

ПРОГРАММА

курса "Дискретная математика"

механико-математический факультет МГУ, 4-й курс, 7-й семестр, 1-й поток,
2008/2009 уч. год (лектор — А. Б. Угольников)

Функции алгебры логики

1. Функции алгебры логики. Равенство функций. Задание функций таблицами. Существенные и несущественные переменные. Формулы. Представление функций формулами. Операция суперпозиции. Замкнутые классы относительно операции суперпозиции (классы Поста). Операция введения несущественной переменной. Замкнутые классы относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной (замкнутые классы). Свойства замкнутых классов. Примеры классов Поста, не являющихся замкнутыми.
2. Полные системы функций. Примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Представление булевых функций полиномами. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции. Классы конъюнкций и дизъюнкций. Лемма о порождении функций $x \vee y$ и xy . Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константы 0 и 1. Замкнутые классы, содержащие константы 0 и 1.
3. Функции, удовлетворяющие условию $\langle 0^\infty \rangle$. Свойства функций $x \vee yz$ и $d_p(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq 2$. Основная лемма о порождении монотонных функций. Лемма о порождении монотонной функции f системой функций $\{x \vee yz, d_p(f)\}$. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций, содержащих константу 1. Замкнутые классы монотонных функций, содержащих константу 1. Лемма о порождении импликации. Лемма о монотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константу 1. Замкнутые классы, содержащие константу 1.
4. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции. Функции, сохраняющие константы. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, не содержащих констант 0 и 1. Теорема Поста о конечной порожденности всех замкнутых классов булевых функций.

Комбинаторика

5. Выборки. Перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями. Биномиальные коэффициенты. Свойства биномиальных коэффициентов, биномиальная теорема. Полиномиальные коэффициенты, полиномиальная теорема. Разбиения. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода. Свойства чисел Стирлинга. Обращение Стирлинга.
6. Формулы обращения. Локально конечные частично упорядоченные множества. Алгебра инцидентности $A(P)$ множества P . Необходимые и достаточные условия существования обратных функций. Дзета-функция множества P , функция Мёбиуса $\mu(x, y)$ множества P . Формула обращения Мёбиуса для частично упорядоченных множеств.
7. Методы вычислений функций Мёбиуса. Цепная функция множества P , явная формула для вычисления функции $\mu(x, y)$. Теорема о произведении. Функция Мёбиуса для цепи. Функция Мёбиуса для множества всех подмножеств конечного множества, упорядоченных по включению. Основная формула метода включений и исключений. Формула для числа $E(0)$ объектов, не обладающих ни одним из свойств. Арифметическая функция Мёбиуса. Функция Мёбиуса для множества натуральных чисел, упорядоченных по делимости. Формула обращения Мёбиуса. Перечисление p -ичных циклических последовательностей длины n . Функция Эйлера, вычисление функции Эйлера. Формула Гаусса.
8. Формальные степенные ряды, операции над рядами. Кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов, свойства кольца; необходимые и достаточные условия существования обратных элементов. Формальная производная, свойства формальной производной. Сходимость формальных рядов. Необходимые и достаточные условия сходимости. Бесконечные суммы и произведения. Композиция формальных рядов. Биномиальные ряды. Свойства биномиальных рядов; решение уравнений вида $f^n(x) = 1 + g(x)$ в кольце $C[[x]]$, $n \geq 1$.

9. Производящие функции. Примеры применения метода производящих функций для решения комбинаторных задач. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о решении линейных рекуррентных соотношений. Числа Фибоначчи. Симметрические функции, элементарные симметрические функции, степенные суммы. Тожества Ньютона. Задача о расстановке скобок. Числа Каталана.
10. Конечные поля. Порядок и характеристика поля; свойства конечных полей, существование примитивного элемента. Поле $GF(p)$. Неприводимые многочлены. Нумератор множества всех нормированных многочленов с коэффициентами из $GF(p)$. Формула для числа I_k^p неприводимых нормированных многочленов степени k с коэффициентами из $GF(p)$. Существование неприводимых многочленов заданной степени, асимптотическая формула для I_k^p . Поле $GF(p^m)$. Построение поля $GF(p^m)$.

Кодирование

11. Побуквенное (алфавитное) кодирование. Разделимые коды. Неравенство Крафта–Макмиллана. Условие существования разделимого p -ичного кода с заданным набором длин кодовых слов. Критерий взаимной однозначности алфавитного кодирования. Полные коды. Критерий полноты для разделимых кодов. Построение полного (двоичного) кода по заданному префиксному коду.
12. Оптимальные коды. Свойства оптимальных p -ичных кодов. Оптимальность заданного полного префиксного кода для некоторого множества P . Верхняя и нижняя оценки стоимости оптимального кода. Методы построения оптимальных кодов. Метод Шеннона. Теорема Шеннона. Свойства двоичных оптимальных кодов. Полнота префиксного оптимального двоичного кода. Теорема редукции. Алгоритм Хаффмена построения оптимального двоичного кода.
13. Коды, исправляющие ошибки над полем $GF(p)$. Расстояние Хэмминга. Граница сферической упаковки (граница Хэмминга). Метод построения кода, исправляющего t ошибок. Верхняя и нижняя оценки мощности максимального кода. Совершенные коды. Примеры совершенных кодов.
14. Линейные коды над $GF(p)$. Проверочные и порождающие матрицы линейных кодов. Двойственные коды. Параметры линейных кодов. Необходимые и достаточные условия существования линейных кодов с заданным минимальным расстоянием. Граница Синглтона. Граница Варшавова–Гилберта. Коды Хэмминга и их свойства. Алгоритм декодирования кодов Хэмминга. Обобщенные коды Хэмминга и их свойства. Алгоритм декодирования обобщенных кодов Хэмминга.
15. Двоичные коды БЧХ. Построение кодов БЧХ, исправляющих t ошибок. Параметры кодов БЧХ. Лемма о вычислении определителя матрицы M_t . Теорема Питерсона. Алгоритм Питерсона декодирования двоичных кодов БЧХ, исправляющих t ошибок. Алгоритм декодирования для кодов БЧХ, исправляющих две ошибки.
16. Коды $R(r, m)$ (двоичные коды Рида–Маллера порядка r). Параметры кодов $R(r, m)$. Порождающая матрица кода $R(r, m)$. Алгоритм декодирования кода $R(r, m)$, $0 \leq r \leq m$.

Конечные автоматы, языки и грамматики

17. Языки. Операции над языками. Регулярные языки. Диаграммы. Представление языков диаграммами. Теорема о совпадении класса регулярных языков с классом языков, представимых диаграммами.
18. Конечные автоматы. Способы задания автоматов. Представимые языки. Теорема Клини. Замкнутость семейства регулярных языков относительно теоретико-множественных операций. Примеры нерегулярных языков. Периодические множества. Теорема о регулярных языках в однобуквенном алфавите.
19. Порождающие грамматики. Вывод слов. Порождение языков грамматиками. Эквивалентность грамматик. Контекстно-свободные (КС) грамматики; КС-языки. Линейные грамматики; линейные языки. Праволинейные грамматики; праволинейные языки. Теорема о праволинейных языках.