

## Механико-математический факультет МГУ

Программа полугодового спецкурса по выбору студента  
«Классические комбинаторные теоремы существования»,  
лектор — доцент Ю. В. Таранников, 2019/2020 уч. год.

1. Частично упорядоченные множества. Цепи, антицепи. Теорема Дилуорса. Теорема, похожая на теорему Дилуорса (теорема Мирского).
2. Двудольные графы.  $(0,1)$ -матрицы. Теорема Кенига. Матричный вариант теоремы Кенига.
3. Системы различных представителей. Теорема Холла.
4. Булев куб. Существование максимального паросочетания в двух соседних слоях. Неравенство Любеля–Мешалкина–Ямамото. Теорема Шпернера.
5. Упаковка непересекающихся подкубов между слоями булева куба. Естественное обобщение теоремы о максимальном паросочетании является неверным ([2], с. 129–132).
6. Теорема Рамсея.
7. Теорема Шура. Теорема Эрдеша–Секереша.
8. Теорема о существовании симметрической подфункции.
9. Пример функции, заданной на  $q$ -значных наборах,  $q \geq 3$ , не имеющей симметрических подфункций от двух переменных.
10. Числа Рамсея.
11. Теорема Грэхема–Ротшильда. Схема индуктивного доказательства. Теорема Ван дер Вардена о существовании монокроматических арифметических прогрессий.
12. Доказательство первой леммы для теоремы Грэхема–Ротшильда.
13. Доказательство второй леммы для теоремы Грэхема–Ротшильда.
14. Теорема Симона–Вегенера. Доказательство верхней оценки.
15. Лемма о числе вершин в подграфе булева куба с ограниченной снизу степенью вершины.
16. Теорема Симона–Вегенера. Доказательство нижней оценки.
17. Получение из функций, нелинейно зависящих от всех переменных, функций, не имеющих линейных членов в полиноме Жегалкина.
18. Существование невырожденной симметрической подфункции у невырожденной функции.
19. Наследственные (инвариантные) классы дискретных объектов. Их задание через запрещенные объекты. Инвариантные классы дискретных функций.
20. Леммы о том, что запреты несимметричных подфункций не влияют на (бес)конечность инвариантного класса в  $P_{2,k}$  ([3]).
21. Пример того, что запреты несимметричных подфункций могут влиять на (бес)конечность инвариантного класса в  $P_{q,k}$  при  $q \geq 3$  ([3]).
22. Критерии бесконечности инвариантных классов в  $P_{2,k}$ , заданных множеством запрещенных подфункций ([3]).

### Литература.

1. Ю. В. Таранников. Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии, главы 1–4. — М.: МЦНМО, 2011.
2. Ю. В. Таранников. О корреляционно-иммунных и устойчивых булевых функциях // Математич. вопросы кибернетики. Вып. 11. — Физматлит, Москва, 2002. — С. 91–148.
3. Ю. В. Таранников. О критериях бесконечности инвариантных классов дискретных функций // Математич. вопросы кибернетики. Вып. 9. — Физматлит, Москва, 2000. — С. 59–78.