

Курс лекций
«Теория дискретных функций»
Лекции 1–3

Вадим Васильевич Кочергин
vvkoch@yandex.ru

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Булевы функции

Функции k -значной логики

Сложность булевых функций

Автоматы (дискретные преобразователи с памятью)

Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику»

Яблонский С. В. Введение в дискретную математику (любое издание).

Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике (любое издание).

Булевы функции. Определения

Положим $E = \{0, 1\}$.

Пусть $f^{(n)} : E^n \rightarrow E$ — отображение.

Тогда $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ — n -местная булева функция
(или функция алгебры логики),

$x_1, \dots, x_n$ — переменные этой функции,

$f^{(n)}$ (или просто f) — функциональный символ.

P_2 — множество всех булевых функций,

$P_2(n)$ — множество всех булевых функций от n фиксированных переменных.

Пример булевой функции

Пример

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Теорема

$$|P_2(n)| = 2^{2^n}$$

$$|P_2(1)| = 4,$$

$$|P_2(2)| = 16,$$

$$|P_2(3)| = 256,$$

$$|P_2(4)| = 65536,$$

$$|P_2(5)| = 4294967296, \dots$$

Рассмотрим функции $f_1(x)$ и $f_2(x, y)$:

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

x	y	$f_2(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Функция $f_1(x)$ — это тождественная функция; функция $f_2(x, y)$ — это селекторная функция, которая из двух переменных x и y выбирает первую, иногда эту функцию обозначают $e_1(x, y)$.

Вопрос: это разные функции или нет?

Существенная зависимость от переменной

Переменная x_i называется *существенной* для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, при котором верно неравенство:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

Если же такого набора не существует, то переменная x_i называется *несущественной* или *фиктивной* для функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Неформально говоря, переменная x_i будет существенной для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Упражнение (сложное)

Доказать, что из функции, существенно зависящей от n переменных, путем подстановки некоторой константы вместо некоторой переменной можно получить функцию, существенно зависящую от $n - 1$ переменной.

Операция удаления фиктивной переменной

Операция удаления (изъятия) фиктивной переменной

Пусть переменная x_i — фиктивная для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда функция $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, определяемая на любом наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ из множества E^{n-1} равенством

$$g(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n),$$

получается из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ путем *удаления (изъятия) фиктивной (несущественной) переменной*.

Операция добавления фиктивной переменной

Операция добавления фиктивной (несущественной) переменной

Пусть переменная y не содержится среди переменных функции $g(x_1, \dots, x_n)$, т. е. $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда функция $h(x_1, \dots, x_n, y)$, определяемая на любом наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1})$ из множества E^{n+1} равенством

$$h(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

получается из функции $g(x_1, \dots, x_n)$ путем *добавления фиктивной (несущественной) переменной*.

Две булевы функции будем считать *одинаковыми*, если у них множество переменных одинаковое и на любом наборе этих переменных функции принимают одинаковые значения.

Две булевы функции называются *равными*, если одну из другой можно получить за конечное число применений операций добавления и изъятия фиктивных переменных.

Пример для функции $f(x, y, z)$ со слайда 11:

$$f(x, y, z) = g(x, z) = h(x, z, t).$$

Булевы функции. Способы задания

1. Перечисление значений (таблица).

x	y	$0^{(2)}$	$x \vee y$	$x \& y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0

2. «Геометрический» (на единичном булевом кубе)

3. Описательный.

4. Задание формулой.

Комментарии к способам задания

Булевы функции. Определение формулы

Пусть дано множество переменных X и множество функциональных символов (конечное или счетное)
 $A = \{f_1^{(n_1)}, \dots, f_k^{(n_k)}, \dots\}$, а также следующие правила:

1. Переменные из множества X — тривиальные формулы.
2. Если каждая из записей $\Phi_1, \dots, \Phi_{n_i}$ является либо символом переменной, либо формулой, то формулой является и запись $f_i^{(n_i)}(\Phi_1, \dots, \Phi_{n_i})$.

Формула над множеством переменных X и множеством функциональных символов $A = \{f_1^{(n_1)}, \dots, f_k^{(n_k)}, \dots\}$ — это последовательность из функциональных символов, символов переменных, скобок и запятых, которую можно получить по указанным правилам за конечное число шагов.

Булевы функции. Примеры формул

Примеры формул:

- а) $f(g(h(x, y, z), x), g(y, z)g(x, z))$ — формула над $\{f^{(3)}, g^{(2)}, h^{(3)}\}$,
б) $\overline{(x \rightarrow y)} \vee (x \& y)$ — формула над $\{\&, \vee, \neg, \rightarrow\}$.

Формула — не функция, а последовательность символов. Однако каждая формула задает функцию: естественным образом определяется значение формулы на каждом наборе значений переменных, входящих в формулу.

Упражнение. Реализовать функцию $x \downarrow y$ формулой над системой $\{x \mid y\}$ с использованием минимально возможного числа функциональных символов.

Упражнение. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(y_1, \dots, y_m)$ — булевы функции, существенно зависящие от всех своих переменных. Докажите, что функция, задаваемая формулой $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(y_1, \dots, y_m))$, существенно зависит от всех своих $n + m - 1$ переменных.

Эквивалентные формулы

Формулы, реализующие равные функции, называются *эквивалентными*.

Пример: $\bar{x} = (x \rightarrow y) \& (x|y)$.

Рассмотрим множество булевых функций

$$F = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, \bar{x}, x, 0, 1\}.$$

На следующих слайдах приведено 9 типов эквивалентностей над F .

1. Коммутативность операций $\&$, $\vee$, $\oplus$:

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1,$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1,$$

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1.$$

2. Ассоциативность операций $\&$, $\vee$, $\oplus$:

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3,$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3,$$

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3.$$

3. Дистрибутивность:

$$(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3),$$

$$(x_1 \oplus x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3),$$

$$(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3).$$

4. Закон поглощения:

$$x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1,$$

$$x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1.$$

5. Идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x \& x = x, \quad x \vee x = x.$$

6. Перенос отрицания через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$\overline{(x_1 \& x_2)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2,$$

$$\overline{(x_1 \vee x_2)} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2.$$

7. «Снятие» двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

8. Некоторые эквивалентности с использованием отрицания и суммы по модулю 2:

$$\begin{aligned}x \&\overline{x} = 0, & x \vee \overline{x} = 1, \\x \oplus \overline{x} = 1, & x \oplus x = 0.\end{aligned}$$

9. Операции с константами:

$$\begin{aligned}x \&1 = x, & x \&0 = 0, \\x \vee 1 = 1, & x \vee 0 = x, \\x \oplus 1 = \overline{x}, & x \oplus 0 = x.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Можно ввести обозначение и так:

$$x^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \sigma; \\ 0, & \text{если } x \neq \sigma. \end{cases}$$

Элементарная конъюнкция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ обращается в 1 тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_n = \sigma_n$.

Разложение булевой функции по переменным

Теорема (о разложении функции по переменным)

Пусть даны функция $f(x_1, \dots, x_n)$ и число k , $1 \leq k \leq n$. Тогда функцию f можно представить в следующей форме:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \dots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ значений переменных $(x_1, \dots, x_k)$.

Следствия теоремы о разложении

Следствие (разложение по одной переменной)

Пусть $k = 1$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Следствие (разложение по всем переменным)

Пусть $k = n$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Следствия из разложения

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) :$$

1. Любая булева функция, отличная от константы 0, представляется в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}.$$

Такое представление называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ).

2. Любую булеву функцию можно представить формулой над множеством функций $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$.

Представление произвольной булевой функции, отличной от константы 1, в виде *совершенной конъюнктивной нормальной формы* (СКНФ):

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Применяя разложение в виде СДНФ для $\overline{f(x_1, \dots, x_n)}$, имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\overline{f(x_1, \dots, x_n)}} = \overline{\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}} = \\ &= \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} \overline{x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}} = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}) = \\ &= \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}). \end{aligned}$$

Полные системы. Достаточное условие полноты

Система F булевых функций называется *полной*, если любая функция алгебры логики выражается формулой над F .

Система $\{\vee, \&, \neg\}$ — полная.

Теорема (о сводимости полных систем)

Пусть F — полная система булевых функций и любая функция из множества F выражается формулой над системой G . Тогда G — полная система.

Теорема

В любой полной системе булевых функций можно выделить конечную полную подсистему.

Примеры полных систем:

$\{\vee, \&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\&, \neg\}$, $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\downarrow\}$.

Элементарная конъюнкция:

$x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $k \geq 1$ и все индексы i_j различны.

Рассмотрим множество элементарных конъюнкций вида $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, к которому добавим константу 1, которую будем называть конъюнкцией длины 0 от пустого множества переменных.

Полином Жегалкина — сумма по модулю 2 произвольного подмножества введенного множества конъюнкций.

Пустому подмножеству соответствует пустой полином Жегалкина; он выражает константу 0 (по определению).

Полином Жегалкина можно записать так:

$$\bigoplus_{\{i_1, \dots, i_k\}} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

где $a_{i_1, \dots, i_k} \in \{0, 1\}$ и суммирование ведется по всем подмножествам множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема (И. И. Жегалкин)

Любая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина, причем это представление единственно с точностью до перестановки слагаемых и перестановки переменных в элементарных конъюнкциях.

Упражнение. Выписать полином Жегалкина для функции $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$.

Упражнение. Доказать, что булева функция f зависит от переменной x существенно тогда и только тогда, когда переменная x входит в полином Жегалкина для функции f .

Упражнение. Доказать, что из любого полинома Жегалкина степени k , $k \geq 3$, путем отождествления переменных можно получить полином Жегалкина степени в точности $k - 1$.

На множестве булевых функций рассмотрим две операции:

1. *Операция суперпозиции.*

Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ реализуется нетривиальной формулой над системой функций A , то говорят, что она *получена операцией суперпозиции* из функций системы A .

2. *Операция введения фиктивной переменной.*

Произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ отображает в функцию $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, задаваемую на произвольном наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ равенством

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Пусть $F \subseteq P_2$. *Замыканием* множества F (относительно операций суперпозиции и введения фиктивной переменной) называется множество $[F]$ всех булевых функций, которые могут быть получены из функций множества F при помощи операций суперпозиции и введения фиктивной переменной.

Свойства оператора замыкания:

1. $F \subseteq [F]$ (экстенсивность).
2. Если $F_1 \subseteq F_2$, то $[F_1] \subseteq [F_2]$ (монотонность).
3. $[[F]] = [F]$ (идемпотентность).
4. $[F_1] \cup [F_2] \subseteq [F_1 \cup F_2]$.
5. $[F_1] \cap [F_2] \supseteq [F_1 \cap F_2]$.

Если для множества булевых функций F выполняется равенство $F = [F]$, то такое множество называется *замкнутым множеством* (функций) или *замкнутым классом*, а иногда и просто *классом*.

Если система булевых функций F полна, то, очевидно, $[F] = P_2$. И наоборот, если выполняется условие $[F] = P_2$, то система F полна.

Если для множеств A и F булевых функций выполняется равенство $[A] = F$, то говорят, что система A *полна* в F .

Класс L . Лемма о нелинейной функции

Класс L линейных булевых функций определяется так:

$$L = \{f \in P_2 \mid f = x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \dots \oplus x_{i_k} \oplus c, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c \in \{0, 1\}\}.$$

Свойства класса L :

1. $0, 1, x, \bar{x}, x \oplus y \in L$; $xy, x \vee y \notin L$.
2. $[L] = L$.
3. $[\{x \oplus y, 1\}] = L$.
4. Любая линейная функция от n переменных, отличная от константы, принимает значение 1 на 2^{n-1} наборе.
5. $|L(n)| = 2^{n+1}$ (здесь обозначение $F(n) = F \cap P_2(n)$).

Лемма (о нелинейной функции)

Из любой нелинейной булевой функции, подставляя вместо некоторых переменных константы 0 и 1, а также отрицания переменных, и, быть может, навешивая отрицание на функцию, можно получить конъюнкцию двух переменных.

Следствие

Если $f \notin L$, то $xu \in [\{f, 0, 1, \bar{x}\}]$.

Классы T_0 , T_1 и S

Класс T_0 булевых функций, сохраняющих константу 0, определяется так:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу 1, определяется так:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$. Функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Класс S самодвойственных булевых функций определяется так:

$$S = \{f \in P_2 \mid f^* = f\}.$$

Свойства классов T_0 , T_1 и S

Свойства классов T_0 и T_1 :

1. $0, x, xy, x \vee y \in T_0 \cap T_1, \quad x \oplus y \in T_0, \quad x \sim y \in T_1;$
 $\bar{x}, x \sim y \notin T_0, \quad \bar{x}, x \oplus y \notin T_1.$
2. $[T_0] = T_0; \quad [T_1] = T_1.$
3. $[\{x \oplus y, xy\}] = T_0; \quad [\{x \sim y, x \vee y\}] = T_1.$
4. $|T_0(n)| = |T_1(n)| = 2^{2^n - 1}.$

Свойства класса S :

1. $x, \bar{x}, xy \vee xz \vee yz \in S, \quad 0, 1, xy, x \vee y, x \oplus y \notin S.$
2. $[S] = S.$
3. Любая самодвойственная функция от n переменных принимает значение 1 на 2^{n-1} наборе.
4. $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}.$
5. Самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных, не существует.
6. $[\{x \oplus y \oplus z, xy \vee xz \vee yz, \bar{x}\}] = S$ (упражнение со звездочкой).

Двойственная к функции $f(x_1, \dots, x_n)$ функция:

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Принцип двойственности:

Если в произвольной формуле Φ , реализующей булеву функцию f , заменить все функциональные символы на функциональные символы двойственных функций, то получившаяся формула Φ' будет реализовывать функцию f^* .

Лемма о несамодвойственной функции

Лемма (о несамодвойственной функции)

Из любой несамодвойственной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, подставляя вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ переменную y или ее отрицание $\bar{y}$, можно получить константу.

Доказательство. Так как $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$, то найдется пара противоположных наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, на которых значения функции равны:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n).$$

Если $\alpha_i = 0$, то подставим вместо переменной x_i переменную y , а если $\alpha_i = 1$, то подставим вместо переменной x_i отрицание переменной $\bar{y}$.

Полученная таким образом функция $g(y)$ удовлетворяет условию $g(0) = g(1)$. Следовательно функция $g(y)$ — константа.

Класс M монотонных функций

Правило сравнения наборов из множества E^n :

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq (\beta_1, \dots, \beta_n)$ тогда и только тогда для всех $i = 1, \dots, n$ выполняются неравенства $\alpha_i \leq \beta_i$.

Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются *сравнимыми*, если выполняется хотя бы одно из отношений $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ или $\tilde{\beta} \preceq \tilde{\alpha}$.

Если ни одно из этих двух отношений не выполняется, то такие наборы называются *несравнимыми*.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является *монотонной* (т. е. $f \in M$) тогда и только тогда, когда для любых двух наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ соотношение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq (\beta_1, \dots, \beta_n)$ влечет неравенство $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Свойства класса M :

1. $0, 1, x, xy, x \vee y \in M$; $\bar{x}, x \oplus y, x \rightarrow y \notin M$.
2. $[M] = M$.
3. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in M$, то справедливо разложение

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)x_n.$$

4. $[\{0, 1, xy, x \vee y\}] = M$.
5. Если $f \in M$, $f \neq 0, 1$, то $f \in [\{xy, x \vee y\}]$.

▷ Это утверждение легко устанавливается индукцией по числу n переменных, от которых функция f зависит существенно. База индукции ($n = 1$) очевидна. Переход индукции обоснован разложением из свойства 3 монотонных функций — достаточно заметить, что $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \neq 1$ и $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \neq 0$. □

Лемма о немонотонной функции

Лемма (о немонотонной функции)

Из любой немонотонной булевой функции, подставляя вместо некоторых ее переменных константы, можно получить отрицание.

Доказательство. Для немонотонной функции $f_M(x_1, \dots, x_n)$ найдутся два набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из E^n , удовлетворяющие условиям: $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) = 1$, $f(\tilde{\beta}) = 0$. Для $i = 1, \dots, n$ при выполнении равенства $\alpha_i = \beta_i$ в функцию $f_M(x_1, \dots, x_n)$ вместо переменной x_i подставим константу α_i , а при выполнении неравенства $\alpha_i < \beta_i$ — переменную x , тем самым получим функцию $\bar{x}$. □

Критерий полноты системы булевых функций

Теорема (о функциональной полноте)

Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из следующих классов:

$T_0, T_1, L, S, M.$

Доказательство. Пусть система F булевых функций содержит такие функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m (эти функции необязательно различны), что $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_l \notin L, f_s \notin S, f_m \notin M.$ в три этапа докажем, что $[F] = P_2.$

1 этап: получение констант. Функции $f_0(x, \dots, x)$ и $f_1(x, \dots, x)$ либо дадут обе константы, либо хотя бы одна из них даст отрицание. Во втором случае применяем лемму о несамодвойственности функции.

2 этап: получение отрицания. По лемме о немонотонной функции.

3 этап: получение конъюнкции. По лемме о нелинейной функции.

Следствия из критерия полноты

Следствие (из теоремы о полноте)

Любая полная система булевых функций содержит полную подсистему, состоящую не более чем из пяти функций.

Следствие (из доказательства теоремы о полноте)

Любая полная система булевых функций содержит полную подсистему, состоящую не более чем из четырех функций.

Пример полной системы, состоящей из 4 функций, которая не содержит собственную полную подсистему:

$$\{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \& y\}.$$

Лемма

Для любых двух классов из множества $\{T_0, T_1, L, S, M\}$ найдется функция, лежащая в одном и не лежащая в другом.

Доказательство.

1. Функции, лежащие в T_0 : $0 \notin T_1, S, x\bar{y} \notin L, M$.
2. Функции, лежащие в T_1 : $1 \notin T_0, S, x \vee \bar{y} \notin L, M$.
3. Функции, лежащие в L : $0 \notin T_1, S, \bar{x} \notin T_0, M$.
4. Функции, лежащие в S : $\bar{x} \notin T_0, T_1, M, xy \vee xz \vee yz \notin L$.
5. Функции, лежащие в M : $0 \notin T_1, S, 1 \notin T_0, xy \notin L$. □

Лемма

Для любого множества A булевых функций либо $[A] = P_2$, либо класс $[A]$ содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M .

Множество F булевых функций называется *предполным классом*, если выполнены следующие условия:

- 1) $[F] = F$;
- 2) $F \neq P_2$;
- 3) для любой функции f , не лежащей в множестве F , справедливо равенство $[F \cup \{f\}] = P_2$.

Теорема

В P_2 есть ровно 5 предполных классов: T_0, T_1, L, S, M .

Представление о результатах Э. Поста (без док-ва)

Теорема (Э. Пост, 1920–1941)

Каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечную порождающую подсистему.

Теорема

Множество замкнутых классов булевых функций имеет счетную мощность.

Упражнение (со звездочкой). Доказать, что множество замкнутых классов булевых функций бесконечно.

Указание: доказать, что замкнутые классы $\{\{x \vee yz, d_p(x_1, \dots, x_p)\}\}$, $p = 2, 3, \dots$, где

$$d_p(x_1, \dots, x_p) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j, \quad p = 2, 3, \dots,$$

попарно различны.

Существенная зависимость суперпозиции

Утверждение

Пусть булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(y_1, \dots, y_m)$ существенно зависят от всех своих переменных. Тогда функция $h(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m)$, задаваемая формулой $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(y_1, \dots, y_m))$, зависит существенно от всех своих $n + m - 1$ переменных.

Доказательство. Докажем существенную зависимость от переменных x_1 и y_m .

Функция f существенно зависит от x_1 . Поэтому для некоторого набора $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ выполняется условие $f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Функция g отлична от константы, поэтому для некоторого набора $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ справедливо равенство $g(\beta_1, \dots, \beta_m) = \alpha_n$. Существенная зависимость функции h от переменной x_1 устанавливается на наборе $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_m)$ значений остальных переменных.

Функция f существенно зависит от переменной x_n . Поэтому для некоторого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ выполняется условие $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \neq f(\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$. Функция g существенно зависит от переменной y_m . Поэтому для некоторого набора $(\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$ выполняется условие

$$g(\beta_1, \dots, \beta_{m-1}, 0) \neq g(\beta_2, \dots, \beta_{m-1}, 1).$$

Тогда

$$h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, 0) \neq h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, 1).$$

