О некоторых задачах теории мультиопераций

Перязев Николай Алексеевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина)

"Дискретная математика и её приложения"
20–24 июня 2022 г.

Содержание

§1. Основные понятия и обозначения.

§2. Некоторые методы задания мультиопераций.

§3. Системы уравнений и неравенств.

§4. Алгебры операций и алгебры мультиопераций.

§5. О теории Галуа для алгебр фиксированного ранга.

§1. Основные понятия и обозначения

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;
- пусть $f_0 \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(m)}$, тогда $(n+1)$-местный оператор суперпозиции:

$$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;
- пусть $f_0 \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(m)}$, тогда $(n+1)$-местный оператор суперпозиции:

$$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

- пусть $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, тогда одноместный оператор разрешимости по i-тому аргументу, $i \in \{1, ..., n\}$:

$$(\mu_i f)(a_1, ..., a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_n)\}.$$

§1.2. Специальные мультиоперации

Пусть f n-местная мультиоперация на множестве A.
Если для любых $a_1, ..., a_n$ из A:

- $|f(a_1, ..., a_n)| \geq 1 \rightleftharpoons f$ — гипероперация;
- $|f(a_1, ..., a_n)| \leq 1 \rightleftharpoons f$ — квазиоперация;
- f — гипероперация и квазиоперация $\rightleftharpoons f$ — операция;

§1.2. Специальные мультиоперации

Пусть f n-местная мультиоперация на множестве A.
Если для любых $a_1, ..., a_n$ из A:

- $|f(a_1, ..., a_n)| \geq 1 \rightleftharpoons f$ — гипероперация;
- $|f(a_1, ..., a_n)| \leq 1 \rightleftharpoons f$ — квазиоперация;
- f — гипероперация и квазиоперация $\rightleftharpoons f$ — операция;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — гипероперации $\rightleftharpoons$ f — сюръективная гипероперация;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — квазиоперации $\rightleftharpoons$ f — инъективная квазиоперация;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — операции $\rightleftharpoons f$ — биективная операция.

§1.3. Стандартная кодировка

$f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно рассматривать как отображение

$$f : B^n \to C,$$

где $B = \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}$ $C = \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$, которое получаемое из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \;\; \varnothing \to 0; \;\; \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

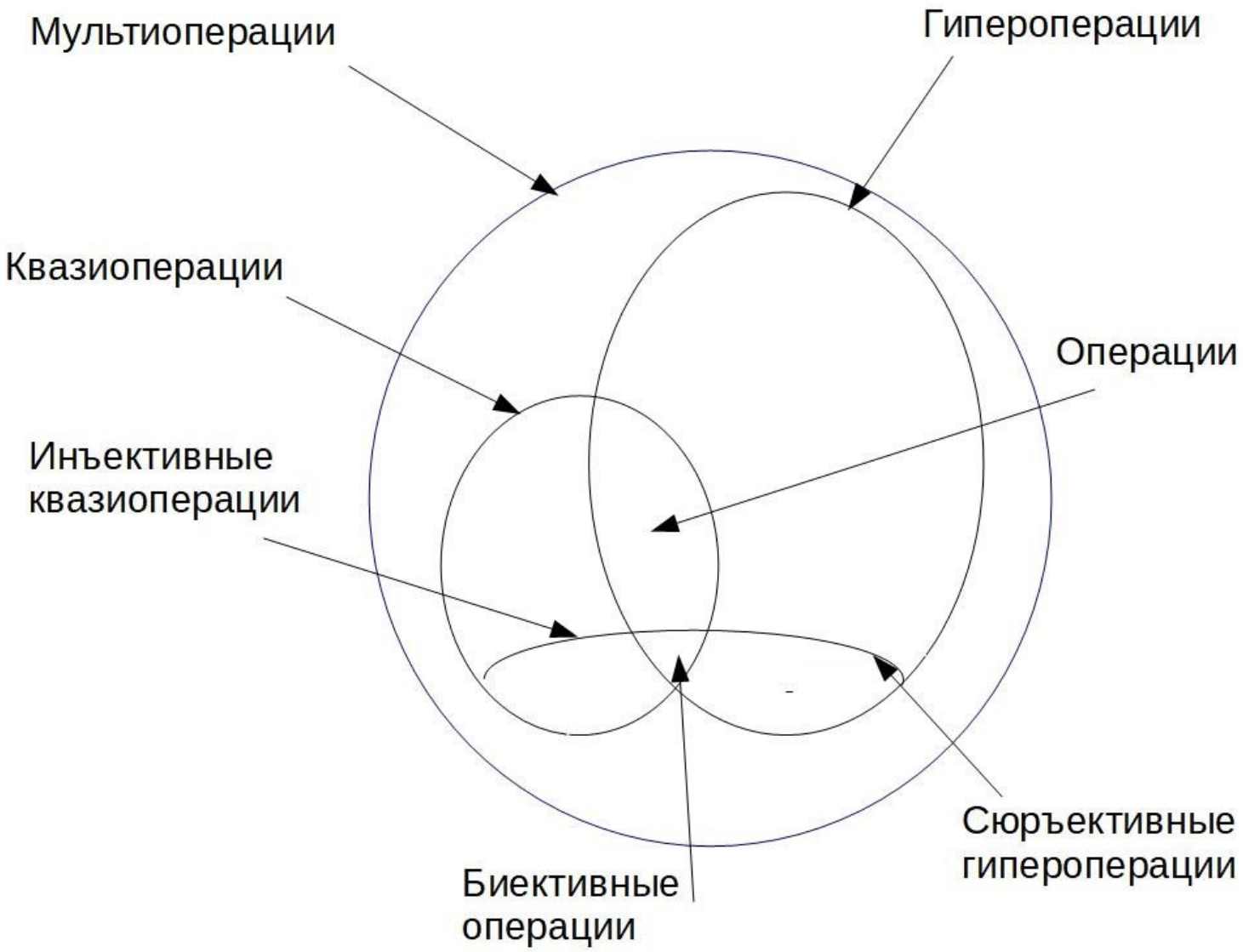
Говорим, что f мультиоперация размерности n, ранга k, где $k \geq 2$.

§1.4. Обозначения для множеств мультиоперации

Для множеств мультиопераций размерности n, ранга k;

- $\mathcal{M}_k^{(n)}$ — множество всех мультиопераций;
- $\mathcal{P}_k^{(n)}$ — множество квазиопераций;
- $\mathcal{H}_k^{(n)}$ — множество гипероперацийй;
- $\mathcal{O}_k^{(n)}$ — множество операций;
- $\mathcal{IP}_k^{(n)}$ — множество инъективных квазиопераций;
- $\mathcal{JH}_k^{(n)}$ — множество сюръективных гиперопероаций;
- $\mathcal{BO}_k^{(n)}$ — множество биективных операций.

§1.5. Пересечение множеств мультиопераций



§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k-1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k-1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

$$\left|\mathcal{IP}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} C_k^i \quad \text{(1995, D.Knuth);}$$

$$\left|\mathcal{IH}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (2^{k-i}-1)^k C_k^i \quad \text{(1965, К.А.Зарецкий);}$$

$$\left|\mathcal{BO}_k^{(1)}\right| = k!$$

§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k-1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

$$\left|\mathcal{IP}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} C_k^i \quad \text{(1995, D.Knuth);}$$

$$\left|\mathcal{JH}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (2^{k-i}-1)^k C_k^i \quad \text{(1965, К.А.Зарецкий);}$$

$$\left|\mathcal{BO}_k^{(1)}\right| = k!$$

Вопрос 1. $\left|\mathcal{IP}_k^{(n)}\right| - ?$ $\left|\mathcal{JH}_k^{(n)}\right| - ?$ $\left|\mathcal{BO}_k^{(n)}\right| - ?$

§2. Некоторые методы задания мультиопераций

§2.1. Векторная форма мультиопераций

- Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ n-разрядным числом в системе исчисления по основанию k.

§2.1. Векторная форма мультиопераций

- Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ n-разрядным числом в системе исчисления по основанию k.
- Примеры:

$k = 2,\ n = 3$

2^{i_1}	2^{i_2}	2^{i_3}	f
1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	0
1	2	2	2
2	1	1	1
2	1	2	3
2	2	1	2
2	2	2	0

$f = (21021320)$

$k = 3,\ n = 2$

2^{i_1}	2^{i_2}	g
1	1	4
1	2	2
1	4	6
2	1	5
2	2	3
2	4	7
4	1	0
4	2	1
4	4	1

$g = (426537011)$

§2.2. Булевы пространственные матрицы

- Двоичной n-мерной матрицей k-го порядка называется функция $\alpha : N_k^n \to \{0, 1\}$, где $N_k = \{1, ..., k\}$.
  Обозначение: $M = [\alpha_{i_1 \dots i_n}]$, где $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \alpha(i_1, ..., i_n)$.
- При фиксированном значении i ($i \in N_k$) индекса s получается $(n-1)-$мерная матрица k-го порядка, которая называется i-сечением M по индексу s, обозначается M^{i_s}.

§2.2. Булевы пространственные матрицы

- Двоичной n-мерной матрицей k-го порядка называется функция $\alpha : N_k^n \to \{0, 1\}$, где $N_k = \{1, ..., k\}$.
  Обозначение: $M = [\alpha_{i_1 \dots i_n}]$, где $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \alpha(i_1, ..., i_n)$.
- При фиксированном значении i ($i \in N_k$) индекса s получается $(n-1)-$мерная матрица k-го порядка, которая называется i-сечением M по индексу s, обозначается M^{i_s}.
- Умножение n-мерной матрицей k-го порядка M на вектор V длинны k по индексу s дает $(n-1)$-мерную матрицу k-го порядка $(M *_s V) = [\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}]$, при

$$\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} = M^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} * V,$$

  где $*$ является скалярным произведением векторов над булевым полукольцом B.

§2.3. Матричное представление мультиопераций

Пусть $B = \langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}). \end{cases}$$

§2.3. Матричное представление мультиопераций

Пусть $B = \langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}). \end{cases}$$

Теорема.

Пусть $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$, $M_{(f_0 * f_1, \ldots, f_n)} = [\beta_{i_0 i_1 \ldots i_m}]$. *Тогда*

$$\beta_{i_0 i_1 \ldots i_m} = (\ldots((M_{f_0}^{i_0} *_n M_{f_n}^{i_1 \ldots i_m}) *_{n-1} M_{f_{n-1}}^{i_1 \ldots i_m}) \ldots) *_1 M_{f_1}^{i_1 \ldots i_m}$$

§2.3. Матричное представление мультиопераций

Пусть $B = \langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}). \end{cases}$$

Теорема.

Пусть $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$, $M_{(f_0 * f_1, \ldots, f_n)} = [\beta_{i_0 i_1 \ldots i_m}]$. *Тогда*

$$\beta_{i_0 i_1 \ldots i_m} = (\ldots((M_{f_0}^{i_0} *_n M_{f_n}^{i_1 \ldots i_m}) *_{n-1} M_{f_{n-1}}^{i_1 \ldots i_m}) \ldots) *_1 M_{f_1}^{i_1 \ldots i_m}$$

Замечание. Порядок умножения на вектора не меняет результат.

§2.4. Пример представления суперпозиции

Пусть $f_0 = (426537011)$, $f_1 = (145)$, $f_2 = (273)$. Тогда $g = (f_0 * f_1, f_2) = (217)$.

$$M_{f_0} = \begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix}, \; M_{f_1} = \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix} \; M_{f_2} = \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix} \right).$$

§2.4. Пример представления суперпозиции

Пусть $f_0 = (426537011)$, $f_1 = (145)$, $f_2 = (273)$. Тогда $g = (f_0 * f_1, f_2) = (217)$.

$$M_{f_0} = \begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix}, \; M_{f_1} = \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix} \; M_{f_2} = \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix} \right).$$

Покажем вычисления по столбцам.

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 000 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

В итоге получаем $M_g = \begin{bmatrix} 011 \\ 101 \\ 001 \end{bmatrix}$.

§.2.5. Матричное представление оператора разрешимости, проекций и нулевой мультиоперации

- $M_{(\mu_i f)} = M_f^T$ — транспонирование пространственной матрицы по нулевому и i индексам;
- $M_{e_s} = E_s$ — $(n+1)$-мерная матрица k-го порядка такая, что все сечения $M_s^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}$ являются диагональными квадратными матрицами k-го порядка;
- $M_o = O$ — нулевая $(n+1)$-мерная матрица k-го порядка.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a,b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d^n_{i,\alpha} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1)$.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a,b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d_{i,\alpha}^{n} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1)$.

- *Стандартная форма*.
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^{m} \mid 0 \leq m \leq n, \alpha \in \{0, ..., 2^k - 1\}\}$.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a,b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d_{i,\alpha}^{n} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1)$.

- *Стандартная форма*.
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

  где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^{m} \mid 0 \leq m \leq n, \alpha \in \{0, ..., 2^k - 1\}\}$.

- *Совершенная стандартная форма*.
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f \neq (2^k - 1, ..., 2^k - 1)$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_1, ..., x_n),$$

  где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^{n}\ \ |\alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$.

§2.7. Ключевая стандартная форма мультиопераций

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ *и* $f \neq (2^k - 1, ..., 2^k - 1)$. *Тогда существует такое стандартное представление*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^m \mid \alpha = 0$ *или* $\alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$,
при котором выполняется $d_j \in \left\langle f, d_{1,1}^1, ..., d_{s,2^{s-1}}^1, ..., d_{k,2^{k-1}}^1 \right\rangle$.

§2.7. Ключевая стандартная форма мультиопераций

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ *и* $f \neq (2^k - 1, ..., 2^k - 1)$. *Тогда существует такое стандартное представление*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{ d_{i,\alpha}^m \mid \alpha = 0$ *или* $\alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$,
при котором выполняется $d_j \in \left\langle f, d_{1,1}^1, ..., d_{s,2^{s-1}}^1, ..., d_{k,2^{k-1}}^1 \right\rangle$.

- Пусть $f(x, y, z) = (13212003)$.

$$f = d_{3,2}^2(y, z) \cap d_{3,2}^2(x, z) \cap d_{3,2}^2(x, y) \cap d_{1,1}^3(x, y, z) \cap d_{4,1}^3(x, y, z) \cap$$
$$\cap d_{6,0}^3(x, y, z) \cap d_{7,0}^3(x, y, z)$$

- Пусть $f(x, y) = (071646351)$.

$$f = d_{1,0}^2(x, y) \cap d_{3,3}^2(x, y) \cap d_{3,5}^2(x, y) \cap d_{2,6}^1(x) \cap d_{5,5}^2(x, y) \cap$$
$$\cap d_{7,3}^2(x, y) \cap d_{8,5}^2(x, y) \cap d_{9,3}^2(x, y) \cap d_{9,5}^2(x, y)$$

§3. Системы уравнений и неравенств

§3.1.Уравнения в операциях

Уравнения с одним неизвестным, где f операция ранга k:

$$f(a_1, ..., a_n, x) = 0$$

Решение $x = g(a_1, ..., a_n)$:

$$f(a_1, ..., a_n, g(a_1, ..., a_n)) \equiv 0$$

§3.1.Уравнения в операциях

Уравнения с одним неизвестным, где f операция ранга k:

$$f(a_1, ..., a_n, x) = 0$$

Решение $x = g(a_1, ..., a_n)$:

$$f(a_1, ..., a_n, g(a_1, ..., a_n)) \equiv 0$$

Алгоритм решения уравнения заключается в выполнении следующих шагов:
1) от уравнения заданного вида переходим к уравнению, где операция задана как мультиоперация f_m ранга k;

$$f_m(a_1, ..., a_n, x) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_x f_m)_x^1$
3) находим решение в мультиоперациях, учитывая, что там где $(\mu_x f_m)_x^1$ принимает значение 0 решений нет;
4) переходим к обратно к операциям, вводя по необходимости параметры.

§3.2.Пример решения булевого уравнения

$$f(a, b, c, x) = (1000001101010111) = 0$$

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, c, x) = (2111112212121222) = 1$$

§3.2.Пример решения булевого уравнения

$$f(a,b,c,x) = (1000001101010111) = 0$$

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a,b,c,x) = (211112212121222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_x f_m)_x^1(a,b,c) = (23301110)$
3) при $b = c = 2$ решений нет, при $b = 1$ решение $x(a,c) = (2311)$, при $c = 1$ решение $x(a,b) = (2311)$;
4) переходим к булевым операциям: при $b = c = 1$ решений нет, при $b = 0$ решение $x(a,c) = (1t00)$, при $c = 0$ решение $x(a,b) = (1t00)$, где $t \in \{0,1\}$.

§3.2.Пример решения булевого уравнения

$$f(a,b,c,x) = (1000001101010111) = 0$$

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a,b,c,x) = (211112212121222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_x f_m)_x^1(a,b,c) = (23301110)$
3) при $b = c = 2$ решений нет, при $b = 1$ решение $x(a,c) = (2311)$, при $c = 1$ решение $x(a,b) = (2311)$;
4) переходим к булевым операциям: при $b = c = 1$ решений нет, при $b = 0$ решение $x(a,c) = (1t00)$, при $c = 0$ решение $x(a,b) = (1t00)$, где $t \in \{0,1\}$.
В итоге всего получим три решения: при $b = 0$ или $c = 0$ решение $x_1(a) = (10)$, при $b = 0$ решение $x_2(a,c) = (1000)$, при $c = 0$ решение $x_3(a,b) = (1000)$.
Этот ответ можно записать в термальном (формульном) виде:
$x_1 = \bar{a}$ при $b = 0$ или $c = 0$; $x_2 = \bar{a}\bar{c}$ при $b = 0$; $x_3 = \bar{a}\bar{b}$ при $c = 0$.

§3.3. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:

$$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$$

§3.3. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:

$$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$$

Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:

$$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$$

§3.3. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

§3.3. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

- Для ранга $k \geq 3$ алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций не совпадают (2021, С.И.Тодиков).

§3.3. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

- Для ранга $k \geq 3$ алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций не совпадают (2021, С.И.Тодиков).

Вопрос 2. Совпадают ли алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций ранга 2? Гипотеза: совпадают.

§3.4. Термы при невыполнимости тождества суперассоциативности

Определение терма

Понятие терма с множеством переменных X и множеством констант K над множеством мультиопераций $F \subseteq \mathcal{M}_k$ определяется индуктивно:

- если $y \in K \cup X$, то $t \equiv y$ есть терм и $U(t) = \{y\}$;
- если $f \in F^{(n)}$ и $t_1, ..., t_n$ есть термы, то $t \equiv f(t_1, ..., t_n)$ есть терм и $U(t) = U(t_1) \cup ... \cup U(t_n)$;
- если t_0 есть терм, $U(t_0) = \{y_1, ..., y_n\}$ и $t_1, ..., t_n$ есть термы, то $t \equiv t_0(t_1, ..., t_n)$ есть термы и $U(t) = U(t_1) \cup ... \cup U(t_n)$.

§3.5.Системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях

Общий вид системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях

$$\begin{cases} t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \end{cases}$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k$.

§3.5.Системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях

Общий вид системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях

$$\begin{cases} t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \end{cases}$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k$.

Решением системы называется набор мультиопераций $f_1, ..., f_s$, такой что для всех i выполняются включения при стандартном определении значения термов посредством введенного оператора суперпозиции:

$$t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c})) \subseteq q_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))$$

§3.6.Алгоритм решения системы неравенств с коэффициентами и неизвестными в мультиоперациях

(A1) Вход: система неравенств в мультиоперациях.

(A2) Переход к булевым пространственным матрицам.

(A3) Переход к системе булевых неравенств, при этом возможен переход к одному булеву уравнению.

(A4) Нахождение решения системы (A3).

(A5) Выход: решение исходной системы (A1), которое определяется по решению полученному в (A4).

§3.7.Пример решения системы неравенств в мультиоперациях

Пусть $A = \{0, 1\}$.
Определим следующие мультиоперации:

$$h(a, b) = \{a, b\}, s(a) = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } a = 0; \\ \{0\}, \text{ если } a = 1, \end{cases}$$

$$\text{g(a,b)}=\begin{cases} \{a\}, \text{ если } a = b; \\ \varnothing, \text{ если } a \neq b. \end{cases} \quad \text{a,b} \in A.$$

§3.7.Пример решения системы неравенств в мультиоперациях

Пусть $A = \{0, 1\}$.
Определим следующие мультиоперации:

$$h(a, b) = \{a, b\}, s(a) = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } a = 0; \\ \{0\}, \text{ если } a = 1, \end{cases}$$

$$\text{g(a,b)}=\begin{cases} \{a\}, \text{ если } a = b; \\ \varnothing, \text{ если } a \neq b. \end{cases} \quad \text{a,b} \in A.$$

Решим неравенство с одним неизвестным и одним коэффициентом

$$g(h(z, c), s(c)) \subseteq g(c, z)$$

§3.8.Переход к булевым пространственным матрицам

Представим мультиоперации в векторной форме:
$h(a,b) = (1332), s(a) = (21), g(a,b) = (1002)$.

Представим их булевыми пространственными матрицами:
$M_h = \begin{bmatrix} 11\,10 \\ 01\,11 \end{bmatrix}$, $M_s = \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 10\,00 \\ 00\,01 \end{bmatrix}$.

Введем матрицы для неизвестного и коэффициента:
$M_z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $M_c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, где $a \neq b$.

§3.8.Переход к булевым пространственным матрицам

Представим мультиоперации в векторной форме:
$h(a,b) = (1332), s(a) = (21), g(a,b) = (1002)$.

Представим их булевыми пространственными матрицами:
$M_h = \begin{bmatrix} 11\,10 \\ 01\,11 \end{bmatrix}$, $M_s = \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 10\,00 \\ 00\,01 \end{bmatrix}$.

Введем матрицы для неизвестного и коэффициента:
$M_z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $M_c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, где $a \neq b$.

Найдем представления левой и правой частей исходного неравенства
$M_{h(z,c)} = \begin{bmatrix} ax + bx + ay \\ bx + ay + by \end{bmatrix}$, $M_{s(c)} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$, $M_{g(h(z,c),s(c))} = \begin{bmatrix} bx + aby \\ ay + abx \end{bmatrix}$,
$M_{g(c,z)} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$.

§3.9.Переход к системе булевых неравенств и эквивалентное ей одному булеву уравнению

Получаем систему булевых неравенств с 2 неизвестными и 2 коэффициентами:

$$\begin{cases} bx \vee aby \leq ax \\ ay \vee abx \leq by \\ 1 \leq a \oplus b \end{cases}$$

§3.9.Переход к системе булевых неравенств и эквивалентное ей одному булеву уравнению

Получаем систему булевых неравенств с 2 неизвестными и 2 коэффициентами:

$$\begin{cases} bx \vee aby \leq ax \\ ay \vee abx \leq by \\ 1 \leq a \oplus b \end{cases}$$

Эквивалентное этой системе булево уравнение имеет вид:

$$a\bar{y} \oplus b\bar{x} \oplus ab(x \oplus y) \oplus 1 = 0$$

Это булево уравнение в векторной форме:

$$f(a, b, x, y) = (1111001101011111) = 0$$

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_y f_m)^1_y(a, b, x) = (00301100)$
3) $g_m(a, b, x) = f_m(a, b, x, (\mu_y f_m)^1_y(a, b, x)) = (00101100) = 1$

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_y f_m)^1_y(a, b, x) = (00301100)$
3) $g_m(a, b, x) = f_m(a, b, x, (\mu_y f_m)^1_y(a, b, x)) = (00101100) = 1$
4) вычисляем: $x(a, b) = (\mu_y g_m)^1_x(a, b) = (0130)$
5) $h_m(a, b, y) = f_m(a, b, x(a, b), y) = (00111200) = 1$

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_y f_m)^1_y(a, b, x) = (00301100)$
3) $g_m(a, b, x) = f_m(a, b, x, (\mu_y f_m)^1_y(a, b, x)) = (00101100) = 1$
4) вычисляем: $x(a, b) = (\mu_y g_m)^1_x(a, b) = (0130)$
5) $h_m(a, b, y) = f_m(a, b, x(a, b), y) = (00111200) = 1$
6) вычисляем: $y(a, b) = (\mu_y h_m)^1_y(a, b) = (0310)$

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_y f_m)^1_y(a, b, x) = (00301100)$
3) $g_m(a, b, x) = f_m(a, b, x, (\mu_y f_m)^1_y(a, b, x)) = (00101100) = 1$
4) вычисляем: $x(a, b) = (\mu_y g_m)^1_x(a, b) = (0130)$
5) $h_m(a, b, y) = f_m(a, b, x(a, b), y) = (00111200) = 1$
6) вычисляем: $y(a, b) = (\mu_y h_m)^1_y(a, b) = (0310)$
7) переходим к булевым операциям: при $a = 0, b = 1$ решение: $x = 0, y = \sigma$; при $a = 1, b = 0$ решение: $x = \sigma, y = 0$, где $\sigma \in \{0, 1\}$.

§3.10.Решение булевой системы и получение решения неравенств в мультиоперациях

1) переходим к уравнению в мультиоперациях:

$$f_m(a, b, x, y) = (2222112212122222) = 1$$

2) вычисляем: $(\mu_y f_m)^1_y(a, b, x) = (00301100)$
3) $g_m(a, b, x) = f_m(a, b, x, (\mu_y f_m)^1_y(a, b, x)) = (00101100) = 1$
4) вычисляем: $x(a, b) = (\mu_y g_m)^1_x(a, b) = (0130)$
5) $h_m(a, b, y) = f_m(a, b, x(a, b), y) = (00111200) = 1$
6) вычисляем: $y(a, b) = (\mu_y h_m)^1_y(a, b) = (0310)$
7) переходим к булевым операциям: при $a = 0, b = 1$ решение: $x = 0, y = \sigma$; при $a = 1, b = 0$ решение: $x = \sigma, y = 0$, где $\sigma \in \{0, 1\}$.
8) возвращаясь к мультиоперациям получаем два решения исходного неравенства ($o-$ всюду неопределенная мультиоперация):

$$z = f(c) = o,$$

$$z = f(c) = c.$$

§3.11. Системы нечетких неравенств с неизвестными

Вид системы нечетких неравенств с неизвестными и константами

$$\begin{cases} (t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z})) \ \lessgtr_1 \ \alpha_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z})) \lessgtr_m \alpha_m \end{cases}$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k$, $\lessgtr_i \in \{\leq, <, \geq, >\}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ при $i \in \{1, ..., m\}$.

§3.11. Системы нечетких неравенств с неизвестными

Вид системы нечетких неравенств с неизвестными и константами

$$\begin{cases} (t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z})) \ \lessgtr_1 \ \alpha_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z})) \lessgtr_m \alpha_m \end{cases}$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k$, $\lessgtr_i \in \{\leq, <, \geq, >\}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ при $i \in \{1, ..., m\}$.

Решением системы называется набор мультиопераций $f_1, ..., f_s$, такой что для всех i выполняется: если $|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]| = 0$, то $1 \lessgtr_i \alpha_i$, иначе $\dfrac{|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))] \cap \gamma[q_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]|}{|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]|} \lessgtr_i \alpha_i$ при стандартном определении значения γ термов при мультиоперациях.

§3.11. Системы нечетких неравенств с неизвестными

Вид системы нечетких неравенств с неизвестными и константами

$$\begin{cases} (t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z})) \ \lessgtr_1 \ \alpha_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z})) \lessgtr_m \alpha_m \end{cases}$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k$, $\lessgtr_i \in \{\leq, <, \geq, >\}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ при $i \in \{1, ..., m\}$.

Решением системы называется набор мультиопераций $f_1, ..., f_s$, такой что для всех i выполняется: если $|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]| = 0$, то $1 \lessgtr_i \alpha_i$, иначе $\dfrac{|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))] \cap \gamma[q_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]|}{|\gamma[t_i(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c}))]|} \lessgtr_i \alpha_i$ при стандартном определении значения γ термов при мультиоперациях.

Вопрос 3. Разработать алгоритм решения системы нечетких неравенств с коэффициентами и неизвестными в мультиоперациях.

§4. Алгебры операций и алгебры мультиопераций

§4.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

§4.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.

§4.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).

§4.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, состоящую из $\mathcal{O}_k^{(n)}(\mathcal{M}_k^{(n)})$ будем называть полной алгеброй и обозначать $\mathcal{AO}_k^n$ $(\mathcal{AM}_k^n)$.

§4.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, состоящую из $\mathcal{O}_k^{(n)}(\mathcal{M}_k^{(n)})$ будем называть полной алгеброй и обозначать $\mathcal{AO}_k^n$ ($\mathcal{AM}_k^n$).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, порожденную всеми n-местными проекциями (и n-местной нулевой мультиоперацией) ранга k будем называть тривиальной алгеброй и обозначать $\mathcal{EO}_k^n$ ($\mathcal{EM}_k^n$).

§5. О теории Галуа для алгебр фиксированного ранга

§5.1. Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

§5.1. Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

§5.1. Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

Если $\pi(\rho(c)) = c$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{C}$.
Если $\rho(\pi(d)) = d$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{D}$.
Если выполняются оба условия, то совершенная связь Галуа.

§5.2. Стабилизаторы и нормализаторы

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

$$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})),$$

то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.

§5.2. Стабилизаторы и нормализаторы

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

  $$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$
  $$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})),$$

  то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.
- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f \text{ стабильна отн. } g\} \text{ — } n\text{-стабилизатор } g;$$
  $$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$

§5.2. Стабилизаторы и нормализаторы

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

  $$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$
  $$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})),$$

  то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.
- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f \text{ стабильна отн. } g\} \text{ — } n\text{-стабилизатор } g;$$
  $$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$
- Пусть $f \in \mathcal{O}_k^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$

  $$N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_k^{(m)}, g \text{ нормальна отн. } f\} \text{—} m\text{-нормализатор } f$$
  $$N^m(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} N^m(f) \text{ — } m\text{-нормализатор } \mathcal{F}.$$

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

Теорема.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^n$ и $\mathcal{W}_k^m$.

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

Теорема.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^n$ и $\mathcal{W}_k^m$.

Вопрос 4. При каких n и m эти соответствия определяют совершенную связь Галуа для $k \geq 3$.

§5.4. Совершенная связь Галуа для решеток алгебр ранга 2

Теорема. *Для решеток* $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m$ *выполняется:*
1) связь Галуа совершенна в $\mathcal{V}_2^n \iff m \geq \max\{3, n-1\}$;
2) связь Галуа совершенна в $\mathcal{W}_2^m \iff n \geq \max\{3, m+1\}$;
3) связь Галуа совершенна для $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m \iff n-1 = m \geq 3$.

§5.4. Совершенная связь Галуа для решеток алгебр ранга 2

Теорема. *Для решеток* $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m$ *выполняется:*
1) связь Галуа совершенна в $\mathcal{V}_2^n \iff m \geq \max\{3, n-1\}$;
2) связь Галуа совершенна в $\mathcal{W}_2^m \iff n \geq \max\{3, m+1\}$;
3) связь Галуа совершенна для $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m \iff n-1 = m \geq 3$.

Следствие.
1) для любого $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_2^{(n)}$ *при* $m \geq n-1 \geq 3$;

$$[\mathcal{F}] = S^n(N^m(\mathcal{F}));$$

2) для любого $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_2^{(m)}$ *при* $n \geq m+1 \geq 4$

$$\langle \mathcal{R} \rangle = N^m(S^n(\mathcal{R}));$$

3) решетки алгебр $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^{n-1}$ *при* $n \geq 4$ *антиизоморфны.*

§5.5. Алгебры ранга 2

Предложение. *Для алгебр следующие условия эквивалентны:*
1) алгебра $\mathcal{Q}$ не представима в виде объединения собственных подалгебр;
2) алгебра $\mathcal{Q}$ имеет единственную максимальную подалгебру;
3) любой базис (минимальная система порождающих) алгебры $\mathcal{Q}$ является одноэлементным.

§5.5. Алгебры ранга 2

Предложение. *Для алгебр следующие условия эквивалентны:*
1) алгебра $\mathcal{Q}$ не представима в виде объединения собственных подалгебр;
2) алгебра $\mathcal{Q}$ имеет единственную максимальную подалгебру;
3) любой базис (минимальная система порождающих) алгебры $\mathcal{Q}$ является одноэлементным.

Число алгебр размерности n	2	3	4	5	...	$n \geq 3$
алгебр операций	26	46	54	62	...	$8n + 22$
алгебр мультиопераций	44	54	62	70	...	$8n + 30$
$\cup$-неразложимых алгебр операций	10	12	14	16	...	$2n + 6$
$\cup$-неразложимых алгебр мультиопераций	14	15	17	19	...	$2n + 9$

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 минимальных алгебр (2020, С.И.Тодиков).

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 минимальных алгебр (2020, С.И.Тодиков).

Вопрос 5. Сколько максимальных алгебр в $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$?