n+4}}{n}}.$$

Далее,

$$\frac{\log_2 \nu_n}{2^n} \leqslant \frac{14 + 3n - 3\log_2 n}{2^n} + \frac{16}{n}\log_2\left(\frac{3}{8}\,n\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, условие (9) выполнено и

$$L(n) > (1-\varepsilon)\,\frac{2^n}{n}.$$

Пример 5. Реализация функций электронными схемами. Рассматриваются функции n аргументов. Используются триоды и пентоды. В качестве индекса простоты берется число управляющих сеток. В книге [2] такие схемы с $2n+1$ полюсом строятся из подсхем фиг. 6. Число управляющих сеток в каждой из них на единицу меньше числа полюсов (пентод имеет две управляющие сетки), т. е. $\alpha=1$, $\beta=0$. В этом случае

$$M_n=5, \quad 2\leqslant\tilde{\mu}\leqslant 3, \quad \nu_n=1, \quad N_n=2^{2^n}.$$

Поэтому

$$L(n)>(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов М. А. Теория релейно-контактных схем. Изд-во АН СССР, 1950.
2. Коллектив вычислительной лаборатории Гарвардского университета. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем (пер. с англ.). ИЛ, М., 1954.
3. Лупанов О. Б. О возможностях синтеза схем из разнообразных элементов. ДАН СССР, **103**, 1955, 561—563.
4. Поваров Г. Н. Математическая теория синтеза контактных (1, k)-полюсников. ДАН СССР, **100**, 1955, 909—912.
5. Трахтенброт Б. А. Синтез бесповторных схем. ДАН СССР, **103**, 1955, 973—976.
6. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
7. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits. BSTJ, **28**, 1949, 59—98.