

## Механико-математический факультет МГУ

Программа спецкурса по выбору студента «**Элементы анализа булевых функций**»,  
лектор — доцент Ю. В. Таранников, 2022/2023 уч. год., осенний семестр

1. Булевы функции. Матрицы Адамара. Матрица Адамара–Сильвестра. Преобразования Фурье и Уолша, их связь. Матричная форма преобразования Уолша. Формула обращения для преобразования Уолша. Взаимная корреляция и автокорреляция. Умножение вектор-строки коэффициентов взаимной корреляции на матрицу Адамара–Сильвестра. Равенство Парсеваля.
2. Разложение булевой функции по переменной, СДНФ. Полином Жегалкина (АНФ), его единственность. Преобразование Мебиуса. Явная формула для преобразования Мебиуса. Зависимость веса булевой функции от ее алгебраической степени.
3. Числовая нормальная форма булевой функции, ее единственность. Явная формула для коэффициентов числовой нормальной формы. Связь числовой нормальной формы с полиномом Жегалкина. Теорема Мак–Элиса.
4. Действительный полином функции вида  $\{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$  и коэффициенты Уолша. Формула для сумм с коэффициентами Уолша и коэффициентами взаимной корреляции. Производная булевой функции по направлению. Ограниченность числа существенных переменных у булевой функции с фиксированной действительной степенью. Оценка Нисана–Сегеди. Нижняя оценка на максимальное число существенных переменных у булевой функции с фиксированной действительной степенью.
5. Нелинейность булевой функции, ее выражение через коэффициенты Уолша. Верхняя оценка нелинейности булевой функции. Бент-функции. Аффинные преобразования в  $\mathbf{F}_2^n$ . Аффинные преобразования функции. Аффинные преобразования спектра.
6. Корреляционно-иммунные и устойчивые булевы функции. Формула суммирования Пуассона. Тождество Саркара. Спектральная характеристика корреляционно-иммунных функций. Ограниченность числа нелинейных переменных у корреляционно-иммунных функций высокого порядка.
7. Чувствительность булевой функции. Теорема Симона–Вегенера: верхняя оценка, лемма об индуцированном подграфе булева куба, нижняя оценка. Связь с оценками сложности функции в модели PRAM.
8. Регулярные булевы функции, строение их носителя спектра. Теорема типа теоремы Симона–Вегенера для регулярных булевых функций. Матрица смежности булева куба, ее собственные значения и собственные векторы. Ортогональный базис пространства псевдобулевых функций, коэффициенты Уолша как коэффициенты разложения функции в этом базисе. Регулярность функции, носитель спектра которой лежит в одном слое булева куба.
9. Блочная чувствительность. Пример Рубинштейна. Симметризация многочленов. Неравенство братьев Марковых. Соотношение между блочной чувствительностью и действительной степенью. Кронекерова композиция булевых функций, свойства ее действительной степени и блочной чувствительности. Усиление оценки на блочную чувствительность булевой функции в зависимости от ее действительной степени.
10. Поражающее множество переменных, оценки на его мощность. Максимальность степени вхождения всех существенных переменных в действительный полином  $W_d$ -максимальной функции. Лемма об оценке величины  $w_i(f)$  через среднее по подфункциям. Оценка Чиарелли–Хатами–Сакса на максимальное число существенных переменных у булевой функции с фиксированной действительной степенью.