ПРОГРАММА

спецкурса **"Замкнутые классы булевых функций", 1 год**

механико-математический факультет МГУ, 2008/2009 уч. год (лектор — А. Б. Угольников)

1. Функции алгебры логики. Формулы. Операция суперпозиции. Классы Поста (Замкнутые классы относительно операции суперпозиции). Операция введения несущественной переменной. Замкнутые классы (относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной). Описание множества всех классов Поста, не являющихся замкнутыми.

2. Полные системы функций. Представление булевых функций полиномами. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции. Классы конъюнкций и дизъюнкций. Лемма о порождении функций $x \vee y$ и xy. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константы 0 и 1. Описание множества всех замкнутых классов, содержащих константы 0 и 1.

3. Функции, удовлетворяющие условию $< 0^\infty >$. Свойства функций $x \vee yz$ и $d_p(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 2$. Основная лемма о порождении монотонных функций. Лемма о порождении монотонной функции f системой функций $\{x \vee yz, d_{p(f)}\}$. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций, содержащих константу 1. Описание множества всех замкнутых монотонных функций, содержащих константу 1. Лемма о порождении импликации. Лемма о монотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константу 1. Описание множества всех замкнутых классов, содержащих константу 1.

4. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции. Функции, сохраняющие константы. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, не содержащих констант 0 и 1. Теорема Поста о конечной порожденности замкнутых классов булевых функций. Необходимые и достаточные условия выполнения соотношения $c \in [\mathcal{A}]$, где $c \in \{0, 1\}$, $\mathcal{A} \subseteq P_2$. Описание множества всех замкнутых классов булевых функций. Диаграмма включений множества замкнутых классов; примеры базисов.

5. Описание замкнутых классов в терминах сохранения отношений. Функции, сохраняющие отношение ρ (предикат ρ). Множество $U(\rho)$ функций, сохраняющих отношение ρ. Функции, сохраняющие заданное множество булевых функций. Множество $U(M)$ функций, сохраняющих множество $M \subseteq P_2$.

6. Теорема о замкнутых классах булевых функций, допускающих предикатное описание. Методы построения отношений, задающих замкнутые классы булевых функций. Примеры отношений для всех замкнутых классов, допускающих предикатное описание. Размерности замкнутых классов. Замкнутые классы, определяемые двухместными и трехместными предикатами.

7. Эквивалентные преобразования формул в P_2. Тождества, классы тождеств, аксиомы, схемы аксиом, эквивалентная подстановка, эквивалентное преобразование. Вывод, вывод тождества. Замкнутые классы тождеств, полные системы тождеств, аксиоматизируемые классы. Простые свойства выводимости. Достаточное условие аксиоматизируемости.

8. Примеры конечных полных систем для классов тождеств над множествами $\{0, 1, xy, x + y\}$ и $\{0, 1, x \vee y, xy\}$. Лемма об аксиаматизируемости классов тождеств над системами функций, замыкание которых содержит функцию $x \vee y$. Лемма об аксиоматизируемости классов тождеств над системами самодвойственных функций. Теорема Линдона о существовании конечных полных систем для классов тождеств над конечными системами булевых функций.

9. Сложность реализации булевых функций формулами. Меры сложности формул. Синтез формул в базисе $\{\vee, \&, ^-\}$. Простейшие методы синтеза. Разбиение множества двоичных наборов на сферы. Характеристические функции сфер, их свойства. Асимптотически оптимальный метод (О.Б. Лупанова) синтеза формул в базисе $\{\vee, \&, ^-\}$. Функция Шеннона $L(n)$. Мощностной метод получения нижних оценок сложности формул. Асимптотически точная формула для функции $L(n)$.

10. Глубина формул. Простейшие оценки сложности. Линейные верхние оценки глубины формул в неполных базисах. Функция Шеннона по глубине для формул в неполных базисах. Описание поведения функции Шеннона по глубине для всех замкнутых классов булевых функций.

11. Соотношение между глубиной и сложностью формул. Равномерные системы. Теорема о соотношении глубины и сложности формул в полных базисах. Теорема о соотношении глубины и сложности формул в полных монотонных базисах. Теорема о равномерности произвольных конечных систем булевых функций. Полиномиальная эквивалентность конечных систем функций в P_2.

12. Функции k-значной логики. Особенности функций многозначной логики. Пример замкнутого класса в P_k, не имеющего базиса. Пример замкнутого класса в P_k, имеющего счетный базис; пример континуального семейства замкнутых классов. Примеры неравномерных систем функций в P_3. Пример систем функций в P_4, не являющихся полиномиально эквивалентными. Примеры сверхполиномиальных нижних оценок сложности формул в P_5.