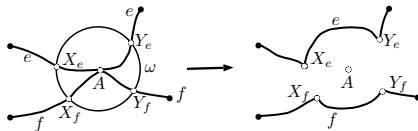


О изображениях на плоскости и раскрасках k -планарных графов

Д. В. Карпов

23.06.2022

- Говоря об изображении графов на плоскости, мы всегда будем подразумевать, что вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Изображение каждого ребра содержит только две вершины — его концы.
- Мы будем считать, что в каждой **точке пересечения** пересекаются ровно два ребра (если в изображении графа через какую-то точку проходит более двух рёбер, несложно исправить изображение так, чтобы этого избежать).
- Мы наложим на изображение графа на плоскости еще одно условие: если A — точка пересечения двух рёбер e и f , то любая достаточно маленькая окружность с центром в A пересекает каждое из этих рёбер дважды, причем точки пересечения с e и f на окружности чередуются (если это условие не выполнено, несложно подправить изображение так, чтобы пересечение в точке A исчезло, см. рис).



Определение

Граф G назовём k -планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более чем k других.

- При $k = 0$ мы имеем обычный планарный граф.
- Чем больше k , тем сложнее возможная структура k -планарных графов.
- Мы будем рассматривать только такие изображения k -планарных графов на плоскости, в которых каждое ребро пересекает не более чем k других.
- Для любого k -планарного графа G существует изображение $\mathcal{G}$, в котором никакое ребро не пересекает само себя.
- В частности, этими свойствами обладает изображение с минимальным числом точек пересечения ребер.

- В некоторых работах граф называют k -планарным, если его можно так изобразить на плоскости, что на каждом ребре расположено не более k точек пересечения с другими ребрами.
- Верно ли, что этому более сильному условию удовлетворяют все k -планарные графы?
- Для больших k , скорее всего, ответ отрицательный. Рассмотрим случаи маленьких k .

Теорема 1

Для любого 1-планарного графа G существует изображение $\mathcal{G}$, удовлетворяющее условиям 1° и 2° . В частности, этими свойствами обладает изображение с минимальным числом точек пересечения ребер.

1° . *Никакие два пересекающихся ребра не имеют общего конца.*

2° . *Любые два пересекающихся ребра пересекаются ровно в одной точке.*

- Назовем ребро $e \in G$ *простым* в изображении $\mathcal{G}$, если оно не пересекает других ребер.
- *Плоский граф* изображения $\mathcal{G}$ — граф $P(\mathcal{G})$ на том же множестве вершин, ребра которого — простые ребра $\mathcal{G}$.

Теорема 2

(О. В. Бородин, 1984.)

Для любого 1-планарного графа H существует 1-планарный надграф G с тем же множеством вершин, который имеет такое изображение $\mathcal{G}$, что каждая пара пересекающихся рёбер в $\mathcal{G}$ будет парой диагоналей в грани-четырёхугольнике плоского графа $P(\mathcal{G})$.

- В надграфе H возможны кратные ребра.

Теорема 3

(ДК, 2019.)

Пусть G — 2-планарный граф, а $\mathcal{G}$ — его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении $\mathcal{G}$ пересекаются ровно в одной точке, а никакие два ребра с общим концом не пересекаются.

- В плоском изображении графа для каждой вершины x можно упорядочить по часовой стрелке **выходы** рёбер из этой вершины.
- Два выхода назовём **соседними**, если между ними хотя бы с одной стороны нет других выходов рёбер.

2-диагональные графы

- Назовем граф G' **2-диагональным**, если его можно изобразить на плоскости так, что каждое ребро пересекает не более чем два других, а для любой вершины x среди любых трёх последовательных выходов рёбер из x есть выход хотя бы одного простого ребра.
- В случае, когда плоский граф $P(\mathcal{G})$ двусвязен, граница каждой его грани — простой цикл. Условие 2-диагональности тогда утверждает, что из каждой вершины грани выходит не более чем две **диагонали** (то есть непростых ребра, изображенных внутри этой грани).

Теорема 4

(Д.К. 2019.)

Любой 2-планарный граф H имеет 2-диагональный надграф H' на том же множестве вершин (то есть, с $V(H') = V(H)$). В графе H' допускаются кратные ребра.

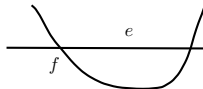
- При $k \geq 3$ не доказано аналога Теорем 1 и 3.
- Для k -планарных графов мы можем предложить лишь более слабый результат, причем при дополнительном условии.

Теорема 5

(Д.К. 2019.) Пусть $k \geq 3$ — натуральное число, G — рёберно $(2k + 1)$ -связный k -планарный граф, а $\mathcal{G}$ — его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении $\mathcal{G}$ пересекаются ровно в одной точке.

Зацепления

- Точки пересечения и концы делят рёбра на части — также ломаные. Если A и B — две точки на ребре e (возможно, его концы), то через AeB мы будем обозначать участок ребра между этими точками.
- Пусть e и f — два ребра в изображении $\mathcal{G}$ графа G , а X и Y — две их общие точки (точки пересечения или концы), причем участки XeY и XfY не пересекаются друг с другом и в одной из областей, ограниченной ими, нет вершин графа G . Мы будем называть такую ситуацию **зацеплением** рёбер e и f .



Теорема 6

(J. Pach, G. Toth, 1997.) Пусть $\mathcal{G}$ — изображение k -планарного графа G с минимальным числом точек пересечения. Тогда $\mathcal{G}$ не имеет зацеплений.

Верхняя оценка на количество ребер k -планарного графа

- Классика: для планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство
$$e(G) \leq 3(v(G) - 2).$$

Теорема 7

(*J. Pach, G. Toth, 1997.*)

Пусть $k \leq 4$. Тогда для k -планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство

$$e(G) \leq (k + 3)(v(G) - 2).$$

- Оценка из Теоремы 7 для $k = 1$ и $k = 2$ точна. При $k = 3$ ее можно улучшить.

Теорема 8

(*J. Pach, R. Radoičić, G. Tardos, G. Toth, 2006.*)

Для 3-планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство

$$e(G) \leq 5,5(v(G) - 2).$$

- Оценка из Теоремы 7 для $k = 1$ и $k = 2$ точна.
- Для $k = 1$ пусть G'_n — плоский граф на n вершинах, все грани которого — четырёхугольники. Несложно построить такие графы для всех достаточно больших n .
- Проведем в G'_n две диагонали каждой грани и получим серию 1-планарных графов G_n с $e(G_n) = 4(n - 2)$.
- Для $k = 2$ мы построим серию плоских графов H'_n на n вершинах, все грани которых — пятиугольники (такие графы существуют при всех достаточно больших $n = 3m + 2$).
- Построим 2-планарный граф H_n , проведя в H'_n все 5 диагоналей каждой грани. Получим серию 2-планарных графов H_n с $e(H_n) = 5(n - 2)$.
- Оценка из Теоремы 8 почти точна. Можно построить бесконечную серию примеров плоских графов, у которых почти все грани — 6-угольники, и в каждом из них провести все диагонали, кроме одной из главных.
- Таким образом, получится серия 3-планарных графов F_n на n вершинах (для бесконечной последовательности натуральных n) с $e(F_n) = 5.5n - 15$.

Верхняя оценка на количество ребер k -планарного графа при больших k

О изображениях
на плоскости и
раскрасках
 k -планарных
графов

Д. В. Карпов

Теорема 9

(J. Pach, G. Toth, 1997.)

Пусть $k \geq 4$, а G — k -планарный граф без петель и кратных ребер. Тогда $e(G) < \sqrt{16,875k} \cdot v(G)$.

Верхняя оценка на количество ребер двудольного 1-планарного графа

- Мы знаем, что для двудольного планарного графа G
$$e(G) \leq 2v(G) - 4.$$

Теорема 10

(Д.К., 2012)

Пусть G — двудольный 1-планарный граф на $v \geq 4$ вершинах. Тогда

- $e(G) \leq 3v - 9$ при нечетном n и $n = 6$;
- $e(G) \leq 3v - 8$ при четном $n \neq 6$.
- Обе оценки из Теоремы 10 точны для всех n .

Теорема 11

(G. Ringel, 1965.)

Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 7$.

Гипотеза

(G. Ringel, 1965.)

Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 6$.

Теорема 12

(О. В. Бородин, 1984.)

Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 6$.

- Так как K_6 — это 1-планарный граф, оценка 6 точна.

- Вместо Теоремы 12, Бородин доказал эквивалентную ей.

Определение

Пусть H — плоский граф. Тогда $\chi_4(H)$ — минимальное количество цветов в правильной раскраске графа H , в которой все вершины каждой грани-четырёхугольника покрашены в разные цвета. Такую раскраску назовем **4-правильной**.

Теорема 12'

(О. В. Бородин, 1984.)

Для любого плоского графа G выполнено $\chi_4(G) \leq 6$.

Теорема 12 $\Rightarrow$ Теорема 12'.

Проведем в каждой грани- 4-угольнике две диагонали, получим 1-планарный граф, который имеет правильную раскраску в 4 цвета.

Теорема 12' $\Rightarrow$ Теорема 12.

- Рассмотрим 1-планарный граф G' . По Теореме 2 он имеет надграф H' , в котором каждая пара пересекающихся ребер является диагоналями грани 4-угольника.
- Тогда правильная раскраска H' — это 4-правильная раскраска плоского графа H , состоящего из простых ребер графа H' .

Определение

Пусть H — плоский граф. Тогда $\chi_k(H)$ — минимальное количество цветов в правильной раскраске графа H , в которой все вершины каждой грани размера не более k — разного цвета. Таковую раскраску назовем **k -правильной**.

- Если $\chi(G') \leq m$ для любого 2-планарного графа G' , то $\chi_5(G) \leq m$ для любого плоского графа G .
- Однако, обратная импликация как минимум неочевидна (а может быть, и неверна).

Теорема 13

(O. Ore, M. Plummer, 1969.)

$$\left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil \leq \max_{G\text{-планарный граф}} \chi_k(G) \leq 2k - 1.$$

Гипотеза

Для любого плоского графа G выполнено $\chi_5(G) \leq 8$.

Теорема 14

(Д.К., 2020.)

Для любого 2-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 9$.

- Отметим, что по Теореме 7 любой 2-планарный граф имеет среднюю степень менее 10, и потому хроматическое число не более 10.

Теорема 15

(*Е. Ackerman, 2014.*) Пусть $\mathcal{G}$ — изображение 1-планарного графа (петель нет, самопересечений ребер нет, два пересекающихся ребра пересекаются один раз крест-накрест и не имеют общего конца). Тогда $\mathcal{G}$ можно представить в виде объединения плоского графа и плоского леса (то есть леса, изображенного без пересечений ребер в этом конкретном изображении).

• Эта теорема имеет несколько несложных доказательств. В то же время, ее аналог для 2-планарных графов не доказан.

Гипотеза

Пусть $\mathcal{G}$ — изображение 2-планарного графа. Тогда $\mathcal{G}$ можно представить в виде объединения плоского графа и двух плоских лесов.