

## ПРОГРАММА

### курса "Теория дискретных функций"

механико-математический факультет МГУ, 1-й курс, 1-й поток, 2-й семестр,  
2009/2010 уч. год (лектор — проф. А. Б. Угольников)

#### Функции алгебры логики

1. Функции алгебры логики. Задание функций таблицами. Существенные и несущественные (фиктивные) переменные. Формулы. Представление функций формулами. Операция суперпозиции. Операция введения несущественной переменной. Замыкание множества функций (относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной). Замкнутые множества функций. Замкнутые классы. Свойства замкнутых классов. Равенство функций (с точностью до несущественных переменных). Эквивалентность формул. Элементарные функции и их свойства. Разложение функции по переменной. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).
2. Полные системы функций. Достаточное условие полноты. Примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Теорема о представлении булевых функций полиномами. Линейные функции и их свойства. Класс  $L$ ; пример порождающей системы. Лемма о нелинейной функции. Возможность получить из нелинейной функции отождествлением переменных нелинейную функцию от 2-х или от 3-х переменных. Функции, сохраняющие константы. Классы  $T_0$  и  $T_1$  и их свойства; примеры порождающих систем. Самодвойственные функции и их свойства. Класс  $S$ . Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции. Монотонные функции и их свойства. Класс  $M$ ; пример порождающей системы. Лемма о немонотонной функции.
3. Теорема Поста о полноте системы булевых функций. Возможность выделить из каждой полной системы полную подсистему, состоящую не более чем из 4-х функций. Базисы замкнутых классов. Пример базиса в  $P_2$ , состоящего из четырех функций. Предполные классы. Свойства предполных классов в  $P_2$ . Теорема Поста о конечной порожденности замкнутых классов булевых функций (без доказательства).
4. Классы  $K$  и  $D$  (конъюнкций и дизъюнкций соответственно) и их свойства. Лемма о порождении функций  $x \vee y$  и  $xy$ . Описание семейства всех замкнутых классов в  $P_2$ , содержащих константы 0 и 1. Критерии порождения констант 0 и (или) 1 системами булевых функций.
5. Классы сохранения множеств функций и их свойства. Теорема о представлении замкнутых классов в терминах сохранения множеств функций. Описание предполных классов в  $P_2$  в терминах сохранения множеств функций.

#### Функции $k$ -значной логики

6. Функции многозначной логики. Основные понятия. Элементарные функции и их свойства. Полные системы. Полнота системы  $\{0, 1, \dots, k-1, I_0, I_1, \dots, I_{k-1}, \max(x, y), \min(x, y)\}$ . Полнота систем  $\{\max(x, y), \min(x, y), x+1\}$ ,  $\{\max(x, y), x+1\}$  и  $\{V_k(x, y)\}$ .
7. Классы сохранения множеств функций и их свойства. Теорема Кузнецова (о функциональной полноте). Алгоритм построения множества всех предполных классов в  $P_k$ . Алгоритм построения множества  $[A]_{x,y}$ . Алгоритм распознавания полноты конечных систем функций.
8. Существенные функции. Лемма о трех наборах. Лемма о существенной функции. Теорема Яблонского. Теорема Слупецкого.
9. Квазилинейные функции и их свойства. Лемма о представлении квазилинейных функций. Лемма о неквазилинейной функции. Описание семейства всех замкнутых классов в  $P_k$ , содержащих все функции из множества  $P_k(1)$ . Теорема Бурле.
10. Особенности функций  $k$ -значной логики,  $k \geq 3$ . Теорема о полноте системы  $\{0, 1, \dots, k-1, x+y, xy\}$  в  $P_k$ . Представление функций из  $P_k$  полиномами; единственность представления для случая простых  $k$ . Пример замкнутого класса в  $P_3$ , не имеющего базиса. Пример замкнутого класса в  $P_3$ , имеющего счетный базис. Мощность семейства замкнутых классов в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

## Эквивалентные преобразования формул

11. Эквивалентные преобразования формул в  $P_2$ . Основные понятия. Тождества (истинные тождества), классы тождеств ( $\Sigma(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \subseteq P_2$ ). Аксиомы, схемы аксиом. Эквивалентная подстановка, эквивалентное преобразование. Вывод. Выводимые тождества. Замыкание множества тождеств относительно правила вывода. Простые свойства выводимости. Полные системы тождеств. Аксиоматизируемость классов тождеств.
12. Пример конечной полной системы тождеств для класса  $\Sigma(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} = \{0, 1, x \& y, x + y\}$ . Пример конечной полной системы тождеств для класса  $\Sigma(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} = \{0, 1, x \& y, x \vee y\}$ . Достаточное условие аксиоматизируемости. Теорема об аксиоматизируемости классов тождеств над системами, порождающими константы 0 и 1.
13. Основная лемма (аксиоматизируемость классов над системами, порождающими функцию  $x \vee y$ ). Лемма о порождении импликации. Теорема об аксиоматизируемости классов тождеств над системами, порождающими константу 1.
14. Лемма об аксиоматизируемости классов тождеств над системами само двойственных функций. Теорема об аксиоматизируемости классов тождеств над системами  $\mathcal{A}$ , такими, что  $0, 1 \notin [\mathcal{A}]$ . Теорема Линдона (о существовании конечных полных систем для классов тождеств над конечными множествами булевых функций).
15. Эквивалентные преобразования формул в  $P_k$ . Основные понятия. Пример класса тождеств над конечным множеством функций в  $P_7$ , не имеющего конечной полной системы тождеств (пример Линдона). Система тождеств  $\Delta_n = \{A_{1,2,3}, B_1, B_m, C_m, m = 2, \dots, n\}$  и ее свойства. Канонический вид формул. Преобразование формул к каноническому виду. Полнота системы  $\Delta_n$  для тождеств специального вида. Формулы, обладающие свойством  $\mathcal{P}_n$ . Лемма о сохранении формулами свойства  $\mathcal{P}_n$ . Теорема Линдона.

## Схемы из функциональных элементов

16. Графы. Основные понятия. Ориентированные графы. Лемма о существовании в конечном ориентированном графе вершины, из которой не выходят ребра. Схемы из функциональных элементов в базисе  $\{\vee, \&, \neg\}$ . Основные понятия. Реализация функций схемами; сложность схемы, сложность  $L(f)$  функции  $f$ . Функция Шеннона (функция  $L(n)$ ). Простейшие методы синтеза. Реализация системы конъюнкций.
17. Метод каскадов. Верхняя оценка сложности схем, построенных по методу каскадов. Пример схемы, построенной по методу каскадов, для функции  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Теорема Шеннона (верхняя оценка для функции  $L(n)$ ).
18. Мощностной метод получения нижних оценок сложности. Лемма Шеннона. Верхняя оценка числа схем. Нижняя оценка для функции  $L(n)$ . Порядок роста функции  $L(n)$ .
19. Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов в базисе  $\{\vee, \&, \neg\}$ . Теорема Лупанова (верхняя оценка для функции  $L(n)$ ).
20. Минимальные схемы и их свойства. Лемма о числе минимальных схем сложности  $h$  с одним выходом, реализующих функции от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Нижняя оценка для функции  $L(n)$ . Асимптотически точная формула для функции  $L(n)$ .

## Основная литература

1. Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу "Введение в математическую логику" / Отв. ред. А. Б. Угольников. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. — 192 с.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.
3. Угольников А. Б. Эквивалентные преобразования формул в  $P_2$  // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. — 2009. — № 5. — С. 25–32.
4. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1984. — 138 с.
5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004. — 424 с.

## Дополнительная литература

### Функции алгебры логики

6. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions (Doctoral dissertation, Columbia University, 1920) // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, № 3, July. — P. 163–185 [Reprinted in: Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / Martin Davis, editor. — Boston: Birkhauser, 1994. — P. 21–43.].
7. *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Ann. Math. Stud. Princeton; London: Princeton Univ. Press, 1941. — № 5. — 122 p [Reprinted in: Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / Martin Davis, editor. — Boston: Birkhauser, 1994. — P. 249–374.].
8. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. — 120 с.
9. *Угольников А. Б.* Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. — 64 с.

### Функции $k$ -значной логики

10. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в  $k$ -значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
11. *Яблонский С. В.* Введение в теорию функций  $k$ -значной логики. — В кн.: Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. I. — М.: Наука, 1974. — С. 9–66.
12. *Бурле Г. А.* Классы  $k$ -значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. — Вып. 10. — 1967. — С. 3–7.

### Эквивалентные преобразования формул

13. *Линдон Р. К.* Тожества в двузначных исчислениях. — В кн.: Киберн. сб. Вып. 1. — М.: ИЛ, 1959. — С. 234–245.
14. *Линдон Р. К.* Тожества в конечных алгебрах. — В кн.: Киберн. сб. Вып. 1. — М.: ИЛ, 1959. — С. 246–248.
15. *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

### Схемы из функциональных элементов

16. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. — В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
17. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем. — В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 10. — М.: Наука, 1963. — С. 63–97.
18. *Сэвидж Дж.* Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998. — 368 с.