

**Программа спецкурса**  
**Замкнутые классы булевых функций (полгода)**

лектор — доц. О. С. Дудакова  
2017–2018 уч. год, осенний семестр

1. Булевы функции: основные определения, свойства, способы задания. Замыкание множества функций, замкнутые классы. Проблема полноты. Полные системы. Теорема о полноте систем булевых функций. Теорема о предполных классах в  $P_2$ .
2. Мажоритарные функции. Лемма о конечной порожденности классов, содержащих мажоритарную функцию. Лемма о порождении мажоритарных функций. Теорема Поста о конечной порожденности всех замкнутых классов булевых функций.
3. Второе доказательство теоремы Поста. Описание множества замкнутых классов булевых функций, диаграмма включений, примеры базисов замкнутых классов.
4. Частичные булевы функции (класс  $P_2^*$ ). Полные системы в  $P_2^*$ . Критерий полноты. Мощность семейства всех замкнутых классов в  $P_2^*$ .
5. Булевы предикаты, операции над ними. Множество  $\text{Pol}(\rho)$  функций, сохраняющих предикат  $\rho$ , его свойства. Замкнутые классы булевых функций, допускающие предикатное описание. Критерий существования предикатного описания замкнутого класса.
6. Методы построения предикатов, задающих замкнутые классы булевых функций. Построение минимальных (по числу переменных) предикатов для замкнутых классов, размерности замкнутых классов.
7. Семейство  $\text{Inv}(f)$  предикатов, сохраняемых булевой функцией  $f$ , его свойства. Галуа-замыкание множества  $F$  булевых функций. Галуа-замыкание множества  $R$  предикатов. Теоремы о совпадении классов:  $F = \text{Pol}(\text{Inv}(F))$  для замкнутого класса  $F$  булевых функций, содержащего все селекторные функции, и  $R = \text{Inv}(\text{Pol}(R))$  для замкнутого класса  $R$  предикатов, содержащих все диагональные предикаты.

**Список литературы**

1. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 136 с.
2. Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 147 с.
3. Угольников А. Б. Классы Поста. М.: Изд.-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. 64 с. С. 25–31.
4. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. 668 p.