"ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"

Программа полугодового спец. курса

2003/2004 учебный год

Лектор: проф. О. М. Касим-Заде

1. Основные понятия. Графы неориентированные и ориентированные. Способы задания графов. Матрицы смежности и инцидентности графа. Понятие изоморфизма графов. Пути, цепи и циклы в графе. Связный граф. Компоненты связности графа.

2. Деревья и их простейшие свойства. Различные определения понятия дерева и их эквивалентность. Связь между числом вершин и ребер дерева. Понятие концевой (висячей) вершины. Существование остовного дерева в связном графе. Граф как метрическое пространство. Центр графа. Теорема о центрах деревьев. Центроид. Теорема о центроидах дерева.

3. Основные свойства матриц смежности и инцидентности графа. Связь между матрицами смежности и инцидентности. Формула Бине—Коши. Матричная теорема о деревьях. Число остовных деревьев графа. Подсчет числа деревьев на n нумерованных вершинах. Формула Кэли.

4. Восстановление дерева по матрице попарных расстояний между концевыми вершинами. Теорема Смоленского—Зарецкого.

5. Число независимости графа (вершинное число независимости). Задача о минимальном числе ребер в графе с данным числом вершин и верхним ограничением на число независимости. Характеризация экстремальных графов (графов с данным числом вершин, ограничением на число независимости и минимальным числом ребер). Клики в графе. Задача о максимальном числе ребер в графе с данным числом вершин и верхним ограничением на размер максимальной клики. Теорема Турана. Характеризация соответствующих экстремальных графов.

6. Задача о максимальном числе ребер в графе, не содержащем подграфов, изоморфных полному двудольному графу $K_{a,b}$. Верхняя оценка числа Заранкевича $Z_{a,b}(m,n)$.

7. Наследственные (сильно наследственные) классы графов. Примеры наследственных классов графов. Функция реберной плотности наследственного класса графов $\sigma_K(n)$. Теорема о неубывании функции реберной плотности для наследственных классов. Функции реберной плотности наследственных классов: Турана T_a, Заранкевича Z_a, класса всех двудольных (бихроматических) графов B.

8. Теорема о существовании предела функции реберной плотности (сильно) наследственного класса графов (параметр σ_K класса K). Нулевые и ненулевые классы. Теорема о характеризации класса U всех графов в терминах параметра реберной плотности: $\sigma_K = 1$ тогда и только тогда, когда $K = U$. Теорема о разрыве области значений параметра реберной плотности: либо $\sigma_K = 0$, либо $1/2 \le \sigma_K \le 1$.

9. Точное вычисление функции реберной плотности для класса планарных графов. Асимптотика роста функции реберной плотности для наследственного класса, порожденного последовательностью графов смежности вершин булева куба $\{B^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

10. Фрагментно-замкнутые классы булевых матриц (двудольных графов). Теорема Вапника — Червоненкиса о максимальном числе $n_0(m,l)$ различных столбцов у булевой матрицы с данным числом строк n, не содержащей полных подматриц размера $l \times 2^l$: соотношение $n_0(m,l) = \sum_{i=0}^{l-1} C_m^i$. Энтропия фрагментно-замкнутого класса матриц. Теорема об альтернативе: предельное значение удельной энтропии h_K фрагментно-замкнутого класса K квадратных булевых матриц равно либо 0, либо 1, причем последнее имеет место лишь для класса всех матриц.

Литература

1. Берж К. Теория графов и ее применения. М.: ИЛ, 1962.
2. Зыков А. А. Теория конечных графов, I. Новосибирск: Наука, 1969.
3. Кристофидес К. Теория графов (алгоритмический подход). М.: Мир, 1978.
4. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968.
5. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
7. Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.
8. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
9. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.