

Секция «Комбинаторный анализ»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО КОМБИНИРОВАНИЯ ДВУХ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Л. Г. Афраймович, М. Д. Емелин (Нижний Новгород)

Трёхиндексная аксиальная задача о назначениях имеет широкую область применения (примеры приведены в [2]). Мы рассматриваем задачу оптимального комбинирования двух допустимых решений трёхиндексной аксиальной задачи о назначениях. Предложенный алгоритм позволяет получить решение не хуже, чем любое из входных.

Пусть заданы три непересекающихся множества индексов I, J, K ,

$$I \cap J = \emptyset, J \cap K = \emptyset, I \cap K = \emptyset. |I| = |J| = |K| = n,$$

а также трёхиндексная матрица стоимостей и трёхиндексная матрица неизвестных,

$$c_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K,$$

$$x_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K;$$

поставлена трёхиндексная аксиальная задача о назначениях,

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, i \in I, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, j \in J, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, k \in K, \quad (3)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, k \in K, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min; \quad (5)$$

и известны два допустимых решения x^1, x^2 данной задачи. Введем множество $W(x)$ следующим образом: $W(x) = \{(i, j, k) \mid x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}$. Обозначим через $Z(W(x^1, x^2))$ задачу (1)–(6), где $W(x^1, x^2) = W(x^1) \cup W(x^2)$

$$x_{ijk} = 0, (i, j, k) \notin W \quad (6)$$

В работе предложен следующий алгоритм приближенного решения задачи $Z(W(x^1, x^2))$.

Шаг 1. Построить граф $G(V, A)$, где $V = \{I \cup J \cup K\}$, $A = \{(i, j), (i, k), (j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1, x^2)\}$.

Шаг 2. Найти компоненты связности $V_l, l = (1, q)$ графа G и построить подграфы $G_l = (V_l, A_l)$, $l = (1, q)$, порожденные соответствующими компонентами связности.

Шаг 3. Построить следующие множества

$$D_l^1 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\},$$

$$D_l^2 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^2), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}.$$

Шаг 4. Оптимальное значение критерия определяется как

$$c^* = \sum_{l=1}^q \min \left(\sum_{(i,j,k) \in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k) \in D_l^2} c_{i,j,k} \right).$$

Шаг 5. Приближенное решение задачи определяется по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk} = 0, i \in I, j \in J, k \in K$. Тогда для каждого $l = (1, q)$ выполнить

$$x_{ijk} = 1, (i, j, k) \in D_l^{p^*}, \text{ где } p^* = \arg \min_{p \in \{1,2\}} \sum_{(i,j,k) \in D_l^p} c_{ijk}.$$

Для проведения вычислительного эксперимента использовались тесты из Grama and Spieksma Dataset [1]. Первое допустимое решение было получено применением алгоритма, предложенного в статье [1]. Для получения второго решения был применен тот же алгоритм после модификации матрицы стоимостей следующим способом:

$$c_{ij}^1 = c_{ij} + \min_{k \in K} c_{ik} + c_{jk}, i \in I, j \in J,$$

$$c_{jk}^1 = c_{jk} + \min_{i \in I} c_{ij} + c_{ik}, k \in K, j \in J,$$

$$c_{ik}^1 = c_{ik} + \min_{j \in J} c_{ij} + c_{jk}, k \in K, i \in I.$$

Результаты численного эксперимента (значение критерия/отклонение от оптимума):

Номер теста	Решение алгоритмом [1]		Решение алгоритмом [1] с модификацией цен		Комбинация решений, предложенным алгоритмом		Значение оптимума
1	1620	0.7463%	1617	0.5597%	1613	0.3109%	1608
2	1411	0.7138%	1406	0.3569%	1406	0.3569%	1401
3	1613	0.5611%	1611	0.4364%	1605	0.06234%	1604
4	2666	0.1503%	2688	0.9767%	2665	0.1127%	2662
5	2470	0.8575%	2507	2.368%	2469	0.8167%	2449
6	2788	1.088%	2787	1.051%	2770	0.4351%	2758
7	4851	1.126%	4822	0.5212%	4822	0.5212%	4797
8	5150	1.638%	5100	0.6513%	5100	0.6513%	5067
9	4341	1.26%	4326	0.9097%	4326	0.9097%	4287
10	9761	0.7951%	9752	0.7022%	9752	0.7022%	9684
11	9129	2.068%	9066	1.364%	9066	1.364%	8944
12	9869	1.272%	9836	0.9338%	9836	0.9338%	9745
13	135	1.504%	140	5.263%	135	1.504%	133
14	137	4.58%	138	5.344%	137	4.58%	131
15	134	2.29%	139	6.107%	134	2.29%	131
16	295	3.147%	291	1.748%	291	1.748%	286
17	292	2.098%	292	2.098%	292	2.098%	286
18	294	4.255%	291	3.191%	291	3.191%	282

Согласно приведенным выше результатам решение алгоритма [1] в среднем отклоняется на 1.675% от оптимума, решение алгоритма [1] после модификации матрицы стоимостей — на 1.921%, рекорд данных двух решений — на 1.328%, а оптимальная комбинация данных решений предложенным в работе алгоритмом на 1.255%. Полученные результаты говорят о перспективности предложенного алгоритма. В качестве базовых допустимых решений могут быть использованы решения, полученные иными приближенными и/или эвристическими алгоритмами.

Список литературы

1. Crama Y., Spieksma F.C.R. Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // European Journal of Operational Research. — 1992. — 60. — P. 273–279.
2. Афраимович Л.Г. Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой // Автоматика и телемеханика. —

ПРИМЕНЕНИЕ T -МОДЕЛЕЙ И T -ДИАГРАММ В КОМБИНАТОРИКЕ

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова (Москва)

В [1] было введено понятие T -модели как последовательности таблиц $T_1, T_2, \dots$, состоящих из целых положительных чисел.

Определение. Тройка (S, θ, T_1) с алфавитом $S \subseteq \mathbb{N}$, отображением $\theta : s \mapsto j_1 \dots j_s$, $s \in S$, $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s$, преобразующим $s \in T_n$ в строку $j_1 \dots j_s$ следующей таблицы T_{n+1} , т. е. $T_{n+1} = \theta(T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и начальной таблицей T_1 называется T -моделью.

Степени образов $\theta^i(s)$, $i \geq 0$ элементов $s \in T_n$ называются в [1] блоками i -го ранга таблиц T_{n+i} . Вес $|\theta^i(s)|$, $i \geq 1$ блока $\theta^i(s)$ равен числу содержащихся в нем блоков $(i-1)$ -го ранга, $|\theta^0(s)| = s$, а i -й вес таблицы T_{n+i} равен $|T_{n+i}|_i = |\theta^i(T_n)| = \sum_{s \in T_n} |\theta^i(s)|$, $i \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Например, при $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\theta : s \mapsto 23 \dots (s+1)$ и $T_1 = (2)$ имеем последовательность таблиц $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ T -модели Каталана [1]:

$$(2), (23), \begin{pmatrix} 23 \\ 234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 & 23 \\ 234 & 2345 \end{pmatrix}, \dots, \quad (1)$$

где $|T_4|_0 = 42$, $|T_4|_1 = 14$, $|T_4|_2 = 5$, $|T_4|_3 = 2$, и полагаем $|T_n|_n = 1$.

Отметим, что $|\theta^i(s)| = s$ и $|T_{n+i}|_i = |T_n|_0$ при $i \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, а некоторые свойства семейств T -моделей Фусса–Каталана и их q -аналогов были изучены в [1]. В частности, доказано, что T -модель Каталана (1) определяет баллотировочные многочлены

$$B_0(t) = 1, \quad B_n(t) = t^{-1} \sum_{s \in T_n} t^s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{n,k} t^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $B_{n,k} = \frac{n-k}{n+k} \binom{n+k}{n}$, а $B_n(1) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — числа Каталана.

Зададим рекурсивно множество номеров $\mathbb{T}_n$ таблицы T_n при $n \in \mathbb{N}$: если $\nu = \nu_1 \dots \nu_n$ номер $s \in T_n$, то номер $s' \in T_{n+1}$ равен $\nu\nu_{n+1}$, где ν_{n+1} порядковый номер элемента s' в строке $\theta(s)$, а номер элемента $s > 1$ таблицы $T_1 = (s)$ равен 1. Например, для таблицы T_3 в (1) имеем $\mathbb{T}_3 = \{111, 112, 121, 122, 123\}$.

Определение. В посете $\mathbb{T}_n$ элемент ν' покрывает ν , если вектор $\nu' - \nu$ имеет все нулевые координаты, кроме одной, равной единице, а диаграмму Хассе $\mathfrak{T}_n$ этого посета назовем T -диаграммой.

Введем рангово-производящий многочлен $\sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} q^{\rho(\nu)}$, где ранг $\rho(\nu)$ равен $\sum_{i=1}^n (\nu_i - 1)$, и назовем T -модель регулярной, если все посеты $\mathbb{T}_n$ при $n \geq 2$ являются решетками. В этом случае все многочлены $\sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} q^{\rho(\nu)}$ унимодальны, а все решетки дистрибутивны.

Для регулярности T -модели достаточно, чтобы отображение θ на S было регулярным, т. е. все столбцы описывающей его таблицы являлись неубывающими числовыми последовательностями.

Для T -модели Каталана (1) множество двоичных слов W_n , введенное рекурсивно в [1], легко преобразовать в посет $\mathbb{T}_n$. Если определить преобразование Лемера $\mathbf{l}$ перестановки $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ как код $\mathbf{l}\sigma = \mathbf{l}\sigma_1 \dots \mathbf{l}\sigma_n$, где $\mathbf{l}\sigma_i = \#\{j : \sigma_j < \sigma_i, 0 \leq j \leq i-1, \sigma_0 = 0\}$, а $i = 1, \dots, n$, то использование результатов по 312-избегающим перестановкам [2] приводит к следующему утверждению.

Лемма. Множество кодов Лемера всех 213-избегающих перестановок из $\mathfrak{S}_n$ совпадает для T -модели Каталана с посетом $\mathbb{T}_n$.

Пусть $\text{rise}(\nu) = \#\{i : \nu_i < \nu_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1, \nu_0 = 0\}$ для слова $\nu = \nu_1 \dots \nu_n \in \mathbb{T}_n$, а $\text{ima}(\nu) = |\{\nu_1, \dots, \nu_n\}|$.

Теорема. Для T -модели Каталана производящие многочлены 4-х статистик на посете $\mathbb{T}_n$ при $n \in \mathbb{N}$ имеют следующий вид:

$$N_n(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} t^{\text{rise}(\nu)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} t^k, \quad B_n(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} t^{\nu_n},$$

$$Q_n(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} t^{\text{ima}(\nu)} = \sum_{k=1}^n Q_{n,k} t^{n-k+1}, \quad C_n(q) = \sum_{\nu \in \mathbb{T}_n} q^{\rho(\nu)},$$

где $N_n(t)$ — многочлены Нараяны [2], $B_n(t)$ определены (2), коэффициенты $Q_{n,k}$ находятся с помощью многочленов, задаваемых формулой $F_0(u) = F_1(u) = 1$, $F_{n+1}(u) = F_n(u) - uF_{n-1}(u)$, $n \in \mathbb{N}$, и производящей функции $\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m,m+1} u^{n+m} = u^n / (F_n(u)F_{n+1}(u))$ [3], а $C_n(q)$ являются q -аналогами чисел Каталана [1].

Доказательство теоремы базируется на применении леммы и результатов из [1–3]. Отметим, что в уникальной работе [3] коэффициенты многочленов $N_n(t)$, $B_n(t)$, $Q_n(t)$ получены другими методами.

Для решетки $\mathbb{T}_n$ регулярной T -модели зададим вес ребра (ν, ν') T -диаграммы $\mathfrak{T}_n$ как число $n - k + 1$, где k — номер единичной координаты вектора $\nu' - \nu$, а $\nu, \nu' \in \mathbb{T}_n$. Сопоставим каждой максимальной цепи этой решетки последовательность $\pi \in \Pi_n$ весов ребер T -диаграммы $\mathfrak{T}_n$ и обозначим число максимальных цепей $e(\mathbb{T}_n) = |\Pi_n|$. Для T -модели Каталана формула для $e(\mathbb{T}_n)$ приведена в [4].

Определение. При регулярном отображении θ для T -диаграммы $\mathfrak{T}_n$ решетки $\mathbb{T}_n$ определим число $R_{n,k}$ ее частей, изоморфных булевой кубу размерности k , и многочлен $R_n(x) = \sum_{k \geq 0} R_{n,k} x^k$.

Некоторые из введенных понятий можно связать с такими терминами алгебраической топологии как клетка, клеточный комплекс, многочлен Пуанкаре. Например, по индукции доказывается, что характеристика Эйлера–Пуанкаре $\chi(\mathbb{T}_n)$ равна $R_n(-1) = 1$.

Теорема. Для T -модели Каталана

$$R_{n,k} = \frac{1}{n+1} \binom{n-1}{k} \binom{2n-k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N},$$

а обратное z -преобразование функции $z(1+zx)^{n-1}(1-z)^{-(n+1)}$ позволяет записать многочлен $R_n(x)$ в следующей компактной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n+1} \mathfrak{Z}^{-1} \left\{ \frac{z(1+zx)^{n-1}}{(1-z)^{n+1}}, z, t \right\} \Big|_{t=n+1}.$$

При дополнительном условии $R_0(x) = 1$ производящая функция

$$\mathfrak{R}(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) u^n = \frac{1 + xu - \sqrt{(1-xu)^2 - 4u}}{2(1+x)u},$$

причем при $x = 0$ она вырождается в производящую функцию для чисел Каталана, а при $x = 1$ — для малых чисел Шредера.

В заключение отметим, что T -модели и T -диаграммы успешно применяются при изучении свойств последовательности чисел Белла и ее обобщений, а также для многих других задач комбинаторики.

Список литературы

1. Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л. T -модели Фусса–Каталана и их q -аналоги // Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, (22–25 мая 2018 г.): Труды. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 35–38.

2. Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л. Обобщенные 312-избегающие перестановки и преобразование Лемера // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2017. — № 10. — С. 7–9.
3. Kreweras G. Sur les eventails de segments // Cahiers du Bureau universitaire de recherche operationelle. Serie recherche. — Paris, 1970. — Cahier no. 15. — P. 3–41.
4. Stanley R.P. The Fibonacci lattice // Fibonacci quarterly. — 1975. — V. 13. — P. 215–232.

КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА И НЕРАВЕНСТВА МНОГОМЕРНО-ДЕТЕРМИНАНТНОГО ТИПА

А. С. Гаспарян (Переславль-Залесский)

Многомерные определители — это функции от элементов многоиндексных матриц $A = \|a_{i_1, \dots, i_p}\|$, являющиеся одновременным обобщением функций $\det(a_{ij})$ и $\text{per}(a_{ij})$. Многомерные определители многообразны: каждый из них определяется некоторым булевым вектором $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, $\sigma_r \in \{0, 1\}$, — так называемой сигнатурой. В этой связи мы называем их σ -определителями. Число единиц в сигнатуре принято считать чётным. σ -определитель p -мерной кубической матрицы $A = \|a_{i_1, \dots, i_p}\|$, $i_r = 1, \dots, n$, определяется по формуле

$$|A|^{(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi_1, \dots, \pi_p \in S_n} \prod_{r=1}^p (\text{sgn}(\pi_r))^{\sigma_r} \prod_{i=1}^n a_{\pi_1(i) \dots \pi_p(i)} \quad .$$

Подробные сведения о многомерных матрицах и определителях можно найти в монографии Соколова [1].

1. Обобщённые неравенства Ньютона для симметрических средних. Симметрическими средними чисел $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ называются выражения

$$E_m(z_1, \dots, z_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_m}.$$

Теорема 1 (Ньютон). Для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$E_r E_{r+2} - E_{r+1}^2 \leq 0, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n$

Заметим, что левая часть неравенства есть симметрический определитель размера 2×2 : $\Delta_2 = \det(E_{r+i+j})_{i,j=0;1}$. Это послужило поводом для рассиотрения многоиндексных определителей вида

$$\begin{aligned} \Delta_{2p}^{(r)} &= |E_{r+i_1+\dots+i_{2p}}|^{(1,\dots,1)}, \quad i_1, \dots, i_{2p} = 0, 1 \quad r = 0, \dots, n-p, \quad \text{и} \\ \Delta_{2p+1}^{(r)} &= |E_{r+i_1+\dots+i_{2p+1}}|^{(0,1,\dots,1)}, \quad i_1, \dots, i_{2p+1} = 0, 1, \quad r = 0, \dots, n-p-1. \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть $n = 2p$. Тогда имеет место следующая цепочка тождеств:

$$\begin{aligned} \Delta_{2p}^{(0)} &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{2p} (-1)^s \binom{2p}{s} E_s(x_1, \dots, x_{2p}) E_{2p-s}(x_1, \dots, x_{2p}) = \\ &= \frac{1}{2(2p)!} \text{per}(z_i - z_j)_1^{2p} = \frac{(-1)^p p!}{2(2p)!} \sum (z_{i_1} - z_{i_2})^2 \dots (z_{i_{2p-1}} - z_{i_{2p}})^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. Для любых $x_i \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^p \sum_{s=0}^{2p} (-1)^s \binom{2p}{s} p_{r+s}(x_1, \dots, x_n) p_{r+2p-s}(x_1, \dots, x_n) &\geq 0, \\ (r = 0, \dots, n-p). \end{aligned}$$

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы Ролля.

Почти так же получаются неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^{p+1} \sum_{s=0}^{2p} (-1)^s \binom{2p}{s} p_{r+s}(x_1, \dots, x_n) p_{r+2p-s+1}(x_1, \dots, x_n) &\geq 0, \\ (r = 0, \dots, n-p-1, \forall x_1, \dots, x_n \in R_+). \end{aligned}$$

2. Неравенства для гиперболических полиномов.

Теорема 3. Пусть $Q(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)})$ — поляризация однородной формы степени m $Q(\vec{x}) = Q(\vec{x}, \dots, \vec{x})$, гиперболической в пространстве R^n , с положительным конусом $C_+(Q)$. Тогда для любых

$\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(m-k)}, \vec{b} \in C_+(Q)$ и любых $\vec{c} \in R^n$ имеет место неравенство

$$(-1)^{[(d+1)/2]} \sum_{i=0}^{2[d/2]} (-1)^i \binom{2[d/2]}{i} Q(\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(m-k)}, \underbrace{\vec{b}, \dots, \vec{b}}_{k-r-i}, \underbrace{\vec{c}, \dots, \vec{c}}_{r+i}) \cdot \\ \cdot Q(\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(m-k)}, \underbrace{\vec{b}, \dots, \vec{b}}_{k-r-d+i}, \underbrace{\vec{c}, \dots, \vec{c}}_{r+d-i}) \geq 0$$

в каждом из следующих случаев: а) $\vec{c} \in R^n$, $d \in \{2, \dots, 2[k/2]\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$; б) $-\vec{c} \in C_+(Q)$, $d \in \{1, \dots, k\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$.

3. Неравенства для перманентов. Выберем в качестве примера гиперболической формы произведение n переменных: $Q(\vec{x}) = x_1 \cdots x_n$. Положительным конусом $C_+(Q)$ в этом случае является положительный ортант $R_+^n = \{\vec{x} : x_i > 0\}$. Поляризацией будет форма перманента $per(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)})$. Неравенство теоремы 3 имеет в этом случае следующий вид:

$$(-1)^{[(d+1)/2]} \sum_{i=0}^{2[d/2]} (-1)^i \binom{2[d/2]}{i} per(\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(n-k)}, \underbrace{\vec{b}, \dots, \vec{b}}_{k-r-i}, \underbrace{\vec{c}, \dots, \vec{c}}_{r+i}) \cdot \\ \cdot per(\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(n-k)}, \underbrace{\vec{b}, \dots, \vec{b}}_{k-r-d+i}, \underbrace{\vec{c}, \dots, \vec{c}}_{r+d-i}) \geq 0$$

в каждом из следующих случаев: а) $\vec{c} \in R^n$, $d \in \{2, \dots, 2[k/2]\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$; б) $-\vec{c} \in R_+^n$, $d \in \{1, \dots, k\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$.

4. Неравенства для смешанных дискриминантов квадратичных форм. Ещё более общие и более интересные неравенства вытекают из теорема 3 в частном случае $Q(\vec{x}) = \det(x_{ij})_1^n$. В этом случае поляризацией является полилинейная форма от n квадратных матриц $A^1, \dots, A^n$, названная А. Д. Александровым смешанным дискриминантом и обозначенная через $D(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$. Если ограничиться рассмотрением симметрических матриц, то размерность пространства таких матриц равна $N = \frac{n(n+1)}{2}$, а роль положительного конуса здесь играет выпуклый конус $C_+(D)$ положительно определённых матриц. Можно заменить в общем неравенстве теоремы 3 $Q(\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(m)})$ на $D(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, чтобы получить неравенство

для смешанных дискриминантов

$$(-1)^{[(d+1)/2]} \sum_{i=0}^{2[d/2]} (-1)^i \binom{2[d/2]}{i} D(A^{(1)}, \dots, A^{(n-k)}, \underbrace{B, \dots, B}_{k-r-i}, \underbrace{C, \dots, C}_{r+i}) \cdot D(A^{(1)}, \dots, A^{(n-k)}, \underbrace{B, \dots, B}_{k-r-d+i}, \underbrace{C, \dots, C}_{r+d-i}) \geq 0.$$

в каждом из следующих случаев: а) $C \in R^N$, $d \in \{2, \dots, 2[k/2]\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$; б) $-C \in C_+(D)$, $d \in \{1, \dots, k\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-d\}$. Частный случай неравенства при $k = d = 2$, $r = 0$ есть знаменитое неравенство А. Д. Александрова, сыгравшее важную роль в теории смешанных объёмов выпуклых компактов.

Список литературы

1. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. — Киев: Наукова думка, 1972.

КОМБИНАТОРНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В БУЛЕВЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

В. П. Ильев, С. Д. Ильева (Омск)

Известно множество эквивалентных определений матроида, большая часть этих определений относится к следующему типу. *Матроид* определяется как булева решетка 2^U всех подмножеств непустого конечного множества U с выделенным семейством подмножеств, обладающим определенными свойствами.

К этому типу относится данное Уитни определение матроида в терминах независимых множеств [1]. В этом определении выделено непустое семейство $\mathcal{I} \subseteq 2^U$ *независимых множеств*, обладающее свойствами:

(I1) $(X \in \mathcal{I}, Y \subseteq X) \Rightarrow Y \in \mathcal{I}$ (*наследственность*);

(I2) $(X, Y \in \mathcal{I}, |X| > |Y|) \Rightarrow \exists a \in X \setminus Y : Y \cup \{a\} \in \mathcal{I}$;

или, что эквивалентно, свойствами (I1) и (I2'), где

($\mathcal{I}2'$) все базы любого множества $X \subseteq U$ имеют одинаковую мощность (*базой множества X* называется любое максимальное по включению независимое множество, содержащееся в X).

Обозначается такой матроид на множестве U как $\mathbf{M} = (U, \mathcal{I})$. Максимальные по включению независимые множества называются *базами* матроида $\mathbf{M}$, а минимальные по включению зависимые множества — *циклами* матроида $\mathbf{M}$.

Тот же матроид может быть определен, если в решетке 2^U выделено семейство $\mathcal{B}$ его баз или семейство $\mathcal{C}$ его циклов.

Семейство $\mathcal{I} \subseteq 2^U$, обладающее свойством наследственности ($\mathcal{I}1$), обычно называют *системой независимости* [2]. Заметим, что система независимости $\mathcal{I} \subseteq 2^U$ образует порядковый идеал булевой решетки 2^U . Напомним, что *порядковым идеалом* произвольной конечной решетки L называется подмножество $I \subseteq L$, удовлетворяющее условию

$$(x \in I, y \leq x) \Rightarrow y \in I.$$

Дунстан, Инглтон и Уэлш [3] ввели понятие суперматроида как обобщение понятия матроида в частично упорядоченном множестве с нулем. Для конечной решетки L это определение приобретает следующий вид. Решетка L с выделенным порядковым идеалом $I \subseteq L$ называется *суперматроидом*, если для любого $x \in L$ все максимальные элементы из $I \cap [0, x]$ (*базы* элемента x) имеют одинаковую высоту.

Если в определении суперматроида опустить последнее условие, то получится интересный универсальный комбинаторный объект, который может быть назван латтоидом. Другими словами, *латтоид* $\mathbf{L} = (L, I)$ — это произвольная решетка L с выделенным порядковым идеалом $I \subseteq L$. Булев латтоид, т.е. булева решетка 2^U с выделенным порядковым идеалом $\mathcal{I} \subseteq 2^U$ ранее был назван *наследственной системой* на множестве U [4].

Мотивом введения понятий наследственной системы и латтоида служит то обстоятельство, что оптимизационные задачи на наследственных системах и решетках часто возникают в различных областях дискретной оптимизации. Так, очень многие комбинаторные оптимизационные задачи могут быть сформулированы как задачи на наследственных системах следующим образом:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{B}\} \quad \text{или} \quad \min\{f(X) : X \in \mathcal{B}\}, \quad (1)$$

а также

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\} \quad \text{или} \quad \min\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}, \quad (2)$$

где $f : 2^U \rightarrow R_+$ — неотрицательная функция множеств, $\mathcal{B}$ — семейство всех *баз* (т. е. максимальных по включению независимых множеств), а $\mathcal{C}$ — семейство всех *циклов* (т. е. минимальных по включению зависимых множеств) некоторой наследственной системы. Большая часть таких задач относится к классу NP-трудных. Активно изучаются также аналогичные задачи на решетках различных типов, в частности, задачи минимизации модулярных и супермодулярных функций [5, 6].

Конечная решетка называется *геометрической*, если она атомарна и полумодулярна. Хорошо известно, что геометрические дистрибутивные решетки — это булевы решетки и только они.

Функция $f : L \rightarrow R_+$ называется *субмодулярной* на решетке L , если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство $f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y)$, и *супермодулярной*, если для любых $x, y \in L$ верно обратное неравенство. В случае равенства функция f называется *модулярной* на решетке L .

В работе рассматриваются задачи (1) и (2) с субмодулярными и супермодулярными целевыми функциями, а также аналогичные задачи на геометрических латтоидах, т.е. геометрических решетках с выделенным порядковым идеалом.

Получены априорные гарантированные оценки точности приближенных алгоритмов жадного типа для задач максимизации субмодулярных функций и минимизации супермодулярных функций на матроидах.

Исследован вопрос о разрешимости жадным алгоритмом задач оптимизации модулярных (аддитивных) функций на наследственных системах и геометрических латтоидах. В частности, установлено, что теорема Радо-Эдмондса о разрешимости жадным алгоритмом задачи (1) максимизации аддитивной функции на наследственной системе в булевой решетке становится неверной в геометрической решетке (в части, доказанной Эдмондсом).

Кроме того, исследованы различные определения суперматроида в геометрической решетке. Показано, что некоторые определения матроида, эквивалентные в булевой решетке, становятся неэквивалентными в геометрической решетке.

Список литературы

1. Whitney H. On the abstract properties of linear dependence // American Journal of Mathematics. — 1935. — V. 57. — P. 509–533.
2. Korte B., Hausmann D. An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Mathematics. — 1978. — V. 2. — P. 65–74.

3. Dunstan F., Ingleton A., Welsh D. Supermatroids // D. Welsh, D. Woodal (eds.) Combinatorics. Southend-on-Sea. 1972. — P. 72–122.
4. П'ев V. P. Hereditary systems and greedy-type algorithms // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132, No. 1–3. — P. 137–148.
5. Баранский В. А., Выплов М. Ю., Ильев В. П. Минимизация модулярных и супермодулярных функций на L -матроидах // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 42–53.
6. Khachaturov V. R., Khachaturov R. V. Supermodular programming on finite lattices // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — V. 52, No. 6. — P. 855–878.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАТРОИДОВ

А. Н. Исаченко (Минск)

Матроид — это пара $M = (S, F)$, где S — конечное множество элементов, а $F \in 2^S$ — семейство, для которого выполняются следующие условия (аксиомы независимости):

- (i1) $\emptyset \in F$;
- (i2) если $A \subseteq B$ и $B \in F$, то $A \in F$;
- (i3) если $A, B \in F$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$ такое, что $B \cup \{a\} \in F$.

В терминах циклов матроид определяется как пара $M = (S, \Sigma)$ где $\Sigma \subseteq 2^S$ — семейство, для которого выполняются следующие условия (аксиомы циклов):

- (c1) если $C_1, C_2 \in \Sigma$, $C_1 \neq C_2$, то $C_1 \not\subseteq C_2$;
- (c2) если $C_1, C_2 \in \Sigma$, $C_1 \neq C_2$ и $x \in C_1 \cap C_2$, то найдется цикл $C_3 \in \Sigma$ такой, что $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Элементы $a, b \in S$ в матроиде $M = (S, \Sigma)$ назовём связными, если существует цикл C такой, что $a, b \in C$. Матроид $M = (S, \Sigma)$ называют связным, если любые два элемента множества S являются связными.

Существует несколько критериев связности матроида [1].

1. Матроид связан тогда и только тогда, когда для каждого собственного подмножества A из S и ранга матроида ρ выполняется строгое неравенство $\rho(A) + \rho(S \setminus A) > \rho(S)$.

Произведением матроидов $M_i = (S_i, F_i)$, определённых на попарно непересекающихся множествах S_i , $i = 1, \dots, t$, называют матроид $M = (S, F)$, где S есть объединение множеств S_i , а F состоит из множеств, каждое из которых есть объединение ровно t подмножеств, по одному из каждого семейства F_i .

2. Матроид связан тогда и только тогда, когда он не разлагается в произведение меньших матроидов.

Ограничением матроида $M = (S, F)$ на множество $A \subset S$ называется матроид $M.A = (A, F(A))$, где $F(A) = \{X | X \subseteq A, X \in F\}$. Сепаратор матроида $M = (S, F)$ – это подмножество $T \subseteq S$ такое, что $M = (S, F) = M.A \times M.(S \setminus T)$, то есть подмножество, являющееся произведением ограничений матроида $M = (S, F)$ на множество T и множество $(S \setminus T)$.

3. Матроид $M = (S, F)$ связан тогда и только тогда, когда он имеет только тривиальные сепараторы $\emptyset$ и S .

4. Матроид $M = (S, F)$ связан тогда и только тогда, когда связан двойственный к нему матроид $M^* = (S, F^*)$.

Если e – элемент связного матроида $M = (S, F)$, то множество циклов, содержащих e , однозначно определяют матроид M . С учётом двойственности получаем, что множество коциклов, содержащих e , также однозначно определяют матроид M .

Можно определить циклический граф $G(M)$ матроида M . $G(M)$ – это граф, вершинам которого отвечают циклы матроида, а две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда для соответствующих циклов C_1, C_2 выполняются два условия:

- a) $C_1 \cup C_2$ связное подмножество матроида $M = (S, F)$;
- b) $\rho(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$.

В терминах циклического графа получим ещё один критерий связности матроида.

5. Матроид без копетель является связным тогда и только тогда, когда его циклический граф связан.

Представляет интерес исследование связности у отдельных классов матроидов.

Пусть $M = (S, \Sigma)$ – матроид ранга $\rho(S) = k, k < |S|$. Цикл C матроида M назовём гамильтоновым, если $|C| = k + 1$. Матроид, содержащий гамильтонов цикл, так же будем называть гамильтоновым [2–4].

Следующие определения гамильтонова матроида являются эквивалентными: матроид ранга k , H -периметр которого равен $k + 1$; матроид ранга k , для которого существует ограничение, являющееся однородным матроидом $U_{k,k+1}$ [5, 6].

Теорема. *Гамильтонов матроид является связным.*

Список литературы

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир. — 1982.
2. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Гамильтоновы циклы матроида // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII Международной конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.). — Казань: Отечество. — 2014. — С. 116–118.
3. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Свойства гамильтоновых матроидов // Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии. Материалы междунар. науч. конгресса. Республика Беларусь, Минск, 4–7 нояб. 2013 г. — Минск: БГУ. — 2013. — С. 538–541.
4. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. О некоторых характеристиках матроидов и свойствах гамильтоновых матроидов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2015. — Т. 2, № 11. — С. 214–219.
5. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А., Ревякин А. М. О периметрах и окружениях для матроида // Вестник МГАДА. — 2013. — № 1 (20). — С. 63–67.
6. Ревякин А. М., Исаченко А. Н. Ориентированные матроиды и их приложения // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. — 2019. — С. 179–182.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Р. М. Колпаков (Москва)

В данной работе рассматривается частный случай задачи о буле-

вом ранце [1], который формально задается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n'} ax_i + \sum_{i=n'+1}^{n'+n''} x_i, \\ & \text{subject to } \sum_{i=1}^{n'+n''} 2x_i \leq 2k+1, \\ & x_i \in \{0, 1\}, i \in N = \{1, 2, \dots, n' + n''\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a \geq 2$, $k, n', n'' \geq 0$. Данный частный случай характеризуется тем, что все предметы имеют одинаковый вес (для удобства мы полагаем данный вес равным 2), а стоимость предметов может принимать два различных значения (без ограничения общности стоимость менее ценных предметов полагается равной 1, а стоимость более ценных полагается равной a). Далее будем обозначать задачу (1) через $P[n', n''; k]$. Ранее в литературе [2–4] был хорошо изучен случай задач $P[n', n''; k]$ при $n' = 0$.

В качестве подзадач задачи (1) рассматриваются задачи, получаемые из данной задачи фиксацией значений некоторых переменных x_i :

$$\begin{aligned} & \text{maximize } f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n'} ax_i + \sum_{i=n'+1}^{n'+n''} x_i, \\ & \text{subject to } \sum_{i=1}^{n'+n''} 2x_i \leq 2k+1, \\ & x_i = \theta(i), i \in I, x_j \in \{0, 1\}, j \in N \setminus I, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta(i)$ — фиксированное значение переменной x_i . Переменные x_j для $j \in N \setminus I$ называются *свободными переменными* этой подзадачи.

Пусть P' — некоторая подзадача вида (2), x_j — свободная переменная подзадачи P' , P'_0, P'_1 — подзадачи, полученные из подзадачи P' присваиванием переменной x_j значений 0 и 1 соответственно. Будем говорить, что подзадачи P'_0, P'_1 получены декомпозицией подзадачи P' по переменной x_j , а переменную x_j будем называть *переменной ветвления* для данной декомпозиции. Подзадачи P'_0, P'_1 , полученные декомпозицией подзадачи P' , будем называть соответственно *0-потомком* и *1-потомком* подзадачи P' .

Для подзадач (2) рассматриваются следующие условия отсева. Подзадача (2) удовлетворяет *условию отрицательного отсева*, если $2k+1 - \sum_{i \in I} 2\theta(i) < 0$. Очевидно, что в этом случае подзадача (2) не имеет решения. Подзадача (2) удовлетворяет *условию положительного отсева*, если $2|N \setminus I| \leq 2k+1 - \sum_{i \in I} 2\theta(i)$. Очевидно, что в этом случае подзадача (2) имеет единственное оптимальное решение $x_i = 1$ при $i \in N \setminus I$. Подзадаче (2) соответствует линейная задача релаксации, которая получается из данной подзадачи заменой условия $x_i \in \{0, 1\}$ для $i \in N \setminus I$ на условие $x_i \in [0, 1]$. Данная задача

релаксации имеет очевидное оптимальное решение. Подзадача (2), рассматриваемая в процессе решения исходной задачи (1), удовлетворяет *условию отсева по рекорду*, если значение целевой функции $f(\tilde{x})$ для оптимального решения соответствующей линейной задачи релаксации не превосходит значения целевой функции для найденного на данный момент времени текущего рекордного решения исходной задачи. Заметим, что в данном случае подзадача (2) может быть исключена из дальнейшего рассмотрения в процессе решения исходной задачи.

В данной работе рассматривается стандартный вариант метода ветвей и границ (метода ВГ) для решения задачи о ранце. Для решения задачи данным вариантом в качестве вспомогательной структуры используется список подзадач, содержащий в каждый момент времени все подзадачи исходной задачи, подлежащие дальнейшему рассмотрению в процессе решения. Изначально список подзадач содержит только исходную задачу. Пока список подзадач не окажется пустым, из него извлекается очередная подзадача P' , которая обрабатывается следующим образом. Если P' удовлетворяет условию отрицательного отсева или отсева по рекорду, то никаких операций не производится. Если P' удовлетворяет условию положительного отсева, то значение $f(\tilde{x}')$ целевой функции для оптимального решения $\tilde{x}'$ задачи P' сравнивается со значением $f(\tilde{x}_r)$ целевой функции для текущего рекордного решения $\tilde{x}_r$ исходной задачи. Если $f(\tilde{x}') > f(\tilde{x}_r)$, то текущее рекордное решение $\tilde{x}_r$ заменяется на $\tilde{x}'$. Пусть P' не удовлетворяет ни одному из рассмотренных условий отсева. Тогда подзадача P' подвергается декомпозиции по одной из ее свободных переменных. Полученные в результате декомпозиции подзадачи помещаются в список подзадач. Очевидно, что после завершения работы данного алгоритма полученное рекордное решение является оптимальным решением исходной задачи. *Приведенной сложностью* решения задачи методом ВГ называется число подзадач, подвергшихся отсеку в процессе решения задачи.

Заметим, что приведенная сложность решения задачи методом ВГ существенным образом зависит как от способа выбора очередной подзадачи из списка подзадач, так и от способа выбора переменной ветвления для декомпозиции выбранной подзадачи. Совместное сочетание произвольного способа выбора очередной подзадачи из списка подзадач с произвольным способом выбора переменной ветвления для декомпозиции выбранной подзадачи будем называть *стратегией* решения задачи о ранце методом ВГ. Пусть S — некоторая стратегия решения задачи P о ранце методом ВГ. Обозначим через $\hat{L}_S(P)$ приведенную сложность решения задачи P методом ВГ со стратеги-

ей $\mathcal{S}$. Положим $\hat{L}(P) = \min_{\mathcal{S}} \hat{L}_{\mathcal{S}}(P)$, где минимум берется по всевозможным стратегиям $\mathcal{S}$ решения задачи P методом ВГ. Стратегию $\mathcal{S}$ решения задачи P методом ВГ будем называть *оптимальной* для P , если $\hat{L}_{\mathcal{S}}(P) = \hat{L}(P)$.

Далее мы рассматриваем следующую стратегию решения задач $P[n', n''; k]$ методом ВГ. Список подзадач в данной стратегии представляет собой стек, в который после каждой декомпозиции очередной подзадачи сначала помещается 1-потомок, а затем 0-потомок данной подзадачи, т.е. на следующем шаге работы алгоритма из списка выбирается 0-потомок данной подзадачи. В качестве переменной ветвления для декомпозиции очередной подзадачи всегда выбирается свободная переменная с наибольшим индексом. Мы обозначаем данную стратегию через $\mathcal{A}_0$.

Теорема. При $0 \leq k \leq n'$ выполняется $\hat{L}(P[n', n''; k]) = \hat{L}_{\mathcal{A}_0}(P[n', n''; k]) = \binom{n'+1}{k+1} + n''$ и при $n' \leq k \leq n' + n''$ выполняется $\hat{L}(P[n', n''; k]) = \hat{L}_{\mathcal{A}_0}(P[n', n''; k]) = \binom{n''+1}{k-n'+1}$.

Из данной теоремы вытекает, что стратегия $\mathcal{A}_0$ является оптимальной для любой задачи $P[n', n''; k]$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 18-01-00337-а.

Список литературы

1. Kellerer H., Pfershy U., Pisinger D. Knapsack Problems. — Springer Verlag, 2004.
2. Гришукин В.П. Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. — 1976. — С. 203–230.
3. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М.: Наука, 1976.
4. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 58–73.

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МАТРОИДЫ, НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

А. М. Ревякин (Москва), А. Н. Исаченко (Минск)

Используются терминология и обозначения монографий Дж. Оксли и А. Речки [1, 2].

Пусть C — матрица инцидентности циклов матроида M на конечном множестве S , а R — матрица инцидентности коциклов этого же матроида. Каждой строке матрицы C соответствует цикл матроида M , а каждому столбцу — элемент множества S . Причем, $c_{ij} = 1$, если j -й элемент множества S принадлежит i -ому циклу. В противном случае, $c_{ij} = 0$. Матрица R обладает аналогичными свойствами. Замена некоторых элементов 1 на -1 в матрицах C и R называется *ориентацией матроида M* , если для «ориентированных» матриц C и R , полученных в результате замены некоторых элементов 1 на -1 , произведение матрицы C на матрицу, транспонированную к матрице R , равно нулевой матрице, т.е. $C \cdot R^T = 0$.

Пусть B — база матроида M на конечном множестве S и $a \in S \setminus B$. Тогда существует единственный цикл $C = C(a, B)$ такой, что $a \in C \subseteq B \cup \{a\}$. Цикл $C(a, B)$ называется *фундаментальным циклом* элемента a относительно базы B . Аналогично, если $B^* = S \setminus B$ и $a \in B$, то существует единственный коцикл $R = R(a, B^*)$ такой, что $a \in R \subseteq B^* \cup \{a\}$. Коцикл $R(a, B^*)$ называется *фундаментальным коциклом* элемента a относительно базы B .

Пусть $C = (C_1|E)$ — матрица фундаментальных циклов, а $R = (E|R_2)$ — матрица фундаментальных коциклов матроида M на конечном множестве S относительно базы B , где E — единичные матрицы, а вектор-столбцы матриц, соответствующие элементам базы B и кобазы B^* , отличаются подстрочными индексами. Матрицы такого вида называются *стандартным представлением* матроида M относительно базы B . Заметим, что для матриц фундаментальных циклов и коциклов ориентированного матроида M имеет место соотношение $C_1 = -R_2^T$. Если $(E|A)$ — стандартное представление матроида M , то $(-A^T|E)$ — стандартное представление двойственного матроида M^* на том же конечном множестве.

Рассмотрим граф G . Присвоим произвольным образом ориентацию ребрам графа G , получив в результате оргграф G_1 . Тогда усеченная матрица инцидентности графа G_1 является представлением циклического матроида $M(G)$ над произвольным полем F .

Таким образом, ориентируемый матроид линейно представим над любым конечным полем. Циклический и коциклический матроиды

любого графа ориентируемы.

Легко доказать, что матроид M является ориентируемым тогда и только тогда, когда двойственный к нему матроид M^* ориентируем. Все миноры ориентируемых матроидов являются ориентируемыми. Прямая сумма $M_1 + M_2$ ориентируемых матроидов M_1 и M_2 является ориентируемым матроидом.

Обозначим через R_{10} матроид со следующей матрицей представления над полем $\text{GF}(3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матроид R_{10} является ориентируемым и самодвойственным, все его миноры являются либо графическими, либо кографическими, в то время, как сам R_{10} таковым не является [3]. Исключение произвольного элемента из R_{10} ведет к образованию матроида, изоморфного циклическому матроиду полного двудольного графа $K_{3,3}$.

Самодвойственный матроид P_8 на восьми элементах со следующей матрицей представления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

над полем $\text{GF}(3)$ не является ориентированным матроидом.

Матрица A называется унимодулярной, если все ее миноры равны 0 или ± 1 .

Если M — матроид на конечном множестве S , то следующие утверждения эквивалентны:

- а) M обладает унимодулярной матрицей представления над полем рациональных чисел;
- б) матроид M представим над любым конечным полем;
- в) M является одновременно бинарным и тернарным матроидом;
- г) матроид M является бинарным и представим над некоторым полем F , характеристика которого не равна 2;
- д) матроид M является ориентируемым.

Остановимся кратко на приложениях ориентированных матроидов.

Для электрических цепей, состоящих из резисторов и источников напряжения и тока выполняются законы Кирхгофа для токов (алгебраическая сумма токов, вытекающих из узла равна нулю) и напряжений (алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю), которые можно записать как $R \cdot I = 0$ и $C \cdot V = 0$, где R — матрица разрезов, C — матрица циклов орграфа электрической цепи, а I и V — вектор столбцы токов и напряжений соответственно на элементах электрической цепи.

Пусть T — остов цепи (орграфа), $\Phi = (\Phi_1|E)$ — матрица фундаментальных циклов, $K = (E|K_2)$ — матрица фундаментальных разрезов относительно остова T , где E — единичные матрицы, а вектор-столбцы матриц, соответствующие хордам и ветвям остова T , отличаются подстрочными индексами. Тогда, в силу законов Кирхгофа [4], $\Phi_1|E \cdot (I_1|I_2)^T = 0$ и $(E|K_2) \cdot (V_1|V_2)^T = 0$. Заметим, что $\Phi_1 = -K_2^T$. Отсюда, $I_2 = -\Phi_1 \cdot I_1 = K_2^T \cdot I_1$. Аналогично, $V_1 = K_2^T \cdot I_2$. Таким образом, все токи, текущие через элементы электрической цепи, можно выразить линейной комбинацией хордовых токов, а все напряжения — линейной комбинацией напряжений на ветвях цепи. Как выбирать остов T электрической цепи, детально описано в [2–4].

В докладе рассмотрены также инварианты ориентированных матроидов [5], матроиды Кокстера [6, 7] и тропические ориентированные матроиды (их в 2007 году впервые ввели Ф. Ардила и М. Девелин). Доказано, что тропические ориентированные матроиды обладают многими свойствами обычных ориентированных матроидов. Показано, что тропический ориентированный матроид определяет разбиение произведения двух симплексов.

Список литературы

1. Oxley J. G. Matroid Theory. — New York, Oxford Academ, 2006.
2. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. — Budapest: Akad. Kiado, 1989.
3. Ревякин А. М., Исаченко А. Н. Ориентированные матроиды и их приложения // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. — 2019. — С. 179–182.
4. Сещу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. — М.: Высш. школа, 1971.
5. Гельфанд И. М., Рыбников Г. Л. Алгебраические и топологические инварианты ориентированных матроидов // Доклады Академии наук СССР. — 1989. — Т. 307. № 4. — С. 791–795.
6. Borovik A. V., Gelfand I. M., White N. On exchange properties

of Coxeter matroids and oriented matroids // Discrete Mathematics. — 1998. — V. 179. — P. 59–72.

7. Borovik A.V., Gelfand I. M., White N. Coxeter matroids. — Boston, Basel, Berlin: Birkhauser. — 2003.

Секция «Теория графов»

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ТИПА ДИРАКА

М. Б. Абросимов (Саратов)

В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости графа: если степень каждой вершины не меньше половины от общего числа вершин графа, то такой граф является гамильтоновым. Очевидно, что количество рёбер в графе, удовлетворяющем условию Дирака, должно быть достаточно большим. В последствии было получено много различных условий гамильтоновости, из которых большую группу образуют так называемые условия типа Дирака или достаточные условия, сформулированные в терминах степеней вершин графа. Зачастую по формулировке условий оценить эффективность того или иного утверждения представляется сложным. Под эффективностью достаточного условия мы будем понимать, какое число гамильтоновых графов удовлетворяет этому условию.

Теорема (Дирак, 1952 [1]). *Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ степень любой вершины $d(u) \geq n/2$, то граф G — гамильтонов.*

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Дирака, будем называть графом Дирака. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Дирака составляет $O(n + m)$.

Теорема (Оре, 1960 [2]). *Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geq n$, то граф G — гамильтонов.*

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Оре, будем называть графом Оре. Легко видеть, что графы Дирака являются и графами Оре. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Оре составляет $O(n^2)$.

Теорема (Поша, 1962 [3]). *Если граф G с числом вершин $n \geq 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leq \dots \leq d_n$ удовлетворяет следующим двум условиям, то он гамильтонов:*

1) для всякого k : $1 \leq k < \frac{n-1}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k ;

2) для нечетного n число вершин со степенями меньшими или равными $\frac{n-1}{2}$ не превосходит $\frac{n-1}{2}$.

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Поша, будем называть графом Поша. Теорема Оре является следствием теоремы Поша, то есть графы Оре являются и графами Поша. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Поша составляет $O(n + m)$.

Теорема (Хватал, 1972 [4]). *Если граф G с числом вершин $n \geq 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leq \dots \leq d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для любого k верна импликация: $(d_k \leq k < \frac{n}{2}) \rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$.*

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Хватала, будем называть графом Хватала. Теорема Поша является следствием теоремы Хватала, то есть графы Поша являются и графами Хватала. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Хватала составляет $O(n + m)$.

Определение. Замыкание $[G]$ n -вершинного графа G получается из графа G добавлением рёбер $\{u, v\}$ для всех пар вершин u и v , для которых выполняется условие $d(u) + d(v) \geq n$.

Теорема (Бонди-Хватал, 1976 [5]). *Если замыкание $[G]$ графа G является полным графом, то граф G — гамильтонов.*

Построение замыкания графа имеет вычислительную сложность $O(n^4)$ [5]. Граф, который удовлетворяет достаточному условию теоремы Бонди-Хватала, будем называть графом Бонди-Хватала. Очевидно, что если в n -вершинном графе G все вершины имеют степень $d(v) < \frac{n}{2}$, то замыкание $[G]$ будет изоморфно самому графу G . Заметим, что любой цикл с числом вершин $n > 4$ не удовлетворяет условию Бонди-Хватала. Если граф удовлетворяет условию Бонди-Хватала, то можно построить и соответствующий гамильтонов цикл с вычислительной сложностью $O(n^3)$ [5].

Был произведен вычислительный эксперимент по проверке условий всех теорем 1–6 для графов с числом вершин до 12. Для генерации графов использовалась программа geng из пакета nauty, разработанного Бренданом МакКеем [6]. Программа получает на вход целое число n , а результатом её работы являются все неизоморфные графы с заданным числом вершин n . Если дополнительно указать ключ -s, то будут построены только связные графы, а с ключом -C — только двусвязные. Так как все гамильтоновы графы являются двусвязными, то достаточно строить только их. Вычисления проводились с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ.

В таблице приводятся данные по числу графов Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди-Хватала в процентах от общего числа гамильтоновых графов с заданным числом вершин.

Таблица 2: Количество графов Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди-Хватала в процентах

n	Гамильтоновых	Дирак	Оре	Поша	Хватал	Б.-Х.
3	1	100%	100%	100%	100%	100%
4	3	100%	100%	100%	100%	100%
5	8	37,50%	62,50%	75,00%	75,00%	87,50%
6	48	39,58%	43,75%	64,58%	70,83%	93,75%
7	383	7,57%	17,75%	49,61%	50,65%	91,91%
8	6196	6,84%	8,12%	40,09%	44,11%	89,41%
9	177083	0,66%	2,79%	30,21%	30,74%	88,67%
10	9305118	1,16%	1,38%	28,84%	31,32%	89,19%
11	883156024	0,10%	0,60%	24,47%	24,76%	90,92%
12	152522187830	0,32%	0,38%	26,82%	28,36%	92,85%

Можно заметить, что теорема Оре существенно сильнее теоремы Дирака, особенно для нечётного числа вершин. Теоремы Поша и Хватала существенно усиливают теоремы Дирака и Оре, а между собой отличаются не столь сильно. Наконец теорема Бонди-Хватала существенно улучшает теоремы Поша и Хватала, причем покрывает около 90% гамильтоновых графов.

Список литературы

1. Dirac G. A. Some theorems on abstract graphs // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. 2. — P. 69–81.
2. Ore O. Note on Hamilton circuits // Amer. Math. Monthly. — 1960. — Vol. 67. — P. 55.
3. Posa L. On the circuits of finite graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutatd Int. Kozl. — 1963. — Vol. 8. — P. 355–361.
4. Chvatal V. On Hamilton's ideals // J. Combin. Theory. — 1972. — Vol. 12. — P. 163–168.
5. Bondy J. A., Chvatal V. A method in graph theory // Discrete Mathematics. — 1976. — Vol. 15, is. 2. — P. 111–135.
6. McKay B. D., Piperno A. Practical graph isomorphism, II // J. Symbolic Computation. — 2014. — No. 60. — P. 94–112.

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА d -ВЫПУКЛОГО ПОКРЫТИЯ ГРАФА

Р. Бузату, С. Катаранчук (Кишинёв)

Обычно задачи покрытия графа относятся к классу NP-полных. При больших значениях числа вершин графа получение оптимальных покрытий, как правило, невозможно за приемлемое время, поэтому важно определить принадлежность конкретной задачи покрытия графа к классу NP-полных задач или полиномиально разрешимых задач.

Пусть G — неориентированный граф с множеством вершин $X(G)$. Множество $S \subseteq X(G)$ называется d -выпуклым, если для любых вершин $x, y \in S$ выполняется $\{z \in X(G) : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \subseteq S$, где $d(x, y)$ — это расстояние между вершинами x и y . Множество $S \subset X(G)$ называется нетривиальным, если $3 \leq |S| \leq |X(G)| - 1$.

Задача покрытия неориентированного графа фиксированным числом $p \geq 2$ d -выпуклых нетривиальных множеств является NP-полной [1]. Как оказалось, для решения данной задачи в случае определённых классов графов крайне важно иметь некоторые оценки числа $\varphi_{cn}^{max}(G)$, где $\varphi_{cn}^{max}(G)$ обозначает наибольшее число d -выпуклых нетривиальных множеств, которые покрывают граф G . К примеру, известно, что для дерева T , $|X(T)| \geq 4$, существуют покрытия, состоящие из $2 \leq p \leq \varphi_{cn}^{max}(T)$ d -выпуклых нетривиальных множеств и существует рекурсивный алгоритм, вычисляющий число $\varphi_{cn}^{max}(T)$ [2]. В частности, для нахождения наибольшего числа d -выпуклых нетривиальных множеств, разбивающих дерево T , существует алгоритм сложности $O(n^3)$ [3].

До недавнего времени для задачи нахождения числа $\varphi_{cn}^{max}(G)$ было не известно ни полиномиального алгоритма, ни доказательства NP-полноты. Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Задача вычисления числа $\varphi_{cn}^{max}(G)$ NP-полна.

Список литературы

1. Buzatu R., Cataranciuc S. Convex graph covers // Computer Science Journal of Moldova. — 2015. — no. 3 (69). — P. 251–269.
2. Buzatu R., Cataranciuc S. On nontrivial covers and partitions of graphs by convex sets // Computer Science Journal of Moldova. — 2018. — no. 1 (76). — P. 3–14.
3. Buzatu R., Cataranciuc S. Nontrivial convex covers of trees // Bulletin of Academy of Sciences of Republic of Moldova, Mathematics. — 2016. — no. 3 (82). — P. 72–81.

ЯВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

В. А. Воблый (Москва)

Теорема. Число E_n помеченных эйлеровых графов с n вершинами при $n \geq 2$ равно

$$E_n = \sum_{\pi(n)} \frac{n!(-1)^{k-1}(k-1)!2^{k_1\binom{0}{2}+k_2\binom{1}{2}+\dots+k_n\binom{n-1}{2}}}{k_1!(1!)^{k_1}k_2!(2!)^{k_2}\dots k_n!(n!)^{k_n}},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n)$ целого числа n , то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Доказательство. Введем производящие функции

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}, W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\binom{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Известно [1] равенство $1 + W(x) = \exp(E(x))$, что эквивалентно $E(x) = \ln(1 + W(x))$.

Используем логарифмические многочлены разбиений [2]:

$$\ln(1 + g(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{x^n}{n!}, g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} x_r \frac{x^r}{r!},$$

$$L_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{n!(-1)^{k-1}(k-1)!}{k_1!(1!)^{k_1}k_2!(2!)^{k_2}\dots k_n!(n!)^{k_n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям целого числа n , то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. В нашем случае $x_r = 2^{\binom{r-1}{2}}$ и $\binom{1}{2} = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что формула для E_n , полученная в теореме 1, аналогична явной формуле Дубиле–Рота–Стенли для числа помеченных связных графов с n вершинами [3] (В [4] — исправление этой формулы).

Список литературы

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977, 325 с.

2. Charalambides Ch. A. Enumerative combinatorics. — CRC Press, Boca Raton, 2002. — 624 p.
3. Дубиле П., Рота Дж.-Л., Стенли Р. Об основах комбинаторной теории (VI): идея производящей функции // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. — М.: Мир, 1979.
4. Воблый В. А. Исправление формулы Дубиле-Рота-Стенли для числа помеченных связных графов. Матер. XVI Междунар. конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула, ТПГУ. — 2019. — С. 131–133.

О СЛОЖНОСТИ СИНТЕЗА ГРАФОВ ОПЕРАЦИЯМИ КЛОНИРОВАНИЯ

М. А.Иорданский (Нижний Новгород)

Рассматриваются конечные, неориентированные обыкновенные связные графы. Используется конструктор графов [1]. Изучаются процессы построения графов на основе операций клонирования [2]. Приводятся оценки для числа операций, необходимых для построения некоторых классов двудольных графов.

Пусть $G'(V', E')$ связный подграф графа $G(V, E)$, $|V'| < |V|$. Вершины подграфа $G \setminus G'$ смежные с вершинами из G' образуют *окрестность* подграфа G' в графе G . Множество вершин окрестности подграфа G' обозначим через V_1' .

Рассмотрим объединение исходного графа G с графом $G''(V'', E'')$ изоморфным подграфу $G'(V', E') \subset G$. Добавим к полученному графу ребра, соединяющие вершины из V_1' с вершинами подграфа G'' таким образом, чтобы подграф результирующего графа, порожденный вершинами $V_1' \cup V''$, был изоморфен подграфу $G(V_1' \cup V')$. Подграф G'' называется *клоном* подграфа G' а рассмотренная выше операция - *операцией клонирования*. Если вершины клона G'' соединяются лишь с вершинами из $V_1'' \subset V_1'$, то получаем операцию клонирования с *неполной* окрестностью. При выполнении операций клонирования с неполной окрестностью предполагается, что $|V_1''| \geq 1$, то

есть результирующий граф операции клонирования является всегда связным.

В качестве клонируемых подграфов рассматриваются простые цепи, выбираемые таким образом, чтобы их окрестности в графе состояли либо из одной вершины, смежной с одной из концевых вершин цепи, либо из двух вершин, каждая из которых смежна со своей концевой вершиной цепи. В качестве исходного графа используется цепь l_2 , содержащая две вершины.

Лемма 1. *Произвольное дерево, содержащее $n \geq 3$ вершин, может быть построено из цепи l_2 с помощью $n - 2$ операций клонирования цепи l_1 с одновершинной окрестностью.*

Доказательство следует из того, что при выполнении каждой операции клонирования число вершин текущего дерева увеличивается на единицу. При этом используется хотя бы одна операция клонирования с полной одновершинной окрестностью. Максимальное число таких операций может быть на единицу меньше количества висячих вершин дерева.

Пусть d - число вершин в диаметральной цепи графа; n_1 - число висячих вершин (степени единица) в произвольном дереве t .

Лемма 2. *Произвольное дерево t с $n \geq 3$ вершинами может быть построено из цепи l_2 с использованием $n_1 - 2 + \lceil \log_2(d - 1) \rceil$ операций клонирования цепей $l_j, j \in \overline{1, \lfloor (n - 1)/2 \rfloor}$ с одновершинными окрестностями.*

Доказательство. Выделим в дереве t диаметральную цепь, любую, если их несколько. Построить её можно путем последовательного клонирования в текущей (исходной) цепи её подцепи, не содержащей одной из концевых вершин цепи и имеющей, следовательно, одновершинную полную окрестность. Каждая такая операция увеличивает длину цепи на единицу меньше, чем в два раза. Пусть l_q число вершин в цепи, полученной после выполнения q -ой операции клонирования. Для числа вершин в генерируемой последовательности цепей имеем рекуррентное соотношение $l_{q+1} = 2l_q - 1$. Решением его с начальным условием $l_0 = 2$ является $l_q = 2^q + 1$. Таким образом, если $d = 2^q + 1$ то требуется $q = \log_2(d - 1)$ операций, если $2^q + 1 < d < 2^{q+1} + 1$ то для достройки диаметральной цепи необходима дополнительная операция клонирования подцепи с числом вершин равным $d - (2^q + 1)$ и одновершинной неполной окрестностью, являющейся крайней вершиной в текущей цепи. В любом случае для построения диаметральной цепи достаточно $q = \lceil \log_2(d - 1) \rceil$ операций клонирования.

Поскольку диаметральная цепь имеет наибольшую длину, то построение других пореберно непересекающихся цепей можно осуще-

ствить, затратив на каждую по одной операции клонирования подцепы с полной или неполной одновершинной окрестностью. Для этого достаточно строить эти цепи в каждом поддереве, начиная с цепей наибольшей длины. При этом объединение цепей должно быть связано на каждом шаге их построения.

Так как каждая максимальная по длине цепь заканчивается висячей вершиной, то общее число операций клонирования необходимых для построения дерева t равно $n_1 - 2 + \lceil \log_2(d-1) \rceil$. Лемма доказана.

Замечание. Если при построении t использовать операции клонирования только с одновершинной полной окрестностью, то при этом будут получаться деревья фрактального типа.

Обозначим класс всех деревьев, содержащих n вершин, через T_n ; минимальное число операций клонирования, необходимых для построения из l_2 дерева t - через $k(t)$; $\max_{t \in T_n} k(t) = K(n)$. Из лемм 1 и 2 получаем

Следствие. $\lceil \log_2(n-1) \rceil \leq K(n) \leq n-2$.

Верхняя оценка достигается на звездах. Нижняя оценка достигается на деревьях, изоморфных цепям.

Далее будем рассматривать двудольные графы, содержащие циклы. Для получения цикла в результате выполнения операции клонирования необходимо, чтобы окрестность клона содержала не менее двух вершин. При этом в графе могут появиться только циклы четной длины. Число циклов в графе с n вершинами и m ребрами равно $m - n + 1$. Две вершины цикла четной длины называются *противоположными*, если они соединяются в цикле цепями одинаковой длины. Двудольный граф G называется *циклически сбалансированным*, если каждый его цикл содержит по две вершины степени больше двух и являющихся противоположными в цикле (*базисные* вершины цикла). Если из каждого цикла графа G удалить одну из цепей, соединяющих базисные вершины, то получим *базисное дерево* t . Пусть n_1^t число висячих вершин базисного дерева t .

Теорема. Двудольный циклически сбалансированный граф G можно построить из цепи l_2 с помощью $m - n + n_1^t - 1 + \lceil \log_2(d-1) \rceil$ операций клонирования цепей $l_j, j \in \overline{1, \lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ с одно- и двухвершинными окрестностями.

Доказательство. Нетрудно видеть, что базисное дерево t имеет такой же диаметр, что и граф G . Учитывая лемму 2, получаем, что для построения t необходимо использование $n_1^t - 2 + \lceil \log_2(d-1) \rceil$ операций клонирования. Для перехода от дерева t к графу G достаточно выполнить $m - n + 1$ операций клонирования цепей $l_j, j \in \overline{1, \lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ с полными двухвершинными окрестностями, добавля-

ющим к графу каждый раз по циклу четной длины. В результате получаем граф G за искомое число операций клонирования.

Замечание. При построении двудольных графов, не являющихся циклически сбалансированными, потребуется не меньшее число операций клонирования, поскольку формирование цепей, проходящих не через базисные вершины циклов, придется делать с помощью нескольких операций клонирования, чередуя их с операциями клонирования необходимыми для создания таких циклов.

Следствие. *Произвольный двудольный граф G , не являющийся деревом, может быть построен из l_2 с помощью не менее $m - n + 1 + \lceil \log_2(d - 1) \rceil$ операций клонирования цепей $l_j, j \in \overline{1, \lfloor (n - 1)/2 \rfloor}$ с одно- и двухвершинными окрестностями.*

Список литературы

1. Иорданский М. А. Конструктивная теория графов и ее приложения. — Н.Новгород: Кириллица, 2016. — 172 с.
2. Иорданский М. А. Клонирование графов // Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 108–110.

О ГЕНЕРАЦИИ ГРАФОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЗАДАННЫЙ ПОДГРАФ

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов (Саратов)

Задача генерации графов с заданными свойствами представляет собой большой теоретический и практический интерес. Например, программа geng из пакета nauty [1] может генерировать все неизоморфные графы с заданным числом вершин. Дополнительно можно задать параметр для генерации только связных или двусвязных графов. Программа genreg [2] генерирует регулярные графы заданного порядка с заданным числом вершин. При решении некоторых задач было бы удобно генерировать графы, которые содержат заданный подграф. Такая ситуация возникает, например, в задачах, связанных с построением отказоустойчивых систем (расширений графов) [3].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия.

1. Граф G^* является вершинным k -расширением графа G , то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин.
2. Граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$.
3. α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Аналогично вводится понятие минимального рёберного k -расширения графа. Проверка того, что граф G^* является минимальным вершинным или рёберным k -расширением графа G , состоит в том, что последовательно удаляются наборы из k вершин или рёбер, а далее проверяется вложение в получившийся граф графа G . Таким образом, граф G^* должен содержать граф G . Для некоторых графов можно аналитически установить вектор степеней минимального вершинного или рёберного k -расширения. Например, для циклов минимальные расширения имеют вектор степеней $(4, 3, \dots, 3)$ или $(3, \dots, 3)$ в зависимости от чётности или нечётности числа вершин [3]. При переборе возможных кандидатов на минимальное вершинное или рёберное k -расширение графа G было бы удобно генерировать только такие графы, которые сразу содержат граф G в качестве своей части. В генераторе графов [4] по заданному вектору степеней отмечается возможность добавления генерации графов, содержащих заданный подграф, однако эта возможность не реализована.

В данной работе будет представлен способ построения без проверки на изоморфизм графов, содержащих заданный подграф. Для построения предлагается использовать техники, описанные в [5].

Одним из методов генерации графов без проверки на изоморфизм является метод канонических представителей. Идея метода в общем виде состоит в следующем:

1. Определяется способ кодирования графов.
2. Среди всех кодов изоморфных графов выбирается канонический код (представитель).
3. Порождаются все возможные коды графов.
4. Порожденный граф принимается, если его код канонический, в противном случае — исключается.

Метод Рида–Фараджеева основывается на методе канонических представителей, но определяет процесс порождения кодов с отсечением вариантов, которые не могут привести к каноническому представителю.

Для кодирования графа предлагается следующий способ, основанный на матричном коде специального вида.

Обозначим через $G = (V, \alpha)$ заданный n -вершинный граф. Если рассматривать неориентированные графы, то $\alpha \subset V \times V$ — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве V .

Рассмотрим n -вершинный граф $H = (V, \beta)$. Матрица смежности графа H — квадратная матрица размером $n \times n$. На пересечении строки i и столбца j стоит 1 тогда и только тогда, когда в графе есть ребро $\{v_i, v_j\}$, иначе стоит 0.

Код графа H будем строить следующим образом: сначала выписываем те элементы матрицы смежности графа H , на соответствующих позициях которых в матрице смежности графа G стоит 1, затем те, где стоит 0. Выписывать элементы можно по строкам или столбцам: в зависимости от задачи может быть предпочтительнее тот или другой способ. Для неориентированных графов выписываются только элементы, расположенные выше главной диагонали. Длина кода будет $\frac{n(n-1)}{2}$ бит. Для орграфов выписываются все элементы матрицы смежности, и длина кода будет n^2 бит.

Канонический код определим как наибольший из кодов всех изоморфных графов. Очевидно, что такой код существует, причём единственный. Граф с каноническим кодом назовём каноническим.

Лемма 1. *Граф G является частью графа H тогда и только тогда, когда канонический код графа H не превышает кода графа G .*

Перечисляя все n -вершинные графы, частью которых является граф G , и выбирая из них канонические, можно построить все неизоморфные n -вершинные графы, которые содержат граф G .

Для построения генератора графов методом Рида–Фараджеева или методом МакКея удобно использовать следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $s_1 = x_1x_2\dots x_k\underline{1}0\dots 0$ является каноническим кодом, то $s_2 = x_1x_2\dots x_k\underline{0}0\dots 0$ также является каноническим кодом.*

Идея генерации состоит в организации кодов в дерево следующим образом:

1. корнем является код графа G ; 2. родительским элементом кода вида $x_1x_2\dots x_k\underline{1}0\dots 0$ является код вида $x_1x_2\dots x_k\underline{0}0\dots 0$; 3. в дереве присутствуют только потомки G .

По лемме 2 предком канонического кода может быть только канонический код. Это означает, что среди потомков кода, не являющегося каноническим, канонических кодов не будет, и можно их не рассматривать.

При использовании метода Рида–Фараджеева происходит обход дерева кодов и проверяется каждая его вершина на каноничность: потомки вершины рассматриваются только если код в ней канонический.

Список литературы

1. McKay B.D., Piperno A. Practical Graph Isomorphism, II // Journal of Symbolic Computation. — 2014. — Vol. 60. — P. 94–112.

2. Meringer M. Fast Generation of Regular Graphs and Construction of Cages // Journal of Graph Theory. — 1999. — Vol. 30. — P. 137–146.
3. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — 192 с.
4. Grund R. Konstruktion molekularer Graphen mit gegebenen Hybridisierungen und uberlappungsfreien Fragmenten // Bayreuther Mathematische Schriften. — 1995. — Vol. 49. — P. 1–113.
5. Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // DIMACS Series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 2000. — Vol. 51. — P. 25–38.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА КРИТЕРИЯ РАВЕНСТВА ЭКСПОНЕНТА РЕГУЛЯРНОГО ПРИМИТИВНОГО ГРАФА ЧИСЛУ 3

И. В. Лось, М. Б. Абросимов (Саратов)

Регулярным или *однородным* n -вершинным графом *порядка* p называется простой неориентированный n -вершинный граф, все вершины которого имеют степень p . *Диаметром* неориентированного связного графа называется наибольшая из длин между всеми парами вершин. Связный граф называется *примитивным*, если между любой парой вершин этого графа (в том числе из вершины в саму себя) существует путь длины k . Минимальное такое число k называется *экспонентом* этого примитивного графа.

Ряд работ посвящены исследованию примитивных регулярных графов [1–3]. Данная работа направлена на поиск критерия равенства экспонента примитивного графа числу 3. Некоторые результаты были получены в работе [4]. В данной работе будут предложены новые результаты.

Очевидно, что у примитивного графа с экспонентом 3 диаметр может быть 2 или 3. Для упрощения дальнейших рассуждений было доказано одно вспомогательное утверждение — необходимое условие примитивности графа с экспонентом 3:

Утверждение 1. *В примитивном графе с экспонентом равным 3, каждая вершина должна лежать хотя бы на одном цикле длины 3.*

Условие не является достаточным. Например, рассмотрим полный 3-вершинный граф K_3 , каждая вершина которого лежит на цикле длины 3, однако его экспонент равен 2. Очевидно, что данный контрпример является минимальным по числу вершин.

Помимо этого не трудно найти такие регулярные графы и с экспонентом большим, чем 3. Например, на рисунке 1 приводится 3-регулярный примитивный граф из 12 вершин с экспонентом 4, в котором каждая вершина также лежит хотя бы на одном цикле длины 3. Данный контрпример также является минимальным по числу вершин и рёбер.

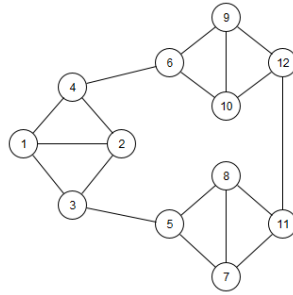


Рис. 1: Минимальный по числу вершин граф-контрпример с экспонентом больше 3 для утверждения 1.

Таким образом, приходим к выводу, что в достаточное условие требуется включить ограничение на диаметр графа. Рассмотрим несколько таких достаточных условий, которые, однако, не являются необходимыми.

Утверждение 2. Если в графе G с диаметром $d(G) \leq 3$ каждое ребро входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\exp(G) \leq 3$, причём если $d(G) = 3$, то и $\exp(G) = 3$.

На рисунке 2 представлен минимальный по числу вершин регулярный граф, который показывает, что данное условие не является необходимым: в нём рёбро между вершинами 3 и 5 (аналогично для ребра между вершинами 4 и 6) не лежит ни на одном цикле длины 3.

Постараемся усилить это условие.

Утверждение 3. Если в графе G с диаметром $d(G) \leq 3$ из каждой пары смежных рёбер хотя бы одно входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\exp(G) \leq 3$, причём если $d(G) = 3$, то и $\exp(G) = 3$.

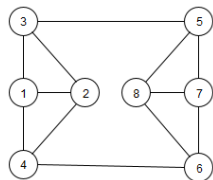


Рис. 2: 8-вершинный граф, для которого условие, обратное утверждению 2, не выполняется.

Данное условие также не будет необходимым. На рисунке 3 изображен минимальный по числу вершин регулярный граф, для которого условие не выполняется: ребра $\{5, 6\}$ и $\{5, 8\}$ смежные и оба не лежат ни на одном цикле длины 3.

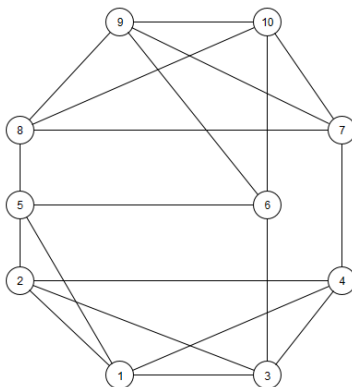


Рис. 3: 10-вершинный граф, для которого условие, обратное утверждению 3, не выполняется.

Однако, удалось получить критерий для случая равенства диаметра 2.

Теорема. В графе с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, между любой парой вершин (в том числе из самой вершины в себя) существует маршрут длины 3.

Лемма. Граф с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, является примитивным и его экспонент меньше или равен 3.

Теорема. *Граф с диаметром 2 является примитивным и имеет экспонент равный 3 тогда и только тогда, когда каждая его вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3 и существует хотя бы одно ребро, не лежащее ни на одном цикле длины 3.*

Список литературы

1. Jin M., Lee S.G., Seol H.G. Exponents of r -regular primitive matrices // Information Center for Mathematical Sciences. — 2003. — 6(2). — P. 51–57.
2. Bueno M.I., Furtado S. On the exponent of r -regular primitive matrices // ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra. — 2008. — V. 17. — P. 28–47.
3. Kim B., Song B., Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Applications. — 2005. — 407. — P. 162–168.
4. Лось И. В., Абросимов М. Б. К вопросу о максимальном числе вершин в примитивных регулярных графах с экспонентом 3 // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2018. — № 11. — С. 112–114.

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ О РАСКРАСКЕ В СЕМЕЙСТВЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЗАПРЕТАМИ НЕБОЛЬШОГО РАЗМЕРА

Д. С. Малышев (Нижний Новгород)

Правильной вершинной раскраской графа G называется произвольное отображение $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Правильная вершинная раскраска c графа G называется k -раскраской, если $c : V(G) \rightarrow \overline{1, k}$. Если граф G имеет k -раскраску, то он называется k -раскрашиваемым. Хроматическим числом графа G называется такое наименьшее k , что граф G является k -раскрашиваемым. Оно обозначается через $\chi(G)$.

Задача о вершинной раскраске (кратко, *задача ВР*) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется

ли неравенство $\chi(G) \leq k$ или нет. *Задача о вершинной k -раскраске* (кратко, *задача k -BP*) для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $\chi(G) \leq k$ или нет. Обе данные задачи являются классическими NP-полными задачами на графах.

Граф H называется *порожденным подграфом* графа G , если H может быть получен из G удалением только вершин. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{Y}$ и это записывается так: $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$.

Через P_n , как обычно, будем обозначать простой путь с n вершинами, а через $K_{p,q}$ полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле. Через $K'_{2,3}$ обозначаем результат добавления ребра к графу $K_{2,3}$, которое инцидентно вершинам степени 3, а через W_4 обозначаем результат добавления вершины к 4-циклу и всех четырех ребер, инцидентных добавленной вершине и всем вершинам 4-цикла. Графы *bull* и *butterfly* образованы на вершинах v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и имеют множества ребер $\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4, v_2v_5\}$ и $\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_4v_5\}$ соответственно.

Для задачи k -BP сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным фрагментом. Вычислительная сложность задачи 3-BP известна для всех классов вида $\text{Free}(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 6$ [1]. Подобный результат был получен для задачи 4-BP и всех классов вида $\text{Free}(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 5$ [2]. Для каждого фиксированного k задача k -BP разрешима за полиномиальное время в классе $\text{Free}(\{P_5\})$ [3]. Задача 3-BP полиномиально разрешима в классе $\text{Free}(\{P_7\})$ [4]. Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k -BP является NP-полной в классе $\text{Free}(\{P_6\})$ [5]. Задача 4-BP является NP-полной в классе $\text{Free}(\{P_7\})$ [5]. Вычислительный статус задачи k -BP является открытым для класса $\text{Free}(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $\text{Free}(\{P_6\})$ и $k = 4$.

В работе [6] была получена классификация сложности задачи 3-BP для всех троек порожденных запретов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В работе [7] рассматривались четверки 5-вершинных запретов и для всех порождаемых ими наследственных классов, кроме трех, была установлена сложность задачи 3-BP.

Задача BP полиномиально разрешима для класса $\text{Free}(\{H\})$, если H — порожденный подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе

она является NP-полной в данном классе [8]. Однако, при запрещении двух порожденных подграфов полную сложностную классификацию получить уже не удастся. Так, например, для всех наследственных классов, определяемых запретами с не более чем 4 вершинами каждый, кроме трех, известен вычислительный статус задачи ВР [9]. В работах [10–15] исследовалась сложность задачи ВР для наследственных классов графов, определяемых запрещением двух связанных 5-вершинных запрещенных порожденных структур. В этих работах количество открытых случаев было уменьшено до следующих шести пар запрещенных порожденных фрагментов:

1. $\{K_{1,3}, G\}$, где $G \in \{bull, butterfly\}$
2. $\{P_5, G\}$, где $G \in \{K_{2,3}, K'_{2,3}, W_4\}$

В настоящей работе количество «белых пятен» уменьшается до пяти. А именно, справедлива следующая

Теорема. *Задача о вершинной раскраске полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_5, K_{2,3}\})$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-31-20001-мол-а-вед.

Список литературы

1. Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science. — 2012. — 414 (1). — P. 9–19.
2. Golovach P. A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H -free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — 161 (1–2). — P. 140–150.
3. Hoàng C., Kamiński M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X. Deciding k -colorability of P_5 -free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — 57. — P. 74–81.
4. Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2018. — 38 (4). — P. 779–801.
5. Huang S. Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — 51. — P. 336–346.
6. Malyshev D. S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — 33 (4). — P. 1009–1022.
7. Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи вершинной 3-раскраске для наследственных классов графов, определяемых

запретами небольшого размера // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.

8. Král' D., Kratochvíl J., Tuza Z., Woeginger G. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — 2204. — P. 254–262.

9. Lozin V. V., Malyshev D. S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — 216. — P. 273–280.

10. Hoàng C., Lazzarato D. Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P_5})$ -free graphs and similar graph classes // Discrete Applied Mathematics. — 2015. — 186. — P. 105–111.

11. Karthick T., Maffray F., Pastor L. Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. — 2019, — 81 (3). — P. 1053–1074.

12. Malyshev D. S. The coloring problem for classes with two small obstructions // Optimization Letters. — 2014. — 8 (8). — P. 2261–270.

13. Malyshev D. S. Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // Journal of Combinatorial Optimization. — 2015. — 31 (2). — P. 833–845.

14. Malyshev D. S., Lobanova O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — 219. — P. 158–166.

15. Malyshev D. S. The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — 247. — P. 423–432.

О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ ДВУХ ОРИЕНТАЦИЙ ЦИКЛА

О. В. Моденова, М. Б. Абросимов (Саратов)

John P. Hayes в работе [1] предложил графовую модель для исследования отказоустойчивости технической системы при отказе элементов.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (МВ- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. Граф G^* является вершинным k -расширением графа G , то есть G

вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин;

2. Граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;

3. α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В работе [1] было доказано, что МВ-1Р n -вершинной цепи P_n является $(n + 1)$ -вершинный цикл C_{n+1} . Легко показать [2], что это расширение является единственным с точностью до изоморфизма. Задача поиска минимального вершинного k -расширения для произвольного графа является вычислительно сложной [3], и в общем виде решение удалось получить лишь для некоторых классов графов. Обзор основных результатов можно найти в работе [2]. В работе [1] были предложены схемы для построения минимальных вершинных 1-расширений цикла.

Теорема (Хейз, 1976). *Графы, построенные по схемам на рис. 1, являются МВ-1Р соответствующего цикла при чётном и нечётном числе вершин.*

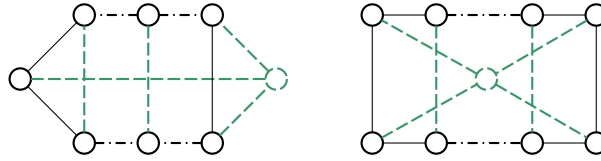


Рис. 1: Схема построения МВ-1Р цикла C_n .

Число дополнительных рёбер в МВ-1Р цикла легко вычислить:

$$ec(C_n) = \left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil.$$

Если переходить к ориентированным графам, то задача становится более сложной [2]. Следующий результат позволяет получить оценку на число дополнительных дуг $ec(\vec{G})$ орграфа $\vec{G}$ [4].

Теорема. *Число дополнительных дуг МВ- k Р орграфа $\vec{G}$ не менее числа дополнительных рёбер МВ- k Р его симметризации G :*

$$ec(\vec{G}) \geq ec(G).$$

Таким образом, число дополнительных дуг МВ-1Р любой ориентации цикла не меньше $\left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil$. Возникает вопрос: существуют ли

ориентации цикла, MB-1P которых содержит такое число дополнительных дуг. Оказывается, что ответ на этот вопрос положительный. Одной из таких ориентаций цикла является ориентация, которая состоит только из источников и стоков. Обозначим такую ориентацию CST_n . Очевидно, что такая ориентация существует только при чётном n . Для нечётного n рассмотрим ориентацию цикла, в которой все вершины являются источниками и стоками, кроме одной вершины со степенями исхода и захода $(1, 1)$. Обозначим эту схему $CSTN_n$.

Теорема. MB-1P ориентации цикла CST_n содержит $\lceil \frac{n+4}{2} \rceil$ дополнительных дуг.

Одно из MB-1P рассматриваемой ориентации цикла можно получить ориентацией схемы Хейза, приведённой на рис. 1.

Теорема. Для чётного n и ориентации цикла CST_n MB-1P можно получить ориентацией схемы Хейза, при которой все вершины степени 3 превращаются в стоки или источники, а вершина степени 4 превращается в вершину со степенями исхода и захода $(2, 2)$.

На рис. 2 показана схема построения MB-1P ориентации цикла CST_n для $n = 4k$ (слева) и $n = 4k + 2$ (справа).

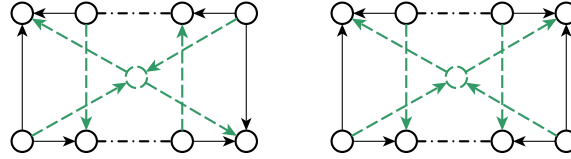


Рис. 2: Схема построения MB-1P ориентации цикла CST_n .

Теорема. MB-1P ориентации цикла $CSTN_n$ содержит $\lceil \frac{n+4}{2} \rceil$ дополнительных дуг.

Одно из MB-1P рассматриваемой ориентации цикла также можно получить ориентацией схемы Хейза, приведённой на рис. 1.

Теорема. Для нечётного n и ориентации цикла $CSTN_n$ MB-1P можно получить ориентацией схемы Хейза следующим образом: превращаем все вершины, кроме двух противоположных, в источники и стоки, а ребро между ними ориентируем произвольным образом.

На рис. 3 показана схема построения MB-1P ориентации цикла $CSTN_n$ для $n = 4k + 1$ (слева) и $n = 4k + 3$ (справа).

Вычислительные эксперименты показывают, что ориентации

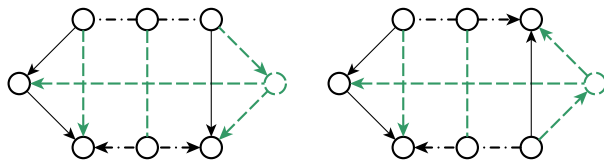


Рис. 3: Схема построения MB-1P ориентации цикла $CSTN_n$.

циклов CST_n и $CSTN_n$ могут иметь и другие MB-1P, неизоморфные предлагаемым.

Список литературы

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — Vol. C-25(9). — P. 875–884.
2. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — 192 с.
3. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. — 2010. — № 5 (88). — С. 643–650.
4. Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 93–102.

О КЛАССАХ ГРАФОВ, ИМЕЮЩИХ НУЛЕВОЙ РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОБ УПАКОВКЕ И ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ ПУТЕЙ

Д. Б. Мокеев (Нижний Новгород)

В статье используются обозначения K_n , P_n , C_n для полных графов, простых путей и простых циклов на n вершинах соответственно.

Пусть G — граф. Произвольное множество попарно вершинно непересекающихся путей графа G длины k называется $\langle P_k \rangle$ -упаковкой G . Произвольное подмножество множества вершин графа G , имеющее непустое пересечение с множеством вершин любого пути

графа G длины k , называется *вершинным покрытием G относительно $\langle P_k \rangle$* или просто *$\langle P_k \rangle$ -покрытием*.

Граф называется *кёниговым относительно $\langle P_k \rangle$* , если в любом его порождённом подграфе наибольшая мощность $\langle P_k \rangle$ -упаковки равна наименьшей мощности $\langle P_k \rangle$ -покрытия [1, 2]. Класс всех кёниговых графов относительно $\langle P_k \rangle$ обозначается через $\mathcal{K}(\langle P_k \rangle)$.

Известно, что задача о $\langle P_k \rangle$ -покрытии полиномиально разрешима в классе деревьев и NP-трудна в общем случае при $k \geq 2$, а задача о $\langle P_k \rangle$ -упаковке полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k \geq 3$.

Тем не менее, известно, что задача о $\langle P_k \rangle$ -упаковке решается за линейное время в классе лесов при любом k . Кроме того, известно описание нескольких классов графов, на которых задачи о $\langle P_k \rangle$ -упаковке и $\langle P_k \rangle$ -покрытии при разных k решаются за полиномиальное время (см., например, [1–3]).

Настоящая работа посвящена описанию класса кёниговых графов относительно $\langle P_k \rangle$ для различных k . Для $k \in \{3, 4, 5\}$ дано полное структурное описание каждого класса. Для общего случая k дано описание некоторых кёниговых графов относительно $\langle P_k \rangle$.

Будем обозначать через S_n дерево на $n + 1$ вершине, n из которых являются листьями.

Будем обозначать через $S_{n,m}$ дерево на $n + m + 2$ вершинах, две из которых центральные, а остальные — листья, причём, n листьев смежны с одной центральной вершиной, а m — с другой.

Будем обозначать через $S_n + e$ граф, полученный из S_n добавлением одного ребра.

Будем обозначать через $K_n - e$ граф, полученный из K_n удалением одного ребра.

Определение. Пусть H — псевдограф (граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра), $k \geq 3$. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, в том числе петли и кратные рёбра) псевдографа H подразобьём $k - 1$ вершинами. Будем называть полученный граф *Sub $_k$ -расширением* псевдографа H . Будем называть *Sub $_k$ -графом* граф, который является *Sub $_k$ -расширением* произвольного псевдографа.

Теорема. Множество всех Sub $_3$ -графов совпадает с классом $\mathcal{K}(\langle P_3 \rangle)$.

Теорема. При любом $k \geq 4$ любой Sub $_k$ -граф принадлежит классу $\mathcal{K}(\langle P_k \rangle)$.

Приведём также полное описание классов $\mathcal{K}(\langle P_k \rangle)$ при k равных 4 и 5.

Определение. Назовём связный подграф H графа G *висячим*, если существует вершина c графа G , не принадлежащая H такая, что H является компонентой связности графа $G \setminus \{c\}$. Вершину c будем называть *контактной вершиной* висячего подграфа H .

Определение. Пусть H — двудольный мультиграф. Процедура *ST-расширения* H состоит в следующем.

1. Каждое цикловое ребро мультиграфа H подразбить одной вершиной.
2. Добавить к графу несколько висячих подграфов, изоморфных K_1 , K_3 или S_k , где $k \in \mathbb{N}$, так, что контактная вершина каждого из них не добавлена при подразбиении.

Будем называть полученный граф *ST₄-расширением* мультиграфа H . Назовём *ST₄-графом* граф, который является *ST₄-расширением* произвольного двудольного мультиграфа.

Теорема. Множество всех *ST₄-графов* совпадает с множеством $\mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$.

Будем называть *F₅-графом* любой граф множества $\{K_1, C_4, K_4-e, K_4, S_k, S_k+e, S_{k,m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$.

Определение. Операция *замены пустым графом вершины x* состоит в следующем:

1. Эта вершина удаляется из графа.
2. К графу добавляется несколько новых вершин, не соединённых между собой.
3. Каждая новая вершина соединена ребром со всеми вершинами, смежными с x в исходном графе.

Определение. Пусть H — псевдограф. Процедура *ST₅-расширения* H состоит в следующем.

1. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, в том числе кратные рёбра и петли) псевдографа H подразбить 4 вершинами. Все вершины, кроме добавленных при подразбиении, будем называть *старыми*. Вершины, добавленные при подразбиении, будем называть *ближними*, если они смежны со старыми вершинами и *дальними* в противном случае.
2. Заменить некоторые ближние вершины и некоторые вершины степени 2, не являющиеся цикловыми, пустыми графами произвольных размеров. Никакие две заменяемые вершины не должны быть смежны между собой.
3. Добавить к графу несколько вершин, соединив каждую из них ребром с какой-нибудь дальней вершиной.
4. Добавить к графу несколько висячих *F₅-подграфов* так, что контактная вершина каждого из них является старой и не за-

менена пустым графом на шаге 2.

5. Добавить к графу несколько подграфов, изоморфных K_1 или S_m , где $m \in \mathbb{N}$, и соединить центральные вершины каждого из них ровно с одной центральной вершиной какого-нибудь висячего подграфа, изоморфного S_k , добавленного на предыдущем шаге.

Будем называть полученный граф ST_5 -расширением псевдографа H . Назовём ST_5 -графом граф, который является ST_5 -расширением произвольного псевдографа.

Теорема. Множество всех ST_5 -графов совпадает с множеством $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б. Кёниговы графы относительно 3-пути // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 4. — С. 3–14.
2. Малышев Д. С., Мокеев Д. Б. Кёниговы графы относительно 4-пути и его остовных надграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 74–88.
3. Sterboul F. A Characterization of Graphs in which the Transversal Number Equals the Matching Number // J. Comb. Theory. Series B. — 1979. — Vol. 27. — P. 228–229.

РАСКРАСКИ ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

С. Н. Селезнева, М. В. Мельник (Москва)

Задача k -раскраски графов состоит в ответе на вопрос, можно ли вершины заданного графа G так раскрасить в k цветов, чтобы смежные вершины получили различные цвета. Известно, что для каждого заданного $k \geq 3$ задача k -раскраски графов является NP -полной [1, 2]. При $k = 1$ и $k = 2$ эту задачу можно решить полиномиальным алгоритмом. В настоящее время задача k -раскраски широко исследуется для графов, на структуру которых наложены дополнительные ограничения. Наиболее часто рассматриваются графы, не содержащие определенных порожденных подграфов (т.е. графы с

запрещенными подграфами) [3–9]. В этой работе мы рассматриваем ограничения степеней вершин в графах. Известно [10], что вершины графа, в котором степени всех вершин не превосходят n , где $n \geq 3$, можно раскрасить в n цветов тогда и только тогда, когда в нем нет полных подграфов с $(n+1)$ -й вершиной (теорема Брукса). Мы несколько ослабляем ограничения, накладываемые на степени вершин графов, а именно, рассматриваем графы, в которых степень одной вершины не превосходит $(n+1)$, а степени остальных вершин не превосходят n , $n \geq 3$.

В работе речь идет только о конечных неориентированных простых графах (т.е. без петель и кратных ребер). Все отсутствующие здесь определения, относящиеся к графам, можно найти, например, в [11]. Граф $H = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$; и H называется порожденным подграфом G , если $V' \subseteq V$, $E' = \{(v, w) \in E \mid v, w \in V'\}$. Степенью $d_G(v)$ вершины v в графе G называется число смежных с ней вершин. Граф $G = (V, E)$ называется n -субрегулярным, если для каждой вершины $v \in V$ верно $d_G(v) \leq n$; и называется n -псевдoreгулярным, если найдется такая вершина $v_0 \in V$, что $d_G(v_0) \leq n+1$, и для каждой такой вершины $v \in V$, что $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \leq n$. Раскраской в k цветов (вершин) графа $G = (V, E)$ называется такое отображение $\rho : V \rightarrow K$, где $|K| = k$, что из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$. Говорят, что граф G можно раскрасить в k цветов, если найдется его раскраска в k цветов. Для графа G наименьшее такое целое число k , что граф G можно раскрасить в k цветов, называется его хроматическим числом $\chi(G)$. Полным графом K_n называется граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны; граф K_n^- получается из графа K_n удалением любого ребра. Две несмежные вершины графа K_n^- называются особыми. Пусть $n \geq 3$, G — n -псевдoreгулярный граф и $H = (V', E')$ — его порожденный подграф, изоморфный K_{n+1}^- , с особыми вершинами w_1, w_2 . Тогда граф $G' = G : -H$ получается из графа G удалением всех вершин, принадлежащих множеству $V' \setminus \{w_1, w_2\}$, а затем отождествлением вершин w_1 и w_2 . Задача k -раскраски графов состоит в ответе на вопрос, можно ли вершины заданного графа G раскрасить в k цветов.

В работе получены следующие результаты.

Утверждение 1. Пусть $n \geq 3$, G — n -псевдoreгулярный граф, H — его подграф, изоморфный K_{n+1}^- , и $G' = G : -H$. Тогда $\chi(G) \leq n$ в том и только в том случае, когда $\chi(G') \leq n$.

Теорема 1. Если $n \geq 3$, G — n -псевдoreгулярный граф без по-

рожденных подграфов, изоморфных K_{n+1} или K_{n+1}^- , то $\chi(G) \leq n$.

Для доказательства теоремы 1 мы вводим понятие палитры, которое можно понимать как особый вид списочных раскрасок графов [12]. Пусть K — множество цветов и $G = (V, E)$ — граф. Тогда отображение $\pi : V \rightarrow 2^K$ назовем палитрой графа G , если для любой вершины $v \in V$ верно $\pi(v) \neq \emptyset$. Если $|K| = k$, то множество всех палитр цветов из K для графа G обозначим $\pi_k(G)$. Раскраской (вершин) графа $G = (V, E)$ палитрой π , $\pi \in \pi_k(G)$, назовем такое отображение $\rho : V \rightarrow K$, что для каждой вершины $v \in V$ верно $\rho(v) \in \pi(v)$ и для каждого ребра $(v, w) \in E$ верно $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Мы устанавливаем следующие утверждения 2 и 3, которые применяются при доказательстве теоремы 1.

Утверждение 2. Пусть $G = (V, E)$ — граф и $\pi \in \pi_k(G)$, где $k \geq 3$, — такая его палитра, что для каждой вершины $v \in V$ верно $|\pi(v)| = 2$. Тогда если G является циклом четной длины, то его вершины можно раскрасить палитрой π ; если G является циклом нечетной длины, то его вершины можно раскрасить палитрой π в том и только в том случае, когда в нем найдутся такие вершины $v, w \in V$, что $\pi(v) \neq \pi(w)$.

Утверждение 3. Пусть $G = (V, E)$ — граф и $\pi \in \pi_k(G)$, где $k \geq 3$, — такая его палитра, что для каждой вершины $v \in V$ верно $|\pi(v)| = k - 1$. Тогда если G является полным графом K_k , то его вершины можно раскрасить палитрой π в том и только в том случае, когда в нем найдутся такие вершины $v, w \in V$, что $\pi(v) \neq \pi(w)$.

Следующая теорема 2 следует из утверждения 1 и теоремы 1.

Теорема 2. Для каждого заданного целого числа n , где $n \geq 3$, задача n -раскраски n -псевдoreгулярных графов может быть решена полиномиальным алгоритмом.

Список литературы

1. Stockmeyer L. J. Planar 3-colorability is NP-complete // SIGACT News. — 1973. — V. 5, no. 3. — P. 19–25.
2. Garey M. R., Johnson D. S., Stockmeyer L. Some simplified NP-complete graph problems // Theoretical Computer Science. — 1976. — V. 1. — P. 237–267.
3. Broersma H., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science. — 2012. — V. 414, no. 1. — P. 9–19.
4. Golovach P., Paulusma D., Song J. 4-coloring H -free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — V. 161, N 1–2. — P. 140–150.

5. Hoang C.T., Kaminski M., Lozin V.V., Sawada J., Shu X. Deciding k -colorability of P_5 -free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — V. 57. — P. 74–81.
6. Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2017. — P. 1–23.
7. Huang S. Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — V. 51. — P. 336–346.
8. Malyshev D. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. — 2015. — V. 338, no. 11. — P. 1860–1865.
9. Malyshev D. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — V. 33, no. 4. — P. 1009–1022.
10. Brooks R.L. On colouring the nodes of a network // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1941. — V. 37. — P. 194–197.
11. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
12. Визинг В. Г. Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Сб. научн. трудов. Вып. 29. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976. — С. 3–10.

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ И СВЯЗАННАЯ С НИМИ КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Д. В. Сироткин, Д. С. Малышев (Нижний Новгород)

Независимым множеством графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. Независимое множество графа G называется *наибольшим*, если оно имеет наибольшее количество вершин, а его размер называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* для заданного

графа состоит в вычислении его числа независимости. Данная задача является классической NP-трудной задачей на графах [1].

В [2] рассматривался достаточно общий класс локальных преобразований графов, названных *схемами замен*, при применении которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не происходит, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу. Мы рассматриваем некоторый подкласс класса схем замен, который будет определен далее.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H -отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Пусть граф G содержит порожденный подграф G_1 с G_1 -отделяющим множеством A , G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$. Замена G_1 на G_2 в графе G состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если существует такая константа c , что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$. Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$, где $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$ — семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(H \setminus X) < \alpha(H \setminus Y)$. В работе [3] было доказано следующее утверждение.

Лемма. Пусть графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, причем A является G_1 -отделяющим в графе G . Тогда, если граф G_α^* — результат замены G_1 на G_2 в графе G , то

$$\alpha(G_\alpha^*) = \alpha(G) + \alpha(G_2) - \alpha(G_1).$$

Применительно к нашим заменам, также интересны следующие задачи реализации и оптимизации. *Задача реализации* для заданного множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathcal{M}$. *Задача оптимизации* для заданных графа G и $A \subseteq V(G)$ состоит в поиске такого графа H с минимальным количеством вершин, что $A \subseteq V(H)$ и $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathfrak{M}_\alpha(H, A)$.

Применительно к задаче о независимом множестве, задача реализации имеет положительное решение далеко не для любого $\mathcal{M}$. Это

так, например, для $\mathcal{M} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$. Действительно, соотношения

$$\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\}) + 1,$$

$$\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G) - 1, \quad \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G)$$

одновременно не совместны. Понятно, что необходимым условием положительного ответа в задаче реализации является *градуируемость* множества $\mathcal{M}$, т.е. независимость количества элементов множества $\mathcal{M}$ на путях (по отношению включения) между любыми двумя подмножествами множества A .

Оказывается, что условие градуируемости является и достаточным. Это утверждение является основным результатом данной работы. Более конкретно, верна следующая теорема.

Теорема. *Для любых множества A и градуируемого множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ существует граф $G_{\mathcal{M}}$ с $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$ вершинами такой, что $A \subseteq V(G_{\mathcal{M}})$ и что $\mathfrak{M}_{\alpha}(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$.*

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи // Мир — 1982.
2. Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т. 5, вып. 1. — С. 3–19.
2. Malyshev D. S., Sirotkin D. V. Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2017. — 11, 3. — P. 400–414.

О ДЕРЕВЬЯХ С ЗАДАНЫМ ЧИСЛОМ ЛИСТЬЕВ И МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ НАИБОЛЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ

Д. С. Талецкий (Нижний Новгород)

Независимым множеством в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных его вершин. Считаем, что пустое множество также является независимым. *Наибольшим независимым*

множеством называется независимое множество наибольшей мощности. Для терминов «независимое множество» и «наибольшее независимое множество» используются сокращения «н.м.» и «н.н.м.» соответственно. Количество всех н.м. (соответственно, н.н.м.) графа G обозначается через $i(G)$ (соответственно, через $xi(G)$).

Очевидно, что единственным деревом с двумя листьями является простой путь. Кроме того, для любого дерева с n вершинами и l листьями имеет место неравенство $n \geq l + 1$. Поэтому везде в дальнейшем мы будем предполагать, что $n > l \geq 3$. В работах [1, 2] решена задача о максимизации количества н.м. в n -вершинных деревьях, содержащих ровно l листьев. Аналогичная задача на минимум не решена, но известен результат [3] о минимизации количества н.м. в n -вершинных деревьях, содержащих не менее $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ листьев.

Назовем дерево, содержащее ровно n вершин и ровно l листьев, (i, l, n) -*максимальным* (соответственно, (xi, l, n) -*максимальным*), если оно содержит максимальное число н.м. (соответственно, н.н.м.) среди всех таких деревьев. В данной работе представлено более простое доказательство основного результата работ [1, 2], который заключался в полном описании (i, l, n) -максимальных деревьев. Кроме того, в работе полностью описываются (xi, l, n) -максимальные деревья.

Назовем вершину дерева *крайней*, если ее степень не менее чем три и все смежные с ней поддеревья, кроме ровно одного, являются простыми путями. Назовем вершину дерева *центральной*, если ее степень не менее чем три и все смежные с ней поддеревья являются простыми путями. Нетрудно видеть, что каждое дерево, имеющее хотя бы три листа, содержит либо одну центральную вершину, либо по меньшей мере две различные крайние вершины.

Для того, чтобы описать структуру (i, l, n) -максимальных деревьев, достаточно доказать следующие факты.

Лемма. *Каждое (i, l, n) -максимальное дерево не содержит крайних вершин.*

Лемма. *Никакая вершина (i, l, n) -максимального дерева не может быть смежна с двумя путями из 2 и более вершин каждый.*

Нетрудно видеть, что из доказанных лемм сразу же вытекает следующая

Теорема 1. *Каждое (i, l, n) -максимальное дерево является единственным и состоит из центральной вершины, смежной с одним путем P_{n-l} и $l - 1$ путем P_1 .*

Методы, используемые в этом доказательстве, частично удается применить и для случая н.н.м.

Лемма. Каждое (xi, n, l) -максимальное дерево не содержит крайних вершин.

Таким образом, каждое (xi, l, n) -максимальное дерево представляют из себя центральную вершину, смежную с несколькими простыми путями. В отличие от случая н.м., длины этих путей примерно одинаковы (за исключением нескольких путей из одной вершины).

Обозначим через $even(k)$ наибольшее четное число, не превосходящее заданного вещественного числа k . Как обычно, через $\lfloor x \rfloor$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x .

Теорема 2. (А) Если $n \leq 2l$, то (xi, l, n) -максимальное дерево единственно и состоит из центральной вершины, смежной с $2l - n + 1$ путем P_1 и $n - l - 1$ путем P_2 .

(В) Если $n > 2l$ и $n = 2k$, то (xi, l, n) -максимальное дерево единственно и состоит из центральной вершины, смежной с одним путем P_1 , r путями P_B и q путями P_{B+2} , где $B = even(\frac{n-2}{l-1})$, $q = \frac{n-2-(l-1) \cdot B}{2}$, $r = l - 1 - q$.

(С) Если $n > 2l$ и $n = 2k + 1$, то (xi, l, n) -максимальное дерево единственно и состоит из центральной вершины, смежной с двумя путями P_1 , r' путями P_C и q' путями P_{C+2} , где $C = even(\frac{n-3}{l-2})$, $q' = \frac{n-3-(l-2) \cdot C}{2}$, $r' = l - 2 - q'$.

Список литературы

1. Aimei Y., Xuezheng L. The Merrifield-Simmons indices and Hosoya indices of trees with k pendant vertices // Journal of Mathematical Chemistry. — 2007. — Vol. 41, no. 1. — P. 33–43.
2. Pan X.-F., Xu J.-M., Yang C., Zhou M.-J. Some graphs with minimum Hosoya index and maximum Merrifield-Simmons index // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry — 2007. — Vol. 57. — P. 235–242.
3. Hanyuan D., Qiuzhi G. On the minimal Merrifield-Simmons index of trees of order n with at least $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ pendant vertices // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry — 2008. — Vol. 60, no. 1. — P. 601–608.

АЛГОРИТМ ОТОБРАЖЕНИЯ ГРАФА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО С ПОМОЩЬЮ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

С. Н. Хорошеньких (Москва)

Графы являются естественной математической моделью для так называемых «сложных систем», примерами которых являются Интернет, социальные и биологические сети. Законы взаимодействия частей «сложных систем» зачастую неизвестны, а потому их естественно моделировать в вероятностных терминах. Отсюда следует, что полезной моделью изучения сложных систем являются случайные графы [1]. Важным подклассом случайных графов являются случайные геометрические графы, имеющие следующую структурную особенность: вершинам соответствуют точки в некотором метрическом пространстве, а рёбра между вершинами проводятся в зависимости от расстояния между точками, которые соответствуют вершинам. В частности, значительный интерес представляет модель *случайного гиперболического графа* на диске Пуанкаре [2]. Данная модель отражает многие свойства сложных сетей: степенной закон распределения степеней вершин и асимптотически константный локальный кластерный коэффициент [3], транзитивность [4] и малый диаметр [5].

Геометрические модели графов интересны, в том числе, тем, что для них можно сформулировать своего рода «обратную задачу»: по заданному графу отобразить его вершины в соответствующее метрическое пространство так, чтобы обратное отображение имело максимальное правдоподобие в заданной модели. В более общем и менее формальном виде эта задача формулируется следующим образом: отобразить вершины графа в точки метрического пространства так, чтобы «близким» в графе парам вершин (например, тем парам, между которыми есть рёбра) соответствовали близкие пары точек метрического пространства, и наоборот. Для такого отображения обычно используется термин «вложение» (embedding). Задача поиска вложения представляет самостоятельный интерес и может быть решена без использования вероятностной модели графа. В частности, известны способы поиска вложения вершин в евклидово пространство, основанные на матричной факторизации и коротких случайных блужданиях по графу [6].

Поскольку гиперболические пространства позволяют вкладывать иерархические структуры более точно по сравнению с евклидовыми пространствами [7], естественным образом возникает задача построения алгоритма, который находит такое вложение. В [8–11] предла-

гаются алгоритмы, основанные на максимизации правдоподобия.

В данной работе предлагается новый подход к построению алгоритмов поиска вложений графов. В его основе лежит идея построения *суррогатов* – искусственных графов, порождённых моделью случайного гиперболического графа. Для входного графа подбираются такие параметры гиперболической модели, для которых макроскопические свойства суррогатов (распределение степеней вершин, средняя степень вершины и коэффициент кластеризации) оказываются наиболее близкими к свойствам исходного графа. Затем строятся несколько суррогатов, после чего на основе известных вложений для суррогатов с помощью машинного обучения строятся вложения для входного графа. После обучения модели на признаках, извлеченных из суррогатов, и её применения на признаках, извлеченных из входного графа, предсказания модели используются для нахождения вложений с помощью численной оптимизации.

Список литературы

1. Mark E.J. Newman Networks: an introduction. —Oxford university press, 2010
2. Krioukov D. et al. Hyperbolic geometry of complex networks // Physical Review E. — 2010. — 82 (3). — P. 036106.
3. Gugelmann L., Panagiotou K., Peter U. Random hyperbolic graphs: degree sequence and clustering // International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. — Springer. 2012. — P. 573–585.
4. Candellero E., Fountoulakis N. Clustering and the hyperbolic geometry of complex networks // Internet Mathematics. — 2016. — 12 (1/2). — P. 2–53.
5. Kiwi M., Mitsche D. A bound for the diameter of random hyperbolic graphs // 2015 Proceedings of the Twelfth Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO). — SIAM, 2014. — P. 26–39.
6. Hamilton W. L., Ying R., Leskovec J. Representation learning on graphs: Methods and applications // [arXiv:1709.05584](#). — 2017.
7. De Sa C. et al. Representation tradeoffs for hyperbolic embeddings // [arXiv:1804.03329](#). — 2018.
8. Boguna M., Papadopoulos F., Krioukov D. Sustaining the internet with hyperbolic mapping // Nature communications. — 2010. — V. 1. — P. 62.
9. Papadopoulos F., Psomas C., Krioukov D. Network mapping by replaying hyperbolic growth // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). — 2015. — 23 (1) — P. 198–211.

10. Papadopoulos F., Aldecoa R., Krioukov D. Network geometry inference using common neighbors // Physical Review E. — 2015. — 92(2). — P. 022807.
11. T. Blasius et al Efficient embedding of scale-free graphs in the hyperbolic plane // LIPIcs-Leibniz International Proceedings in Informatics. — 2016. — 57.

Секция «Математическая теория интеллектуальных систем»

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗРЫВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ

А. Бернадотт (Москва)

Детерминированные конечные автоматы (ДКА) [1] используют для проверки принадлежности слова к регулярному языку. Однако на практике возникает проблема экспоненциального взрыва — экспоненциальная зависимость числа состояний автомата от длины регулярного выражения. В качестве примера рассмотрим класс $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$, где α_i, β_i — слова регулярного языка, который требует экспоненциально зависимо от n числа состояний распознающего ДКА [2, 3]. Данный класс языков представляет практический интерес. Например, в базе сигнатур системы обнаружения вторжений Snort на 2019 год содержится несколько десятков выражений описанного класса [4].

В работе Александра описан способ модификации регулярных выражений класса $. * R_1 . * R_2 . *$, где R_1, R_2 — регулярные выражения, через сложение некоторых пар регулярных выражений [2]. Метод реализует сокращение автоматной сложности регулярного языка одновременно с появлением ошибок распознавания второго рода в результате расширения регулярного языка [2]. Другим способом борьбы с проблемой экспоненциального взрыва является структурная модификация ДКА, как например, реализация расширенного конечного автомата [5] и реализация ДКА с набором счётчиков, изменяющихся в зависимости от состояния и входного символа [3].

В данной работе рассматривается задача распознавания регулярного языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$, где α_i, β_i — слова регулярного языка, с помощью аппаратной конструкции с счётчиками и памятью, корректно принимающей язык и не требующей экспоненциального роста состояний ДКА и других структурных элементов конструкции.

Регулярный язык $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$, где α_i, β_i — слова из $\Sigma^* \setminus \{\Lambda\}$, Λ — пустое слово, для своего распознавания требует экспонен-

циально зависимо от n числа состояний ДКА.

Представленная аппаратная конструкция распознает отдельно подслова α_i и β_i из языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$, при этом при распознавании α_i включается счётчик на длину соответствующего β_i . Включение счётчика переводит аппаратную конструкцию в состояние, когда возможно принять β_i . Слово из регулярного языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$ принимается конструкцией тогда и только тогда, когда принято подслово α_i , соответствующий i -ый счётчик перешел в максимальное состояние и принято подслово β_i .

Распознающая аппаратная конструкция состоит из 3-х блоков.

Блок 1 представляет собой ДКА, принимающий регулярный язык $(\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i) \cup (\bigcup_{i=1}^n . * \beta_i)$. Блок 1 имеет $2n$ выходов. Каждый выход соответствует номеру α_i, β_i . Первые n выходов блока 1 отвечают за распознавание языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i$. Выходы с номерами $\overline{n+1}, 2n$ отвечают за распознавание языка $\bigcup_{i=1}^n . * \beta_i$. На i -ый выход блока 1 идет единичный сигнал тогда и только тогда, когда на данном такте вход принадлежит соответствующему слагаемому — слово $. * \alpha_i$ (или $. * \beta_i$) принимается, иначе выход равен 0.

Данный блок не требует экспоненциального роста числа состояний. Верхняя оценка числа состояний ДКА блока 1 равна $O(nm)$, где $m = \max(|\alpha_i| + |\beta_i|), i = \overline{1, n}$.

Блок 2 — блок, состоящий из n счётчиков. На счётчики поступает сигнал от первых n выходов блока 1. Данный блок имеет n входов, n выходов и отсчитывает длины слов языка, представляющего объединение вторых пар слов: $\bigcup_{i=1}^n \beta_i$ начального регулярного языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$. Соответствующий i -ый счётчик активируется тогда и только тогда, когда блоком 1 распознано соответствующее слово α_i и сигнал поступил на вход блока 2. При поступлении сигнала на соответствующий счётчик блока 2 с номером $i \in \overline{1, n}$, счётчик увеличивает свое значение на единицу каждый такт до достижения значения t , равного длине слова, соответствующего β_i . Единичный сигнал на выход i блока 2 идёт тогда и только тогда, когда i -ый счётчик достиг максимального значения.

Число счётчиков блока 2 растет линейно от числа слов β_i . Число элементов блока 2 — $O(nm)$, где $m = \max(|\beta_i|), i = \overline{1, n}$.

Блок 3 — блок выходных сигналов конструкции. Блок состоит из слоя тристабильных вентилях, принимающих на n входов сигналы от блока 2, и слоя из $n+1$ логических вентилях (n конъюнкций и 1 дизъюнкции). На вход блока 3 поступает сигнал от блока 2 n счётчиков на первые входы конъюнкций через слой тристабильных

вентилей и блока 1, распознающего слова $\bigcup_{i=1}^n . * \beta_i$, на вторые входы конъюнкций.

Таким образом, на выход блока 3 идет сигнал о распознанном слове вида $. * \alpha_i . * \beta_i$ от соответствующего i -того логического вентиля (конъюнкции) тогда и только тогда, когда i -тый счётчик блока 2 перешел в финальное состояние и отправил сигнал на первый вход i -того логического вентиля блока 3, и на второй вход данного логического вентиля блока 3 пришёл сигнал из блока 1 о распознанном слове β_i . Дизъюнкция от всех конъюнкций сигнализирует о распознанном слове языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$, соответствующая конъюнкция — об определенном принятом слове. Число элементов блока 3 растёт линейно от числа пар $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, n}$ распознаваемого языка — $O(n)$.

Описанная конструкция распознает соответствующий язык и позволяет избежать экспоненциального взрыва числа состояний ДКА, что перспективно для реализации на практике для сканирования трафика на вредоносность. Диаграмма автомата блока 1 может быть записана в память, а конфигурация блока 2 — задана начальными состояниями задержек. Таким образом, можно реализовывать схемы для классов языков, ограниченных параметрами n и m .

Утверждение (О корректности работы). *Представленная конструкция корректно принимает язык $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$.*

Теорема (Об отсутствии экспоненциального взрыва). *Для распознавания языка $\bigcup_{i=1}^n . * \alpha_i . * \beta_i . *$ представленной конструкцией требуется число элементов конструкции (состояний ДКА и структурных элементов) равно $O(nm)$, где $m = \max(|\alpha_i|, |\beta_i|), i = \overline{1, n}$.*

Список литературы

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.И., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Александров Д.Е. Эффективные методы проверки сетевых пакетов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, вып. 1 — С. 37–59.
3. Kumar S., Chandrasekaran B., Turner J., Varghese G. Curing regular expressions matching algorithms from insomnia, amnesia, and acalculia // ANCS '07 Proc. of the 3rd ACM/IEEE Symp. on Architecture for networking and communications systems — 2008. — P. 155–164.
4. Snort. — <http://www.snort.org/>
5. Smith R., Estan C., Jha S., Kong. Sh. Deflating the big bang: fast and scalable deep packet inspection with extended finite automata // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2008. — V. 38,

БАЗИСЫ ЗАДАНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫМИ ИСЧИСЛЕНИЯМИ

Г. В. Боков (Москва)

Пропозициональные исчисления являются мощным средством задания логических систем и процессов [1]. Заложенный в них инструментарий позволяет решать алгоритмические проблемы для широкого класса логических систем [2–4], включая системы с нестандартными правилами вывода [5, 6].

При моделировании логических систем часто возникает вопрос: какие логические системы допускают «простое» задание пропозициональными исчислениями, а какие нет? Поскольку каждую логическую систему можно рассматривать как обобщённое пропозициональное исчисление, то естественно ограничиться рассмотрением только таких заданий, которые в некоторой степени проще исходной логической системы. Как правило, простое задание основано на выделении систем образующих или порождающих элементов логической системы, которые принято называть базисами.

Логическая система $\mathcal{L} = \langle \mathbf{M}, \mathbf{Q} \rangle$ задается множеством формул $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Fm}$, замкнутым относительно правил $\mathbf{Q}$. Правило вывода

$$(F_1, \dots, F_n) / F_0$$

допустимо в логической системе $\mathcal{L}$, если

$$\sigma F_1 \in \mathbf{M}, \dots, \sigma F_n \in \mathbf{M} \implies \sigma F_0 \in \mathbf{M}$$

для любой подстановки σ . Множество всех допустимых в $\mathcal{L}$ правил вывода обозначим через $\mathbf{R}_{\mathcal{L}}$.

Пропозициональное исчисление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ — это множество аксиом $\mathbf{A}$ вместе с правилами $\mathbf{R}$ вывода новых формул из аксиом. Исчисление $\mathcal{P}$ задаёт логическую систему $\mathcal{L}$, если выполнены следующие условия:

1. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{M}$;
2. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_{\mathcal{L}}$;

3. $[\mathcal{P}] = \mathbf{M}$, т.е. эквивалентность

$$\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{R}} A \Leftrightarrow A \in \mathbf{M}$$

выполнена для любой формулы A .

В этом случае, аксиомы $\mathbf{A}$ играют роль порождающих элементов, а $\mathbf{R}$ — роль порождающих правил вывода. Исчисление $\mathcal{P}$, задающее логическую систему $\mathcal{L}$, называется *порождающим* для $\mathcal{L}$.

Пусть исчисление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ задаёт логическую систему $\mathcal{L} = \langle \mathbf{M}, \mathbf{Q} \rangle$. *Базис* задания логической системы $\mathcal{L}$ исчислением $\mathcal{P}$ — это такое подмножество $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, что

1. исчисление $\langle \mathbf{B}, \mathbf{R} \rangle$ является заданием логической системы $\mathcal{L}$;
2. не существует собственного подмножества $\mathbf{B}' \subsetneq \mathbf{B}$, для которого исчисление $\langle \mathbf{B}', \mathbf{R} \rangle$ является заданием $\mathcal{L}$.

Рассмотрим логические системы вида $\langle \mathbf{M}, \{\text{MP}\} \rangle$, где $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Cl}$ — подмножество классических тавтологий и MP — правило *modus ponens*, т.е. $(A, A \rightarrow B) / B$. Для таких систем мы введем специальное определение. *Замкнутый класс* — это множество формул $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Fm}$, замкнутое относительно правила MP и подстановки. Если $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Cl}$, то $\mathbf{M}$ будем называть *замкнутым классом тавтологий*. *Базис* замкнутого класса $\mathbf{M}$ — это базис задания логической системы $\langle \mathbf{M}, \{\text{MP}\} \rangle$ исчислением $\langle \mathbf{M}, \{\text{MP}\} \rangle$.

Теорема. 1. *Существует конечно-порожденный замкнутый класс тавтологий, имеющий базис сколь угодно большой конечной мощности;*
 2. *Существует замкнутый класс тавтологий, имеющий счетный базис;*
 3. *Существует замкнутый класс тавтологий, не имеющий базиса;*
 4. *Существует замкнутый класс тавтологий со счетным базисом, имеющий полную подсистему, из которой нельзя выделить базис.*

Список литературы

1. Боков Г. В. Пропозициональные исчисления как средство задания логических процессов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, вып. 3. — С. 24–36.
2. Bokov G. V. Undecidability of the problem of recognizing axiomatizations for propositional calculi with implication // Logic Journal of the IGPL. — 2015. — 23 (2). — P. 341–353.
3. Bokov G. V. On the number of variables in undecidable superintuitionistic propositional calculi // Logic Journal of the IGPL. — 2016. — 24 (5). — P. 774–791.
4. Bokov G. V. Undecidable problems for propositional calculi with

implication // Logic Journal of the IGPL — 2016. — 24 (5). — P. 792–806.

5. Боков Г.В. Итеративные пропозициональные исчисления // Интеллектуальные системы. Теория и приложения — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 99–106.

6. Bokov G.V. Undecidable Iterative Propositional Calculus // Algebra Logic. — 2016. — 55 (4). — P. 274–282.

ПОЧТИ ПОЛНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОДНОЭЛЕМЕНТНЫХ СВЕРХСОБЫТИЙ В МНОГОЗНАЧНОМ АЛФАВИТЕ

И. К. Ведерников (Москва)

В статье А.Г. Вереникина и Э.Э. Гасанова [1] были введены прогнозирующие автоматы. Говорят, что автомат прогнозирует сверхслово, если через некоторое конечное время, он начинает в момент времени t выдавать элемент входной последовательности под номером $t + 1$. Оказалось, что полностью прогнозируемы только периодические сверхслова.

В работе [2] А.А. Мاستихиной было введено понятие частичного прогнозирования, которое имеет место в случае, когда автомат угадывает следующий символ не обязательно в каждый момент времени, но достаточно часто. В одной из следующих работ А.А. Мастихина [3] предъявила критерий частичной прогнозируемости общерегулярных сверхсобытий в двоичном алфавите. Также вопрос частичного прогнозирования сверхсобытий исследовался в работе [4].

Впервые вопрос прогнозируемости одного сверхслова поднимался А.А. Мастихиной в работе [2], в частности, было доказано, что существует сверхслово не прогнозируемое ни одним автоматом. Однако в поздних работах А.А. Мастихиной акцент делался исключительно на сверхсобытия. В данной работе исследуется вопрос прогнозирования одного сверхслова в многозначном алфавите, причем не обязательно общерегулярного. Было введено понятие почти полного прогнозирования — это означает, что автомат угадывает сверхслово почти всегда, т.е. степень частичного прогнозирования равна единице. В результате получено, что наилучшая степень прогнозирования

достигается в определенном классе автоматов, а также получен критерий почти полной прогнозируемости одного сверхслова.

Введем основные определения.

В работе рассматриваются конечные инициальные автоматы вида: $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$, где $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ — входной и выходной алфавит, Q — множество состояний, $\varphi : Q \times E_k \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : Q \times E_k \rightarrow E_k$ — функция выходов, q_0 — начальное состояние.

Также определим автомат без выхода $V = (E_k, Q, \varphi, q_0)$, где E_k, Q, φ, q_0 определяются аналогично определению выше.

Если α — сверхслово в алфавите A , то *пределом* сверхслова α назовем такое множество $A' \subseteq A$, что в сверхслове α бесконечное число раз встречаются символы из A' и только они. Этот факт будем обозначать $A' = \lim \alpha$.

Сверхсобытие R *представимо* автоматом $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью семейства F , $F \subseteq 2^Q$, тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in R$, существует $Q' \in F$, такое, что $\lim \bar{\varphi}(q_0, \alpha) = Q'$.

Скажем, что символ $\alpha(t+1)$ сверхслова $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(t+1)\dots$ *угадан* автоматом $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, если $\psi(q_0, \alpha|_t) = \alpha(t+1)$, $t = 1, 2, \dots$

Пусть $\alpha \in E_k^\infty$, положим $\sigma_\alpha(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n/n$, где N_n — количество угаданных автоматом V символов в слове $\alpha|_n$. Будем говорить,

что $\sigma_\alpha(V)$ — *степень прогнозирования сверхслова α* автоматом V .

Считаем, что множество сверхслов R *частично прогнозируемо*, если существует такой автомат V , что степень прогнозирования для каждого сверхслова множества строго больше нуля. Положим $\sigma_R(V) = \inf_{\alpha \in R} \sigma_\alpha(V)$.

Если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс автоматов, то степень прогнозирования сверхсобытия R на автоматах из этого класса определим как $\sigma_R(\mathfrak{K}) = \sup_{V \in \mathfrak{K}} \sigma_R(V)$.

Будем говорить, что автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$, прогнозирующий сверхсобытие R , лежит в классе автоматов, представляющих относительно R , если существует автомат $V_0 = (E_k, Q, \varphi, q_0)$, представляющий R с помощью некоторого F , $F \subseteq 2^Q$.

Будем говорить, что функция выхода $\psi : Q \times E_k \rightarrow E_k$ является *размеченной*, если для любого $q' \in Q$ выполнено, что для любых q и a , таких что $\varphi(q, a) = q'$, значения $\psi(q, a)$ совпадают.

Заметим, что размеченную функцию можно трактовать как отметку на одном из переходов в каждом состоянии на диаграмме Му-

ра автомата, и угадывание происходит, когда выход в предыдущий момент времени равен входу в данный момент времени. Поэтому если автомат проходит по отмеченной стрелке, то угадывание происходит.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех автоматов, через $\mathfrak{R}(R)$ — множество автоматов, которые лежат в классе представляющих относительно R , через $\mathfrak{M}$ множество всех автоматов с размеченными функциями выхода, а через $\mathfrak{MR}(R)$ множество всех автоматов из $\mathfrak{R}(R)$ с размеченной функцией выхода.

Будем говорить, что сверхслово α *почти полностью прогнозируемо*, если $\sigma_\alpha(\mathfrak{A}) = 1$.

Будем говорить, что H — *конечное приведенное множество слов* над E_k , если для любых α_1, α_2 из H выполнено $\alpha_1^\infty \neq \alpha_2^\infty$, и α_1 и α_2 не являются подсловами друг друга. Через $M(H)$ обозначим максимальную длину слова из H .

Представлением сверхслова β назовем последовательность слов $\mathfrak{B} = \{\alpha_i^{s_i}\}$ такую, что $\beta = \alpha_0^{s_0} \alpha_1^{s_1} \dots \alpha_m^{s_m} \dots$. Слово $\alpha_i^{s_i}$ будем называть *i -ым элементом представления*.

Накрытием сверхслова β назовем пару $(\mathfrak{B}, H)$, где $\mathfrak{B}$ — представление сверхслова β , H — конечное приведенное множество слов.

Далее определим некоторые характеристики накрытия.

1. Через $\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B})$ обозначим *покрывающее множество* и определим его следующим алгоритмом (опишем i -й шаг): возьмем i -ый элемент $\mathfrak{B}$, если $\alpha_i \in H$, то добавим $\alpha_i^{s_i}$ в $\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B})$, иначе перейдем к шагу $i+1$.
2. $C(\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B}), n)$ — количество элементов покрывающего множества, входящих в префикс сверхслова длины n .
3. $L(\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B}), n)$ — суммарная длина всех элементов покрывающего множества, входящих в префикс сверхслова длины n .

Далее сформулируем основные результаты:

Теорема 1. Пусть автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ прогнозирует сверхсобытие R со степенью σ , функция ψ не является размеченной. Тогда существует автомат $\hat{V} = (E_k, \hat{Q}, E_k, \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{q}_0)$, где функция $\hat{\psi}$ — размеченная, который прогнозирует R со степенью σ . Более того, если $V \in \mathfrak{R}(R)$, то $\hat{V} \in \mathfrak{MR}(R)$.

Теорема 2. Пусть $\beta \in E_k^\infty$. Тогда β угадываемо со степенью 1 тогда и только тогда, когда существует накрытие $(\mathfrak{B}, H)$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B}), n) - M(H) \cdot C(\mathfrak{C}_H(\mathfrak{B}), n)}{n} = 1.$$

Список литературы

1. Вереникин А. Г., Гасанов Э. Э. Об автоматной детерминизации множеств сверхслов // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, вып. 2. — С. 84–97.
2. Мاستихина А. А. О частичном угадывании сверхслов // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 561–572.
3. Мастихина А. А. Критерий частичного предвосхищения общерегулярных сверхсобытий // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23, вып. 4. — С. 103–114.
4. Ведерников И. К. Исследование алгоритма, задающего функцию выхода прогнозирующего автомата // Интеллектуальные системы. — 2016. — Т. 20, вып. 3. — С. 103–111.

О ЗАДАЧЕ ВЕРИФИКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АВТОМАТОВ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Е. М. Винарский, В. А. Захаров (Москва)

Конечные автоматы Мили, представляющие собой простейшую математическую модель преобразования потоковых данных, широко используются во многих областях информатики. Но для некоторых приложений большое значение имеют не только значения обрабатываемых данных и порядок их следования, но также интервалы времени, которые отделяют события, происходящие по ходу вычисления автомата. Такие свойства уже не описываются явно средствами классической теории конечных автоматов; для моделирования течения времени автомат дополняется специальной вещественной переменной. Таким образом, возникает модель машин с конечным числом состояний, обрабатывающей потоки данных в реальном времени (TFSMs). Изучение задач тестирования и минимизации для этой модели вычислений проводилось в последние годы во многих работах [1–4]. Однако задача верификации для TFSMs еще ожидает исследования, и в данной статье мы предлагаем один подход к ее решению.

Целью наших исследований является задача проверки выполнимости некоторых поведенческих свойств TFSMs, зависящих не только от соответствий между последовательностями входных сигналов и выходных сигналов, но также от времени их поступления и времени, затраченного на их обработку. Для формального описания мы

предлагаем использовать новое расширение $\mathcal{LP}$ -RLTL темпоральной логики линейного времени LTL. В основу $\mathcal{LP}$ -RLTL положены идеи, предложенные и развитые в статьях [5–6] для решения задачи верификации последовательных реагирующих систем. Отличительные особенности $\mathcal{LP}$ -RLTL состоят в том, что

- темпоральные операторы параметризованы регулярными языками с пометками реального времени; эти языки заданы над входным алфавитом TFSMs при помощи конечных автоматов;
- атомарными предикатами также являются регулярные языки с пометками реального времени, заданные над выходным алфавитом TFSMs при помощи конечных автоматов.

Модель TFSM над входным и выходным алфавитами Σ и Δ определяется системой переходов $M = (S, s_0, G, D, \rho)$, где:

- S — конечное непустое множество состояний;
- $s_0 \in S$ — начальное состояние;
- G — множество входных допустимых интервалов, то есть интервалов вида $(u, v]$, где $u, v \in \mathbb{R}^+$ и $0 < u < v$;
- D — множество выходных допустимых интервалов, то есть интервалов вида $(p, q]$, где $p, q \in \mathbb{R}^+$ и $0 < p < q$;
- $\rho \subseteq (S \times \Sigma \times \Delta \times S \times G \times D)$ — отношение переходов.

Переход $(s, \sigma, \delta, s', g, d)$ означает, что автомат, пребывающий в состоянии s и получивший входной символ σ спустя время $t \in g$ после поступления предыдущего входного сигнала, переходит в состояние s' и спустя время $\tau \in d$ выдает выходной символ δ . Последовательность переходов TFSM M , берущая начало в состоянии s_0 , образует *траекторию вычисления*, в ходе которого входное слово с пометками времени $\alpha = (\sigma_1, t_1), (\sigma_2, t_2), \dots, (\sigma_n, t_n)$ преобразуется в выходное слово $\beta = (\delta_1, \tau_1), (\delta_2, \tau_2), \dots, (\delta_n, \tau_n)$. В том случае, когда задержки на переходах TFSM M согласованы так, что выходные символы δ_i в слове β следуют в том же порядке, что и соответствующие им входные символы σ_i в слове α , TFSM M называется *консервативной*.

Поведение TFSM M проявляется в соответствии между входными и выходными временными словами. Для описания такого рода соответствий нами предложена темпоральная логика $\mathcal{LP}$ -RLTL. Пусть заданы два класса языков входных и выходных временных слов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$, которые допускают некоторое конструктивное описание. Тогда множество формул $Form$ логики $\mathcal{LP}$ -RLTL определяется так:

1. $P \in Form$ для описания P любого языка из класса $\mathcal{P}$;
2. если $\varphi \in Form$, $a \in \Sigma$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, то и $\mathbf{X}_{(a, (t_1, t_2))} \varphi \in Form$;
3. для всякого языка $L \in \mathcal{L}$ и $\varphi \in Form$, $\mathbf{F}_L \varphi \in Form$;
4. всякая булева комбинация формул является формулой.

Отношение выполнимости для формул логики $\mathcal{LP}$ -RLTL определяется на трассах. В каждой трассе учитывается ожидаемый поток входных данных (входное временное слово), сформировавшийся и ожидаемый потоки выходных данных (выходные временные слова), а также время запаздывания выдачи выходных данных. Трассы однозначно соответствуют траекториям вычислений TFSMs, и поэтому $\mathcal{LP}$ -RLTL может быть использована для спецификации поведения TFSMs. Условимся использовать запись $M \models \varphi$ для обозначения того, что $\mathcal{LP}$ -RLTL формула φ выполняется на всех трассах, порождаемых траекториями вычислений TFSM M . Задача верификации автоматов-преобразователей реального времени состоит в том, чтобы для заданной TFSM M и заданной $\mathcal{LP}$ -RLTL формулы φ проверить выполнимость отношения $M \models \varphi$. Эта задача была исследована нами для случая, когда M — это консервативная TFSM, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$ — это классы языков временных слов, распознаваемых при помощи конечных автоматов; для обозначения соответствующей темпоральной логики будем использовать обозначение Rg-LTL. Основным результатом исследований является

Теорема. *Существует алгоритм решения задачи верификации консервативных машин с конечным числом состояний, работающих в реальном времени, относительно спецификаций, представленных формулами Reg-LTL.*

Решение рассматриваемой задачи было получено нами при помощи табличного метода: для заданных TFSM M и Reg-LTL формулы φ строится система переходов некоторого конечного автомата $A_{M,\varphi}$, для которого верно соотношение

$$L(A_{M,\varphi}) = \emptyset \Leftrightarrow M \models \varphi.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00854.

Список литературы

1. Bresolin D., El-Fakih K., Villa T., Yevtushenko N. Deterministic Timed Finite State Machines: Equivalence Checking and Expressive Power // Proceedings of the International Conference GANDALF. — 2014. — P. 203–216.
2. Tvardovskii A., Yevtushenko N. Minimizing Timed Finite State Machines // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. — 29 (4). — 2014. — P. 77–83.
3. Tvardovskii A., Yevtushenko N. Minimizing Finite State Machines with Time Guards and Timeouts // Proceedings of ISP RAS. — 29 (4). — 2017. — P. 139–154.

4. Винарский Е. М., Захаров В. А. К проверке строго детерминированного поведения временных конечных автоматов // Труды Института системного программирования РАН. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 325–340
5. Kozlova D. G., Zakharov V. A. On the model checking of sequential reactive systems // Proceedings of the 25-th International Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2016), CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — v. 1698. — P. 233–244.
6. Gnatenko A.P., Zakharov V. A. On the verification of finite transducers over semigroups // Труды Института системного программирования РАН. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 303–324.

ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ КОНСТРУИРОВАНИЯ МНОГОЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

Э. Э. Гасанов (Москва)

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Для $q \in \mathbb{N}$ будем обозначать $E_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Элементарным автоматом будем называть автомат без выходов $\mathcal{A} = (E_q^4, E_q, \varphi, q_0)$, где E_q^4 — входной алфавит, E_q — множество состояний, $\varphi : E_q^5 \rightarrow E_q$ — функция переходов, причем $\varphi(0, 0, 0, 0, 0) = 0$, $q_0 \in E_q$ — начальное состояние.

Стандартным (n, t) -экраном S будем называть следующую конструкцию. Пусть имеется прямоугольник размера $n \times t$, $t, n \in \mathbb{N}$. В каждую клетку прямоугольника поместим по одному экземпляру одного и того же элементарного автомата $\mathcal{A}$. Входами этого автомата будут являться состояния четырех соседних автоматов, стоящих слева, справа, сверху и снизу от данного автомата, и будем считать, что у автомата имеется *левый* вход l , *правый* вход r , *верхний* вход u и *нижний* вход d соответственно. Автоматы, стоящие в первой и n -й строках и в первом и t -м столбцах будем называть *граничными автоматами*. Для граничных автоматов часть входов являются свободными. В частности, свободными являются верхние входы автоматов первой строки, левые входы автоматов первого столбца,

нижние входы автоматов n -й строки и правые входы автоматов m -го столбца. Будем считать, что у автоматов, стоящих в m -м столбце правый вход всегда нулевой, и у автоматов, стоящих в n -й строке нижний вход всегда нулевой. Верхние входы автоматов первой строки и левые входы автоматов первого столбца будем называть *управляющими входами*.

(n, m) -экраном S с одним управляющим входом будем называть такой же прямоугольник размера $n \times m$, $m, n \in \mathbb{N}$, из элементарных автоматов, в котором только один вход (а именно верхний вход автомата, стоящего в первой строке и первом столбце) оставлен свободным и называется *управляющим*, а на все остальные свободные входы всегда подается константа 0.

Таким образом, *стандартный (n, m) -экран S* ((n, m) -экран S с одним управляющим входом) — это тройка $S = \langle \mathcal{A}, n, m \rangle$, где $\mathcal{A}$ — элементарный автомат, $n, m \in \mathbb{N}$ — соответственно количество строк и столбцов прямоугольника, причем число управляющих входов равно $n + m$ (равно 1).

γ -цветное изображение — это конфигурация, в которой все элементарные автоматы находятся в состояниях из E_γ и которую можно удерживать на экране сколь угодно долго, подавая на все управляющие входы элементарных автоматов нулевые значения.

Обозначим $\mathfrak{Z}(n, m, \gamma)$ — множество γ -цветных изображений размера $(n \times m)$.

Внешний автомат для стандартного экрана $\langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ (для экрана $\langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ с одним управляющим входом) — это автономный инициальный автомат с выходом $\mathcal{A}_e = (E_{q'}, E_q^p, \psi, q_0)$, где $E_{q'}$, $q' \in \mathbb{N}$, — множество состояний, E_q^p — алфавит выходов, $\psi : E_{q'} \rightarrow E_q^p$ — функция выходов, $q_0 = 0$ — начальное состояние, $p = n + m$ в случае стандартного экрана и $p = 1$ для экрана с одним управляющим входом. Этот автомат генерирует последовательности входных символов из множества E_q для свободных входов экрана.

Генератором G назовем пару $G = \langle \mathcal{A}_e, S \rangle$, где S — экран, $\mathcal{A}_e$ — внешний автомат для экрана S .

Будем говорить, что генератор $\langle \mathcal{A}_e, S \rangle$ *формирует γ -цветное изображение I* , если при подаче выходов $\mathcal{A}_e$ на управляющие входы экрана при условии, что начальное состояние экрана является произвольным γ -цветным изображением, через некоторое время на экране появляется изображение I , которое после своего появления более не изменяется.

Экран $S = \langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ называется γ -*универсальным*, если для любого изображения $I \in \mathfrak{Z}(n, m, \gamma)$ существует внешний автомат $\mathcal{A}_e^K$,

такой что генератор $G = \langle \mathcal{A}_e^K, S \rangle$ формирует изображение I .

Множество всех γ -универсальных стандартных (n, m) -экранов обозначим через $\mathcal{U}_s(n, m, \gamma)$. Множество всех γ -универсальных (n, m) -экранов с одним управляющим входом обозначим через $\mathcal{U}_1(n, m, \gamma)$.

Если $S = \langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ — экран, то через $Q(S)$ обозначим число состояний элементарного автомата $\mathcal{A}$. Положим $Q_s(n, m, \gamma) = \min_{S \in \mathcal{U}_s(n, m, \gamma)} Q(S)$, $Q_1(n, m, \gamma) = \min_{S \in \mathcal{U}_1(n, m, \gamma)} Q(S)$.

Элементарный автомат $\mathcal{A}$ называется γ -универсальным для стандартного экрана, если для любых $n, m \in \mathbb{N}$ стандартный экран $S = \langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ является γ -универсальным. Аналогично, элементарный автомат $\mathcal{A}$ называется γ -универсальным для экрана с одним управляющим входом, если для любых $n, m \in \mathbb{N}$ экран $S = \langle \mathcal{A}, n, m \rangle$ с одним управляющим входом является γ -универсальным.

Для генератора $\langle \mathcal{A}_e, S \rangle$ через $T(\mathcal{A}_e, S)$ обозначим момент времени, после которого конфигурация экрана не изменяется. Считаем, что $T(\mathcal{A}_e, S) = \infty$, если стабилизация изображения не наступает. Если генератор $\langle \mathcal{A}_e, S \rangle$ формирует изображение $\mathfrak{Z}_K$, соответствующее коду K , то $T(\mathcal{A}_e, S)$ — время формирования изображения $\mathfrak{Z}_K$.

Если S — γ -универсальный (n, m) -экран, $I \in \mathfrak{Z}(n, m, \gamma)$, то через $\mathcal{G}(S, I)$ обозначим множество генераторов $\langle \mathcal{A}_e, S \rangle$, формирующих изображение I . Положим

$$T(S, I) = \min_{\langle \mathcal{A}_e, S \rangle \in \mathcal{G}(S, I)} T(\mathcal{A}_e, S),$$

$$T(S, n, m, \gamma) = \max_{I \in \mathfrak{Z}(n, m, \gamma)} T(S, I),$$

$$T_s(n, m, \gamma, q) = \min_{S \in \mathcal{U}_s(n, m, \gamma), Q(S) \leq q} T(S, n, m, \gamma),$$

$$T_1(n, m, \gamma, q) = \min_{S \in \mathcal{U}_1(n, m, \gamma), Q(S) \leq q} T(S, n, m, \gamma).$$

Справедливы следующие теоремы, являющиеся обобщением результатов Е. Е. Титовой [1–3] на многоцветный случай.

Теорема. Пусть $n, m, \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$. Тогда если $\min(n, m) = 1$, то $Q_s(n, m, \gamma) = \gamma$; если $n, m \geq 2$, то $Q_s(n, m, \gamma) = \gamma + 1$.

Теорема. Если $\gamma \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 1$, то не существует γ -универсального элементарного автомата для стандартного экрана с γ состояниями, и существует γ -универсальный элементарный автомат для стандартного экрана с $\gamma + 1$ состоянием.

Теорема. Для любых $n, m, \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, выполнено $T_s(1, m, \gamma, \gamma) = T_s(m, 1, \gamma, \gamma) \leq m + 3$, $T_s(n, m, \gamma, \gamma + 1) \leq n + m + \min(n, m) + 1$.

Теорема. Если $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, то существует γ -универсальный элементарный автомат для экрана с одним управляющим входом с $\gamma + 5$ состояниями и $T_1(n, m, \gamma, \gamma + 5) \leq 2nm + n + 5$.

Список литературы

1. Титова Е. Е. Конструирование изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2008. — Т. 12, вып. 1–4. — С. 105–121.
2. Титова Е. Е. Линейное по времени конструирование изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2012. — Т. 16, вып. 1–4. — С. 215–234.
3. Титова Е. Е. Сложность конструирования изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 191–195.

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ РЕАГИРУЮЩИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОГО РАСШИРЕНИЯ ТЕМПОРАЛЬНОЙ ЛОГИКИ STL*

А. Р. Гнатенко, В. А. Захаров (Москва)

Темпоральные логики нашли широкое применение для описания поведения различных информационных систем, включая распределенные программы, встроенные системы, телекоммуникационные протоколы и др. [1]. Это произошло благодаря тому, что в этих логиках был достигнут определенный баланс между выразительными возможностями, необходимыми для описания требований корректности и безопасности вычислений сложных информационных систем, и эффективностью алгоритмов проверки этих требований на моделях этих систем. Наиболее востребованной оказалась расширенная логика деревьев вычислений STL*, включающая в себя в качестве фрагментов STL и логику линейного времени LTL.

Язык LTL, хотя и вполне достаточный для большинства практических приложений, уступает по выразительным возможностям

монадической логике 2-го порядка S1S. В разные годы предпринимались многократные попытки восполнить образовавшийся разрыв путем построения различных расширений LTL [2–4]. Эти исследования были мотивированы, как правило, математическими соображениями. Однако недостаточные выразительные возможности LTL проявляются, в частности, при ее применении для спецификации вычислений систем обработки потоковых данных (реагирующих систем). Поведение таких систем проявляется в соответствии между потоками входных данных (показаний датчиков, управляющих сигналов) и выходных данных (команд, действий). В этом случае для описания потоков данных и команд целесообразно использовать теоретико-языковые средства (автоматы, грамматики, регулярные выражения), а для описания соответствия между этими потоками выгодно применять параметризованные темпоральные операторы.

Этот замысел был реализован в статье [5], в которой были описаны новое расширение логики линейного времени $\mathcal{LP}$ -LTL и алгоритм верификации моделей реагирующих систем относительно спецификаций, представленных формулами этой логики. В статье [6] было установлено, что $\mathcal{LP}$ -LTL и S1S имеют равные выразительные возможности, а в работе [7] было предложено новое параметризованное расширение $\mathcal{LP}$ -CTL логики деревьев вычислений и описан табличный алгоритм проверки выполнимости формул этой логики на моделях реагирующих систем. Открытыми оставались вопросы об объединении двух новых вариантов темпоральных логик и о сложности задачи верификации моделей реагирующих систем относительно расширенной параметризованной темпоральной логики $\mathcal{LP}$ -CTL*. В данной статье анонсируется решение обеих задач.

В качестве модели реагирующих систем, на которой определяется семантика формул $\mathcal{LP}$ -CTL*, используются конечные автоматы-преобразователи (трансдюсеры). Трансдюсер $\pi = (Q, Q_0, \rightarrow)$ над входным алфавитом A и выходным алфавитом B состоит из множества состояний управления Q , подмножества начальных состояний $F \subseteq Q$ и тотального отношения переходов $\rightarrow \subseteq Q \times A \times B^* \times Q$. Тракторией трансдюсера π из состояния q_0 называется последовательность переходов

$$tr = q_0 \xrightarrow{c_1, h_1} q_1 \xrightarrow{c_2, h_2} q_2 \xrightarrow{c_3, h_3} \dots \xrightarrow{c_n, h_n} q_n \xrightarrow{c_{n+1}, h_{n+1}} \dots \quad (*)$$

Запись $tr|_i$ обозначает суффикс $q_i \xrightarrow{c_{i+1}, h_{i+1}} \dots \xrightarrow{c_n, h_n} q_n \xrightarrow{c_{n+1}, h_{n+1}} \dots$ траектории tr . Множество всех траекторий из состояния q_0 трансдюсера q обозначим записью $Tr(q_0)$.

Пусть заданы два класса языков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$ в алфавитах A и B . Мы полагаем, что языки из этих семейств заданы каким-либо конструктивным способом. Множество $\mathcal{LP}$ -CTL* формул определим так:

- 1) *формулой состояния* φ является описание всякого языка $P \in \mathcal{P}$, всякая формула вида $\mathbf{E}\psi$, где ψ — формула траектории, а также любая булева комбинация формул состояния;
- 2) *формулой траектории* ψ является всякая формула состояния φ , формулы вида $\mathbf{X}_c\psi_1$ или $\psi_1\mathbf{U}_L\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — формулы траектории, $c \in A$, L — описание некоторого языка из класса $\mathcal{L}$, а также любая булева комбинация формул траектории.

Выполнимость формул $\mathcal{LP}$ -CTL* на состояниях q (для формул состояния) и траекториях tr вида (*) (для формул траектории) трансдьюсера π в контексте слова $h \in B^*$ определим так:

- 1) $\pi, q, h \models P \iff h \in P$;
- 2) если $\pi, q, h \models \mathbf{E}\varphi \iff \pi, tr, h \models \varphi$ для некоторой траектории $tr \in Tr(q)$;
- 3) если φ — формула состояния, то $\pi, tr, h \models \varphi \iff \pi, q_0, h \models \varphi$;
- 4) $\pi, tr, h \models \mathbf{X}_c\psi \iff c = c_1$ and $\pi, q_1, h_1c_1 \models \psi$;
- 5) $\pi, tr, h \models \psi_1\mathbf{U}_L\psi_2 \iff$ существует такое $i \geq 0$, для которого $c_1c_2 \dots c_i \in L$ и $\pi, tr|_i, hh_1h_2 \dots h_i \models \psi_2$, и для каждого j , $0 \leq j < i$, если $c_1c_2 \dots c_j \in L$, то $\pi, tr|_j, hh_1h_2 \dots h_j \models \psi_2$.

Отношение выполнимости для булевых комбинаций формул определяется согласно принципам классической логики.

Задача верификации моделей последовательных реагирующих систем состоит в том, чтобы для произвольного заданного конечного трансдьюсера $\pi = (Q, Q_0, \longrightarrow)$ и произвольной заданной формулы состояний φ проверить выполнимость отношения $\pi, q_0, \varepsilon\varphi$ для каждого состояния $q_0 \in Q_0$. Мы исследовали задачу верификации для случая, когда семейства языков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$, используемых в качестве параметров и базовых предикатов формулах $\mathcal{LP}$ -CTL*, — это семейства регулярных языков, и для определения этих языков применяются детерминированные конечные автоматы. Параметризованную темпоральную логику такого вида обозначим записью Reg-CTL*.

Теорема. *Задача верификации моделей последовательных реагирующих систем для формул Reg-CTL* является PSPACE-полной.*

PSPACE-трудность указанной задачи следует из того, что эта задача является PSPACE-трудной для CTL*. Для верификации моделей реагирующих систем относительно формул Reg-CTL* нами был разработан детерминированный алгоритм, имеющий экспоненциальную по времени сложность, и было показано, что его недетерминированная модификация может быть выполнена с использованием

полиномиального объема памяти.

Список литературы

1. Clarke E. M, Jr., Gramberg O., Peled D. A. Model Checking . — MIT Press, 1999.
2. Wolper. P. Temporal Logic Can Be More Expressive // Information and Control. — 1983 — 56 (1/2). — P. 72–99.
3. Henriksen J. G., Thiagarajan P. S. Dynamic linear time temporal logic // Annals of Pure and Applied Logic. — 1999. — v. 96. — P. 187–207
4. Leucker M., Sanchez C. Regular Linear Temporal Logic // Proceedings of the 4-th International Colloquium on Theoretical Aspects of Computing. — 2007. — P. 291–305.
5. Kozlova D. G., Zakharov V. A. On the model checking of sequential reactive systems // Proceedings of the 25-th International Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2016), CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — v. 1698. — P. 233–244.
6. Гнатенко А. Р., Захаров В. А. О выразительных возможностях некоторых расширений линейной темпоральной логики // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25, № 5. — С. 506–524.
7. Gnatenko A. P., Zakharov V. A. On the verification of finite transducers over semigroups // Труды Института системного программирования РАН. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 303–324.

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

К. А. Голиков (Москва)

Рассмотрим виртуальные модели роботов разных видов: манипуляторы с 2–4 вращательными и призматическими сочленениями и мобильные роботы с 2 гусеницами. Роботы действуют на плоскости.

Исследуем задачу позиционирования: переместить *особую точку* робота (захват манипулятора или центр мобильного робота) из фиксированного начального положения в целевую точку в рабочей области робота.

Хотя роботы имеют разную геометрию, размеры и свойства (например, мобильный робот — неголономен, а манипулятор — голономен), алгоритм обучения системы управления робота не должен зависеть от этих различий.

Обобщаем разные модели следующим образом: выделяем точки, характеризующие положение робота, назовём их *сочленениями* — это места сгибов (суставов) или перемещения (гусеница). Прибавим к этим точкам *особую точку* робота, положение которой является индикатором позиционирования.

Проводим дискретизацию по времени, что влечёт за собой дискретизацию пространства.

Состояние системы может быть описано координатами n точек на плоскости. Также в каждый такт нам известны координаты скоростей и ускорений этих позиций:

$$x(t) = \{[(x_1, y_1), (\dot{x}_1, \dot{y}_1), (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1)], \dots, [(x_n, y_n), (\dot{x}_n, \dot{y}_n), (\ddot{x}_n, \ddot{y}_n)]\} \quad (1)$$

Предполагаем, что масса робота распределена по сочленениям, масса каждого из которых постоянна.

Кроме того, в каждом сочленении робота расположено по два *привода* одинакового усилия, но разного направления (смыкание/размыкание сустава, вращение гусениц в прямом/обратном направлении). Именно эти приводы приводят робота в движение. Конкретные функции усилия нам не известны (предполагаем, что они могут изменяться):

$$\Phi(t) = [(\phi^1_1(t), \phi^2_1(t)), \dots, (\phi^1_{n-1}(t), \phi^2_{n-1}(t))] \quad (2)$$

Управление робота также дискретное — на каждый привод можно подать в каждый такт времени только сигнал из $\{0, 1\}$ (работать/отключиться). Напрямую усилием привода управлять нельзя. Можно варьировать время запуска и длительность работы каждого привода. Предполагаем, что в приводах системы есть определённые погрешности, состояния, в которые переводят приводы систему, немного отличаются от повторения к повторению.

Самым дорогим ресурсом при обучении системы является время работы системы. Исследуем возможности и ограничения модели робота *методом проб и ошибок*, запоминаем выполненные действия в *Базе Данных*, затем строим обобщение полученного опыта.

Обучение подразделяется на следующие этапы.

1. Подавая векторы управлений из регулярной решётки в пространстве управлений (хотя в пространстве действий траектории будут распределены чаще всего неравномерно), можно за минимальное

число действий получить ценный опыт, подходящий для интерполяции и предсказания поведения системы (случайно сгенерированными управлениями за адекватное время обучения хорошей интерполяции не получается).

1*. Недостающую информацию о поведении в непосещённых областях получаем, совершив туда направленные действия — действия в направлении — градиента грубого локального отображения управлений в пространство действий, основанного на сохранённых в БД траекториях движений. При этом выбираем те действия, управления которых *сравнимы* (используется одинаковый набор приводов) и поддаются усреднению по векторам управлений.

2. Получить систему управления при *фиксированных функциях усилия приводов* можно интерполяцией по сохранённому опыту в БД. Интерполяция обеспечивает достаточную точность позиционирования (не только посещённые цели, но и любые цели, из хорошо исследованных роботом областей).

Ограничения на точность позиционирования для конечного состояния системы:

$$\sqrt{(x_n - g_x)^2 + (y_n - g_y)^2} < precision, \quad (3)$$

$$(\dot{x}_i, \dot{y}_i) = (0, 0), i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i) = (0, 0), i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $g = (g_x, g_y)$ — координаты целевой точки, (x_n, y_n) — координаты *особой точки* системы.

Желаемая точность позиционирования *precision* приблизительно равна 1.5 мм. Это довольно узкая окрестность, при том, что размеры области, где располагаются точки целей, приблизительно равны 30 см², размеры мобильного робота 8–12 см², а длины звеньев манипулятора 13–35 см.

Утверждение. Верхняя оценка времени обучения системы (1) и (2), с ограничениями на точность (3), (4), (5) для различных роботов приведена в таблице ниже.

Робот	Точность	Число действий	Время(мин.)
Манипулятор 2 вращ.суст.	1.5 мм	2000	44
Манипулятор 3 вращ.суст.	1.5 мм	16000	266
Вездеход 2 гусеницы	1.5 мм	8800	146

3. Если *функции усилий приводов меняются*, нужно построить для отображения управлений в действия функцию адаптации к этим изменениям.

Работа над оценками продолжается.

Список литературы

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.
2. Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б. Интеллектуальные системы. Теория хранения и поиска информации. — М.: Юрайт, 2017.
3. Саттон Р.С., Барто Э.Г. Обучение с подкреплением. — М.: БИНОМ, 2014.
4. Голиков К. А. Алгоритм обучения систем с дискретным управлением // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23, № 1. — С. 7–38.

О ПРОГРЕССИВНОМ НАКРЫТИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С РЯДОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

П. С. Дергач (Москва)

В работе исследуется задача о накрытии как можно большего по размеру начала натурального ряда с помощью арифметических прогрессий. Весь ряд натуральных чисел целиком накрывать запрещено. При этом на прогрессии накладывается ряд ограничений. Рассматривается три типа ограничений: ограничение сверху на начало прогрессий, ограничение сверху на шаг прогрессий и ограничение на попарное непересечение прогрессий. Разобраны случаи ограничений типа «Начало», «Шаг», «Пересечение», «Начало+Шаг». Подробнее о задачах накрытия и разбиения внутри натурального ряда с помощью арифметических прогрессий можно прочитать в статьях [1–4].

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$.

Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через $\mathbb{N}_0$.

Для $s \in \mathbb{N}$ множество натуральных чисел от 1 до s обозначаем через E_s .

Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда арифметической прогрессией с началом a и шагом b называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Число a называем *началом*, а число b — *шагом* арифметической прогрессии.

Пусть k — произвольное натуральное число.

Через $\mathbb{A}(k)$ обозначаем множество арифметических прогрессий с началом не больше k . Через $\mathbb{B}(k)$ обозначаем множество арифметических прогрессий с шагом не больше k .

Через $f_A(k)$ обозначаем максимальное натуральное число s , для которого множество E_s можно накрыть конечным объединением арифметических прогрессий из $\mathbb{A}(k)$, не накрыв при этом ряд $\mathbb{N}$. Если такого s не существует, то $f_A(k) = \infty$.

Через $f_B(k)$ обозначаем максимальное натуральное число s , для которого множество E_s можно накрыть конечным объединением арифметических прогрессий из $\mathbb{B}(k)$, не накрыв при этом ряд $\mathbb{N}$. Если такого s не существует, то $f_B(k) = \infty$.

Через $f_C(k)$ обозначаем максимальное натуральное число s , для которого множество E_s можно накрыть конечным объединением попарно непересекающихся арифметических прогрессий. Если такого s не существует, то $f_C(k) = \infty$.

Через $f_{AB}(k)$ обозначаем максимальное натуральное число s , для которого множество E_s можно накрыть конечным объединением арифметических прогрессий из $\mathbb{A}(k) \cap \mathbb{B}(k)$, не накрыв при этом ряд $\mathbb{N}$. Если такого s не существует, то $f_{AB}(k) = \infty$.

Теорема. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда

1. При $n = 1$ $f_A(n) = 1$, иначе $f_A(n) = \infty$.
2. $f_B(n) = f_{AB}(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$.
3. $f_C(n) = \infty$.

Доказательство. Нельзя накрыть числа из E_2 , используя только прогрессии с началом в 1 и не накрыв при этом весь ряд. Накрыть же только E_1 легко. Например, можно взять прогрессию $(1, 2)$. Этим доказана часть теоремы про f_A .

Докажем, что $f_B(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$. Рассмотрим семейство прогрессий

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3), \dots, (1, n), (2, n), \dots, (n - 1, n). \quad (*)$$

Они удовлетворяют ограничению на шаг, то есть лежат в $B(n)$. Их объединение, очевидно, не содержит только числа, которые

кратны $2, 3, \dots, n$. Значит это объединение содержит начало натурального ряда длины $\text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$. Отсюда немедленно получаем, что $f_B(n) \geq \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$. С другой стороны, если мы накрыли прогрессиями из $B(n)$ какое-то число a , то и число $a + \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$ тоже было бы ими накрыто (так как шаг прогрессии, содержащей a , лежит в E_n и является делителем $\text{НОК}(1, 2, \dots, n)$.) Но это означает, что накрыв множество $\{1, 2, \dots, \text{НОК}(1, 2, \dots, n)\}$ прогрессиями из $B(n)$ мы бы накрыли весь натуральный ряд. Значит $f_B(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$. Кроме того, все прогрессии из (*) удовлетворяют и ограничению на начало, то есть лежат в $A(n)$. Значит $f_{AB}(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$. Этим доказана часть теоремы про f_B и f_{AB} .

Наконец, при любом $n \in \mathbb{N}$ арифметические прогрессии из семейства $(1, n+1), (2, n+1), \dots, (n, n+1)$ попарно не пересекаются и накрывают E_n , не накрыв при этом весь натуральный ряд. Значит $f_C(n) = \infty$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Дергач П. С., Айрапетов Э. С. О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда. — Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–86.
2. Дергач П. С., Айрапетов Э. С. О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2. — Интеллектуальные системы. — 2016. — Т. 20, вып. 2. — С. 67–86.
3. Дергач П. С., Данилевская Е. Д. О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1. — Интеллектуальные системы. — 2017. — Т. 21, вып. 1. — С. 192–237.
4. Дергач П. С., Данилевская Е. Д. О прогрессивном представлении периодических семейств с ограничениями на начало и шаг. — Интеллектуальные системы. — 2019. — Т. 23, вып. 1. — С. 89–97.

О ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАД ОДНОБУКВЕННЫМ ВЫХОДНЫМ АЛФАВИТОМ

Ш. Р. Жайлауова, В. А. Захаров (Москва)

Конечный автомат-преобразователь (трансдюсер) является, вероятно, самым простым расширением широко известной модели вычислений автоматов Мили, при котором происходит существенное возрастание вычислительных возможностей модели. Оказалось, что трансдюсеры удобно использовать в качестве моделей трансляторов в области математической лингвистики, а также в качестве моделей реагирующих вычислительных систем (драйверов, контроллеров, коммутаторов). Однако было обнаружено, что некоторые задачи анализа поведения трансдюсеров алгоритмически неразрешимы. В статье [1] было установлено, что неразрешимой является проблема эквивалентности для автоматов-преобразователей, а затем в работе [2] было затем показано, что неразрешимость сохраняется даже в том случае, когда входной алфавит автомата состоит из одной буквы. В стремлении уточнить, какие особенности управляющей структуры и вычислений автоматов неизбежно сопутствуют алгоритмической трудности анализа поведения трансдюсеров, были предприняты исследования по выделению как можно более обширных классов автоматов-преобразователей с разрешимой проблемой эквивалентности. Вначале в статье [3] было показано, что проблема эквивалентности эффективно разрешима для детерминированных трансдюсеров, а затем в серии статей [4–6] было установлено, что проблема эквивалентности остается разрешимой также и для некоторых классов недетерминированных трансдюсеров, в которых неоднозначность преобразования входных слов в выходные ограничена по мощности множеств выходных слов, порождаемых автоматом при вычислениях над заданным входным словом, или по разнообразию длин выходных слов. Возникло предположение о том, что при нарушении этих ограничений разрешимость проблемы эквивалентности трансдюсеров уже не удастся сохранить. Тем не менее, в статье [7] был описан новый класс недетерминированных трансдюсеров с эффективно разрешимой проблемой эквивалентности, который не подпадал под ранее известные ограничения.

В данной статье мы продолжаем поиск и исследование новых классов недетерминированных автоматов-преобразователей с разрешимой проблемой эквивалентности. Цель исследования — провести как можно более точную и подробную демаркацию границы между

разрешимыми и неразрешимыми случаями проблемы эквивалентности для рассматриваемой модели вычислений. Мы рассматриваем один класс недетерминированных автоматов, работающих над выходным алфавитом из одной буквы. Характерная особенность рассматриваемых автоматов-преобразователей состоит в том, что для каждого состояния автомата и любой буквы входного алфавита новое состояние, в которое может осуществиться переход, определяется однозначно, но выходные слова на этих переходах могут быть разными. Таким образом, для каждого входного слова разнообразие выходных слов, порождаемых автоматом, может варьироваться сколь угодно широко, как по мощности, так и по длине слов. Нам удалось показать, что проблема эквивалентности в указанном классе автоматов-преобразователей разрешима.

Трансдюсер $\pi = (Q, q_0, F, \longrightarrow)$ над входным алфавитом $\mathcal{A}$ и выходным алфавитом $\mathcal{B}$ состоит из конечного множества *состояний управления* Q , *начального состояния* $q_0 \in Q$, множества *состояний выхода* $F \subseteq Q$ и конечного *отношения переходов* $\longrightarrow \subseteq Q \times \mathcal{A} \times Q \times \mathcal{B}^*$.

Каждый переход $(q, a, q', h) \in \longrightarrow$ обозначается записью $q \xrightarrow{a, h} q'$.

Полным прогоном трансдюсера π на входном слове $w = a_1 a_2 \dots a_n$ называется последовательность переходов

$$q_0 \xrightarrow{a_1, h_1} q_1 \xrightarrow{a_2, h_2} q_2 \xrightarrow{a_3, h_3} \dots \xrightarrow{a_n, h_n} q_n ,$$

исходящая из начального состояния q_0 и оканчивающаяся в одном из финальных состояний $q_n \in F$. Слово $h_1 h_2 \dots h_n$ объявляется *результатом* этого прогона. Трансдюсер π реализует отношение преобразования (трансдукции) $T_\pi \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{B}^*$: пара $(w, h) \in T_\pi$ тогда и только тогда, когда существует полный прогон трансдюсера π на входном слове w с результатом h . Трансдюсеры π_1 и π_2 считаются *эквивалентными*, если $T_{\pi_1} = T_{\pi_2}$.

Будем говорить, что трансдюсер $\pi = (Q, q_0, F, \longrightarrow)$ имеет *детерминированное управление*, если для любой пары переходов $q \xrightarrow{a', h'} q'$ и $q \xrightarrow{a'', h''} q''$, исходящих из одного и того же состояния, выполняется соотношение $a' = a'' \Rightarrow q' = q''$. Для любого входного слова w все полные прогоны трансдюсера π с детерминированным управлением проходят по одной и той же последовательности состояний, но при этом могут иметь разные результаты.

Теорема. *Проблема эквивалентности трансдюсеров с детерминированным управлением, работающим над однобуквенным выходным алфавитом $\mathcal{B} = \{b\}$, разрешима.*

Обоснование этого утверждения проводится по следующему плану. Выходные слова в однобуквенном алфавите можно рассматривать как записи натуральных чисел в унарной системе счисления. Тогда результатами вычислений трансдюсеров над выходным алфавитом являются натуральные числа. Детерминированность управления позволяет для каждой пары трансдюсеров π_1 и π_2 из рассматриваемого класса построить их декартово произведение $\pi_1 \times \pi_2$, которое также представляет собой трансдюсер с детерминированным управлением, но выдающий в качестве результатов вычислений пары натуральных чисел. Далее устанавливается, что отношение вычислимости R_{π_1, π_2} двух пар чисел (n_1, n_2) и (m_1, m_2) трансдюсером $\pi_1 \times \pi_2$ на одном и том же входном слове выразимо формулой арифметики Пресбургера. Поскольку эквивалентность трансдюсеров π_1 и π_2 очевидно определяется при помощи отношения R_{π_1, π_2} , и существует алгоритм проверки выполнимости формул арифметики Пресбургера, проблема эквивалентности трансдюсеров из рассматриваемого класса разрешима.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00854.

Список литературы

1. Griffiths T. The unsolvability of the equivalence problem for ε -free nondeterministic generalized machines // Journal of the ACM. — 1968. — V. 15. — P. 409–413.
2. Ibarra O. The unsolvability of the equivalence problem for Efree NGSMS with unary input (output) alphabet and applications // SIAM Journal on Computing. — 1978. — V. 4 — P. 524–532.
3. Blattner M, Head T. The decidability of equivalence for deterministic finite transducers // Journal of Computer and System Sciences. — 1979. — V. 19. — P. 45–49.
4. Culik K., Karhumäki J. The equivalence of finite-valued transducers (on HDTOL languages) is decidable // Theoretical Computer Science. — 1986. — V. 47. — P. 71–84.
5. Weber A. Decomposing finite-valued transducers and deciding their equivalence // SIAM Journal on Computing. — 1993. — V. 22. — P. 175–202.
6. de Souza R. On the decidability of the equivalence for a certain class of transducers // Proceedings of 12-th International Conference on Developments in Language Theory. — 2009. — P. 478–489.
7. Zakharov V. A. Equivalence checking of prefix-free transducers and deterministic two-tape automata // Proceedings of 13-th International Conference Language and Automata Theory and Applications. — 2019. — P. 146–158.

КОДЫ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. Н. Козлов (Москва)

Изображением называем конечное (непустое) множество точек в евклидовых пространствах разной размерности. В частности, двумерное изображение — конечное множество точек на плоскости. Считаем, что любую фигуру можно «аппроксимировать» конечным множеством точек, которые уже сами по себе делают фигуру вполне узнаваемой. При этом если точек много, то такая совокупность точек практически неотличима от исходной фигуры. Так же можно представлять и полутоновые, черно-бело-серые изображения, при этом разная плотность точек в разных частях изображения дает разные оттенки «серого цвета». Как известно, цветное изображение можно представлять как наложение трех монохроматических (аналогов черно-бело-серых) изображений. Это означает, что совокупностями точек можно представлять и цветные изображения. Трехмерные изображения — точки в трехмерном евклидовом пространстве. Соотнесение между трехмерным изображением и двумерными, являющимися их проекциями, приводит к задачам восстановления тел по плоским проекциям и смежным задачам. Наконец, трехмерный мир в динамике можно рассматривать как четырехмерное изображение (последовательность трехмерных сцен).

Далее рассматриваются двумерные изображения, но сказанное может быть обобщено и на случаи большей размерности.

Перенумеруем некоторым образом точки изображения A так, чтобы номера разных точек были попарно различны. Обозначим через M_A множество этих номеров. Пусть S_{mnu} и S_{kps} — площади треугольников с вершинами в тройках точек с номерами m, n, u и k, p, s и пусть $\rho_{mnu,kps} = S_{mnu}/S_{kps}$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps} = 0$ значение $\rho_{mnu,kps}$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu,kps}$ для всех таких пар троек обозначим через T_A . Код изображения A — пара $\langle M_A, T_A \rangle$. Изображения A и B с кодами $\langle M_A, T_A \rangle$ и $\langle M_B, T_B \rangle$ назовем эквивалентными, если существует такая биекция $\psi: M_A \rightarrow M_B$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A выполняется $\rho_{mnu,kps} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(p)\psi(s)}$. Ясно, что эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их кодов с точностью до перенумерации точек.

Два изображения называем аффинно эквивалентными, если они переводимы друг в друга аффинными преобразованиями. Если все точки изображения не лежат на одной прямой или двух параллельных прямых, то изображение называем плоским.

Теорема 1 ([1]). *Два плоских изображения эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Содержательно теорема 1 означает, в частности, что код изображения задает его с точностью до аффинных преобразований.

Назовем изображения A и B пропорциональными, если существует такая биекция $\psi: M_A \rightarrow M_B$, при которой для любых точек с номерами m, n, u из M_A (не лежащих на одной прямой), число $\rho_{mnu, \psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ есть константа, не зависящая от выбора точек m, n, u .

Теорема 2 ([2]). *Два плоских изображения пропорциональны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Числа $\rho_{mnu, \psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности не являются элементами кода ни изображения A , ни изображения B . Однако они являются элементами кода изображения S , которое трактуется как среда, и включающего изображения A и B как части. Под этим понимается следующее. Изображение A (или B) называется частью среды S , если точки, составляющие A , есть подмножество точек из S . Если код для S есть $\langle M_S, T_S \rangle$, то, очевидно, код $\langle M_A, T_A \rangle$ можно получить, если собрать в M_A номера из M_S всех точек, вошедших в A , и собрав в T_A все те $\rho_{mnu, kps} = S_{mnu}/S_{kps}$ из T_S , для которых m, n, u, k, s, p вошли в M_A . Говорим в этом случае, что код $\langle M_A, T_A \rangle$ есть часть кода $\langle M_S, T_S \rangle$. В этом случае константные $\rho_{mnu, \psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности являются элементами кода среды S .

Известны [3, 4] результаты о том, что для каждого выпуклого многоугольника (k вершин, $k > 2$) существует и единственен наименьший по площади эллипс, в который этот многоугольник вписывается. Используем это для построения некоторого нового кода изображения.

Пусть A — изображение, M_A^e — множество попарно различных номеров точек в A , S_{mnu}^e и S_{kps}^e — площади наименьших (по площади) эллипсов описанных вокруг треугольников с вершинами в точках соответственно m, n, u и k, p, s , и пусть $\rho_{mnu, kps}^e = S_{mnu}^e/S_{kps}^e$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps}^e = 0$ значение $\rho_{mnu, kps}^e$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu, kps}^e$ для всех таких пар троек обозначим через T_A^e . Эллипс-код изображения A — пара $\langle M_A^e, T_A^e \rangle$. Изображения A и B с кодами $\langle M_A^e, T_A^e \rangle$ и $\langle M_B^e, T_B^e \rangle$ назовем эллипс-эквивалентными, если существует такая биекция $\psi: M_A^e \rightarrow M_B^e$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A^e выполнено $\rho_{mnu, kps}^e = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u), \psi(k)\psi(p)\psi(s)}^e$. Ясно, что

эллипс-эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их эллипс-кодов с точностью до перенумерации точек.

Теорема 3. *Два плоских изображения эллипс-эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Список литературы

1. Козлов В. Н., Введение в математическую теорию зрительного восприятия. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
2. Козлов В. Н., Алгоритмы формирования системы взаимосвязанных образов // Интеллектуальные системы. — 2014. — 18 (2). — С. 99–114.
3. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. — М.: Мир, 1968.
4. Загускин В. Л. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема // Успехи математических наук. — 1958. — 13 (6). — С. 89–93.

ПОНЯТИЕ РЕАЛИЗУЕМОСТИ НА ОСНОВЕ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Ю. Коновалов (Москва)

Понятие рекурсивной реализуемости восходит к работе американского математика С. К. Клини [1], в которой была предложена интерпретация ряда специфических интуиционистских понятий на основе концепции теории алгоритмов. С недавних пор были введены в рассмотрение варианты реализуемости, основанные на различных видах субрекурсивной реализуемости: примитивно-рекурсивная реализуемость [2, 3], минимальная реализуемость [4]. Представляют интерес и другие виды субрекурсивной реализуемости.

В настоящей работе вводится понятие общерекурсивной реализуемости, основанное на использовании индексов общерекурсивных функций в качестве конструктивного способа получения одних реализаций из других. В статье [5] было установлено, что интуиционистское исчисление предикатов некорректно относительно примитивно-рекурсивной реализуемости. В настоящей работе показано, что аналогичный результат справедлив для общерекурсивной реализуемости.

Пусть фиксирована вычислимая нумерация всех n -местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \dots$ для каждого натурального числа n . Рассмотрим соответствующую нумерацию общерекурсивных функций, определив множество индексов

$$I_n \doteq \{e \mid \varphi_e^n \text{ — общерекурсивная функция}\}.$$

Таким образом, если $z \in I_n$, то φ_z^n — n -местная общерекурсивная функция, и напротив, всякая n -местная общерекурсивная функция есть φ_z^n для некоторого $z \in I_n$. В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функции φ_z^n там, где он может быть восстановлен из контекста.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов вида $P(v_1, \dots, v_k)$ и логических констант $\top$ (истина), $\perp$ (ложь) при помощи связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ и кванторов $\forall, \exists$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c , которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2 , так что выполняются соотношения $p_1(c(x, y)) = x$ и $p_2(c(x, y)) = y$. В выражениях вида $p_1(t)$, $p_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Определим понятие общерекурсивной реализуемости в духе абсолютной реализуемости [6]. Следуя [6], n -местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A .

Временно расширим язык логики предикатов константами для всех натуральных чисел. Для каждого натурального числа e , произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e \mathbf{r}_f^{GR} A$ (натуральное число e общерекурсивно реализует формулу A при оценке f):

- неверно $e \mathbf{r}_f^{GR} \perp$, и верно $e \mathbf{r}_f^{GR} \top$;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} P(a_1, \dots, a_n) \doteq e \in f(P)(a_1, \dots, a_n)$, если P — n -местный предикатный символ;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} (\Phi \wedge \Psi) \doteq p_1 e \mathbf{r}_f^{GR} \Phi$ и $p_2 e \mathbf{r}_f^{GR} \Psi$;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} (\Phi \vee \Psi) \doteq (p_1 e = 0 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^{GR} \Phi) \text{ или } (p_1 e = 1 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^{GR} \Psi)$;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} \exists x \Phi(x) \doteq p_2 e \mathbf{r}_f^{GR} \Phi(p_1 e)$;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \doteq e \in I_{n+1}$ и для всех натуральных чисел $s, a_1, \dots, a_n$, если имеет место

- $s \mathbf{r}_f^{GR} \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то верно $\varphi_e(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_f^{GR} \Psi(a_1, \dots, a_n)$;
- $e \mathbf{r}_f^{GR} \forall x_1, \dots, x_n \Phi \Leftrightarrow e \mathbf{r}_f^{GR} \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\rightarrow$ не является главной в Φ .

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно общерекурсивно реализуемой*, если найдется такое натуральное число e , что имеет место $e \mathbf{r}_f^{GR} A$ при любой оценке f формулы A .

Рассмотрим предикатную формулу

$$\forall x (Q(x) \rightarrow \forall y \exists z P(x, y, z)) \rightarrow \forall y \forall x (Q(x) \rightarrow \exists z P(x, y, z)),$$

которую обозначим $A(P, Q)$.

Лемма. *Предикатная формула $A(P, Q)$ не является абсолютно общерекурсивно реализуемой.*

Из леммы и того факта, что формула $A(P, Q)$ выводится в интуиционистском исчислении предикатов, получаем следующую теорему.

Теорема. *Интуиционистское исчисление предикатов некорректно относительно семантики абсолютной общерекурсивной реализуемости.*

Список литературы

1. Kleene S.K. On the interpretation of intuitionistic number theory // Journal of Symbolic Logic. — 1945. — 10. — P. 109–124.
2. Damnjanovic Z. Strictly primitive recursive realizability // Journal of Symbolic Logic. — 1994. — 59 (4). — P. 1210–1227.
3. Salehi. S. A generalized realizability for constructive arithmetic // Bulletin of Symbolic Logic. — 2001. — 7. — P. 147–148.
4. Damnjanovic Z. Minimal realizability of intuitionistic arithmetic and elementary analysis // Journal of Symbolic Logic. — 1995. — 60 (4). — P. 1208–1241.
5. Plisko V. Primitive recursive realizability and basic propositional logic // Utrecht University, Logic Group Preprint Series. — 2007. — 261. — 27 p.
6. Плиско В.Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул // Известия АН СССР, Серия математика. — 1983. — т. 47, № 2. — С. 315–334.

О САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ СВЕТОФОРОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ БЕСПЕРЕВОЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРАНСПОРТА

А. К. Муравьев (Москва)

Рассматривается следующая кооперативная игра. Дана прямоугольная сетка с m столбцами и n строками (см. рис. 1). Назовем ее *решеткой* или *полем*.

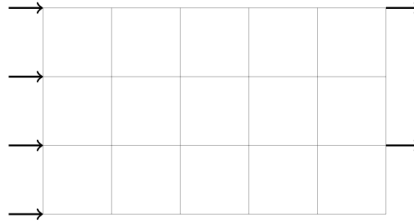


Рис. 1: Схема игры

Ребра решетки — дороги, по которым могут двигаться автомобили. Каждое ребро вмещает лишь один автомобиль.

На левой границе поля — $n + 1$ *вход*, куда могут заезжать автомобили. Присвоим им номера от 0 до n с порядком нумерации снизу вверх.

Игра происходит в дискретные моменты времени. В каждый такт времени случайно с одинаковой вероятностью выбирается u входов без повторений, и в них заезжает по 1 автомобилю. За один такт времени автомобиль перемещается с ребра, на котором находится, на какое-то другое ребро, имеющее с первым общую вершину.

Перед началом игры выбирается $u < (n + 1)$ узлов на правой границе поля, которые объявляются *выходами*. Автомобиль, приезжающий в выходной узел, исчезает и считается доставленным.

В каждом узле поля устанавливается *светофор*, регулирующий движение автомобилей через этот узел. По каждой из горизонтальных дорог движение организовано исключительно от входов к выходам (слева направо), а по вертикальным — либо вверх, либо вниз. Соответственно, светофор в каждый такт времени выбирает одно из входящих в него направлений (сверху, снизу или слева), переключает свой сигнал в какое-то выходное направление (вверх, вниз или вправо), и пропускает автомобиль в данном направлении.

При этом допустим, что светофорам на i -й снизу горизонтальной полосе на переключение необходимо $\frac{i}{n+2}$ времени. Такое допущение

позволит разрешать конфликты, связанные с порядком переключения светофоров, и тем самым получить лавинообразную смену логики пропуска, в которой нижние светофоры будут «ведущими», а светофоры, находящиеся сверху от них — «ведомыми». При этом каждый светофор переключается за один такт игры. Подобный подход использовался в [1] (с. 152) для разрешения спорных ситуаций при параллельном обходе информационного графа несколькими вычислителями в модели параллельных алгоритмов поиска.

Если на выбранном выходном направлении на ближайшем к светофору ребре уже стоит автомобиль, и его не пропускает следующий светофор, то и текущий светофор не может пропустить автомобиль в выбранном направлении, и автомобиль стоит на этом светофоре в ожидании пропуска.

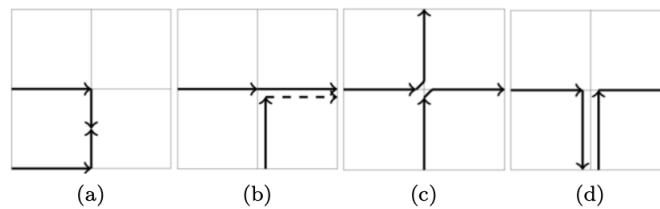


Рис. 2: (a) — столкновение, (b) — задержка, (c, d) — допустимые схемы одновременного проезда

Столкновением назовем ситуацию, когда два светофора, находящиеся на одном и том же ребре решетки, выпустили автомобили на это ребро с противоположных сторон (рис. 2(a)).

Задержкой автомобиля на светофоре назовем ситуацию, когда на светофор с нескольких сторон одновременно приехали автомобили, и он их направляет в одну и ту же сторону, в следствие чего один из автомобилей проезжает на текущем такте времени, заставляя другой в течение этого такта стоять на месте и ждать (рис. 2(b)). При этом будем считать, что задержек не возникает, если автомобили одновременно приезжают на светофор, и светофор их направляет по разным выходным направлениям (рис. 2(c, d)). Аналогом данной ситуации в реальной жизни является организация движения на нерегулируемых перекрестках, где при проезде одновременно двух автомобилей из разных въездов в разные выезды они одновременно выезжают на перекресток, один из них пропускает другого, и оба завершают маневр практически одновременно.

Затором назовем ситуацию, когда входной светофор не может

пропустить автомобиль в выбранном им направлении из-за задержки автомобиля на нем.

Цель игры — организовать проезд автомобилей на выходы таким образом, чтобы при любой длительности игры не создавалось заторов и столкновений. При этом игроками считаются светофоры, регулирующие проезд автомобилей через соответствующие вершины, а длина поля m полагается параметром игры, который выбирается изначально в зависимости от n , u .

Будем считать, что в светофорах находятся *автоматы*, имеющие конечное число состояний, каждое из которых определяет некоторую стратегию пропуска автомобилей через него. Входными данными каждого автомата являются ситуация по въезжающим на него и выезжающим с него автомобилям, а так же состояния и аналогичные показатели со светофоров в некоторой его окрестности.

Требуется определить структуру автоматов таким образом, чтобы в процессе игры каждый из светофоров перешел в некоторое финальное для него состояние, либо замкнулся в некотором множестве финальных состояний, переходя в течение дальнейших тактов времени между ними, но не выходя за границы этого множества, а система всех светофоров в финальных состояниях обеспечивала проезд автомобилей со случайных входов на выходы без заторов и столкновений. Тем самым получим самоорганизующуюся систему проезда.

Теорема. *Для любых n , $u < (n + 1)$ и $m \geq (n + u - 1)$ существуют конфигурации автоматов для светофоров с $O(u)$ состояниями и окрестностью видимости радиуса 2, приводящие к самоорганизации сколь угодно длительного проезда автомобилей с u случайных входов на u определенных выходов сети без заторов и столкновений.*

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

1. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. — М.: Физматлит, 2002.

ОБ ОПИСАНИИ КЛАССА ФУНКЦИЙ РОСТА РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА

А. С. Строгалов (Москва)

Пусть $L \subseteq A^*$ — регулярный (автоматный) язык [1] над алфавитом $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $|A| \geq 2$. Представим его в виде: $L = \bigcup_{\tau=1}^{\infty} L(\tau)$, где $L(\tau)$ — множество всех слов длины τ в языке L .

Далее будем рассматривать только бесконечные языки, содержащие конечные слова неограниченной длины.

Определение. Отображение $f_L(\tau) = |L(\tau)|$, $\tau = 1, 2, \dots, n, \dots$ называется функцией роста языка L .

Если f_L ограничена сверху некоторым полиномом от τ , то говорим, что язык L (соответственно f_L) имеет полиномиальный тип.

В работе [2] доказан следующий критерий.

Теорема. *Функция роста f_L регулярного языка имеет полиномиальный тип тогда и только тогда, когда через любую вершину пути в диаграмме автомата распознающего язык L , ведущего из начального состояния в финальное состояние, нет вершин, через которые проходило бы два различных цикла.*

В работе [3] получены следующие результаты:

Теорема 1. *Для любого неотрицательного целочисленного полинома $P_s(\tau)$ существует такое натуральное число l и регулярный язык L , что при $\tau \geq l$ $f_L(\tau) = P_s(\tau)$.*

Многочлен $P_s(\tau)$ является неотрицательным целозначным полиномом (н.ц.п.) если при любом $\tau \in \mathbb{N}$ значение $P_s(\tau)$ тоже является натуральным числом.

При отсутствии ограничения на число элементов входного алфавита A теорему 1 можно усилить.

Теорема 2. *Для любого н.ц.п. $P_s(\tau)$ существует регулярный язык L такой, что при $f_L(\tau) = P_s(\tau)$ при $\tau = 1, 2, \dots, n, \dots$.*

Частным случаем языков полиномиального типа являются константно-ограниченные языки — для них существует константа C_L (зависящая от языка L , но не зависящая от τ) такая, что при любом $\tau \in \mathbb{N}$ выполняется $f_L(\tau) \leq C_L$.

Теорема 3. *Класс функций роста константно-ограниченных регулярных языков совпадает с множеством всех почти-периодических функций $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Заметим, что уже из теоремы 3 следует, что класс функций роста регулярных языков полиномиального роста шире класса всех

н.ц.п. Например, регулярный язык L , который содержит ровно одно слово длины τ , если $\tau \equiv 0 \pmod k$, является константно ограниченным языком ($C_L = 1$), но при этом его функция роста $f_L(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \equiv 0 \pmod k \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ не является полиномом нулевой степени (константой). Здесь k — любое фиксированное натуральное число.

Определение. Неотрицательным целозначным квазиполиномом $P_s^{\text{кв}}(\tau)$ называется выражение вида $p_0(\tau)\tau^s + p_1(\tau)\tau^{s-1} + \dots + p_s(\tau)$, где каждое $p_i(\tau)$ есть периодическая последовательность целых чисел, причем $P_s^{\text{кв}}(\tau)$ при любом $\tau \in \mathbb{N}$ принимает натуральное значение; $p_0(\tau) \not\equiv 0$, число s является степенью квазимногочлена.

Конструкцию из работы [3] можно распространить на квазимногочлен. Для этого вместо семейства автоматов, распознающих языки $\{0\}^* \cdot \{1\} \cdot \{0\}^* \cdot \{1\} \cdot \dots \cdot \{1\} \cdot \{0\}^*$ (в этой формуле $k \geq 0$ единиц, " $*$ " и " $\cdot$ " — операции итерации и, соответственно, конкатенации [1]), надо взять семейство автоматов, распознающих языки $\{0^l\}^* \cdot \{1\} \cdot \{0^l\}^* \cdot \{1\} \cdot \dots \cdot \{1\} \cdot \{0^l\}^*$. Здесь так же $k \geq 0$ единиц, и $l \geq 1$ — длина циклов в итерационных скобках. Варьируя k и l мы получаем нужное нам семейство автоматов для представления языка, имеющего функцию роста в виде квазимногочлена. Тем самым верны следующие аналоги теорем 1 и 2.

Теорема 4. Для любого н.ц. квазиполинома $P_s^{\text{кв}}(\tau)$ существует такое натуральное число l и регулярный язык L , что $f_L(\tau) = P_s^{\text{кв}}(\tau)$ при $\tau \geq l$.

Если ограничения на число элементов входного алфавита A отсутствуют, то верна

Теорема 5. Любой н.ц. квазиполином является функцией роста некоторого регулярного языка.

Кратко приведем некоторые соображения, позволяющие доказать, что любая функция роста регулярного языка полиномиального типа является квазиполиномом. Для этого надо рассмотреть производящую функцию для последовательности $\{f_L(\tau)\}$ и заметить, что

коэффициенты ряда $\sum_{\tau=1}^{\infty} f_L(\tau)x^\tau$ являются числами из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Кроме

того, в силу того, что язык полиномиального типа, рост $f_L(\tau) \leq c \cdot \tau^s$, где $s \in \mathbb{N}$ и, следовательно, этот ряд имеет радиус сходимости не меньше 1. Тогда из теоремы 6.2.1 [4, стр. 172-173] и теоремы 4.4.1 [5, стр. 312] следует, что $f_L(\tau)$ является квазимногочленом. Таким образом, из теоремы 5 настоящей работы с использованием изложенных выше соображений доказывается следующая теорема 6.

Теорема 6. *Класс функций роста регулярных языков полиномиального типа совпадает с множеством всех неотрицательных целозначных квазиполиномов.*

Список литературы

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М.: Изд-во МГУ, 2019.
2. Строгалов А.С. Об ε -моделировании конечных автоматов // Труды Всесоюзного семинара по дискретной математике — М.: Изд-во МГУ, 1986.
3. Строгалов А.С. О регулярных языках с полиномиальным ростом числа слов // Дискретная математика. — 1990. — Т.2, вып. 3.
4. А. Биберах. Аналитическое продолжение. — М.: Наука, 1967.
5. Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.

Секция «Дискретная геометрия»

ДИСКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ асм-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КОСИМПЛЕТИЧЕСКОГО ТИПА КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. Б. Банару (Смоленск)

В эрмитовой геометрии (или геометрии почти эрмитовых многообразий) нашли приложения различные разделы дискретной математики. Например, относительно недавно несколько испанских специалистов с помощью теории графов получили ряд принципиально новых результатов [1, 2]. А. Карриазо, Л. М. Фернандес и А. Родригес-Идальго показали, что в локальном смысле всякое подмногообразие почти эрмитова многообразия допускает ассоциацию с некоторым графом [2]. Конструкция такой ассоциации установлена А. Карриазо и Л. М. Фернандесом в [1].

Другим содержательным и интересным приложением дискретной математики в теории почти эрмитовых многообразий является характеристика Такадзи-Курихары гиперповерхностей этих многообразий [3, 4]. В данной работе рассматривается именно такая характеристика почти контактных метрических гиперповерхностей косимплектического типа келеровых многообразий.

Известно [5], что почти контактной метрической (almost contact metric, *асм*-) структурой на нечетномерном ориентируемом многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, удовлетворяющая условиям:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1, 1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\mathfrak{X}(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N .

Около десяти лет назад В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур —

структуру косимплектического типа [6]. Она определяется как *аст*-структура с замкнутой контактной формой.

Основным свойством почти контактной метрической структуры косимплектического типа является ее инвариантность относительно канонических конформных преобразований [6]. Тривиальный пример структуры косимплектического типа — естественно, косимплектическая структура, а самым важным нетривиальный пример — структура Кенмоцу [5], которая вместе с ее различными обобщениями является, пожалуй, одной из самых популярных тем исследований в области почти контактных метрических структур на многообразиях.

Оказывается, результаты А. Карриазо, Л.М. Фернандеса и А. Родригеса-Идальго можно применить и к изучению *аст*-гиперповерхностей косимплектического типа келеровых многообразий. Нами получен такой результат:

Теорема 1. *Граф Карриазо–Фернандеса ассоциируется (в локальном смысле) со всякой почти контактной метрической гиперповерхностью косимплектического типа келерова многообразия M^{2n} , $n \geq 3$.*

Еще один результат имеет отношение к характеристике Такаджи–Курихары *аст*-гиперповерхностей косимплектического типа келеровых многообразий.

Теорема 2. *Типовое число гиперповерхности келерова многообразия M^{2n} , $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, является четным в том и только том случае, если гиперповерхность является минимальной.*

Первая теорема обобщает результат, полученный для *аст*-гиперповерхностей 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [7], а вторая — для гиперповерхностей Кенмоцу специальных эрмитовых многообразий [8].

Список литературы

1. Carriazo A., Fernandez L.M. Submanifolds associated with graphs // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — V. 132(11). — P. 3327–3336.
2. Carriazo A., Fernandez L.M., Rodriguez-Hidalgo A. Submanifolds weakly associated with graphs // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — V. 119, no. 3. — P. 297–318.
3. Банару М.Б. О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 357–364.

4. Банару М. Б. О типовых числах почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». — М: МГУ, 2004. — С. 379–381.
5. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.
6. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 838–850.
7. Банару М. Б., Банару Г. А. Приложения теории графов в геометрии 6-мерных почти эрмитовых многообразий // Проблемы теоретической кибернетики. XVIII Международная конференция (под ред. Ю. И. Журавлева). — М.: МАКС-Пресс, 2017. — С. 42–44.
8. Банару М. Б. О типовых числах гиперповерхностей Кенмоцу и Сасаки в специальных эрмитовых многообразиях // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» им. академика О. Б. Лупанова. — М: МГУ, 2016. — С. 349–351.

ОРБИФОЛДЫ, ПОПОЛНЯЮЩИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ НА ДОПОЛНЕНИИ К ЗАЦЕПЛЕНИЮ УАЙТХЕДА

И. С. Гуцул (Кишинев)

Гиперболическая структура на дополнении трехмерной сферы к зацеплению Уайтхеда изучалась во многих работах. Однако орбифолды, связанные с этой гиперболической структурой почти не рассматривались. В данной работе мы восполним этот пробел. Геометрически указанная структура получается отождествлением граней правильного октаэдра в пространстве Лобачевского. Причем, все вершины октаэдра являются бесконечно удаленными точками, т.е. лежат на абсолюте, но объем октаэдра конечен. Если мы начнем деформировать такой октаэдр, то многообразие, получаемое с помощью этого октаэдра, становится неполным, но

его можно пополнять. При пополнении мы получаем как многообразия, так и орбифорды. Нас будут интересовать, так называемые прямые орбифорды. Обозначим бесконечно удаленные вершины искомого октаэдра цифрами 1,2,3,4,5,6. Отождествим его грани по следующей схеме (см.рис. 1) $(1, 2, 5)\varphi_1(4, 3, 5)$; $(2, 3, 6)\varphi_2(1, 4, 6)$ $(2, 3, 5)\varphi_3(1, 2, 6)$; $(1, 4, 5)\varphi_4(4, 3, 6)$.

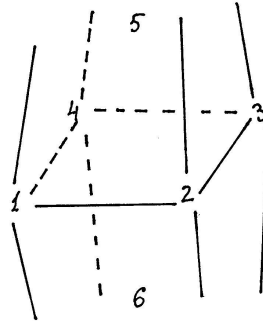


Рис. 1:

Здесь φ_1, φ_2 - орисферические повороты (параболические преобразования) вокруг вершин 5 и 6, а φ_3, φ_4 - винтовые движения (локсодромические преобразования). Тогда, если октаэдр правильный, то группа Γ , порожденная движениями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, — это группа без неподвижных точек. Факторизация H^3 по Γ дает гиперболическое 3-многообразие конечного объема. Если мы деформируем октаэдр к виду (см. рис. 2), то получим континуальную серию орбифолдов. Соответствующий этой серии орбифолдов фундаментальный многогранник R_α также приведен на рис. 2.

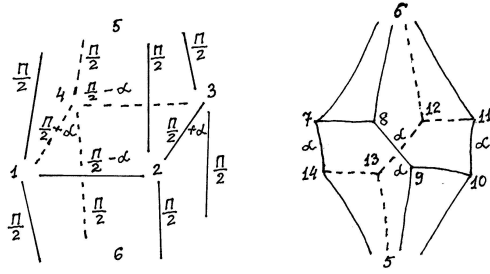


Рис. 2:

Все неотмеченные двугранные углы многогранника R_α равны $\pi/2$. Грани многогранника R_α будут отождествлены по следующей схеме:

$(5, 14, 7, 8, 9) \varphi_1 (5, 13, 12, 11, 10)$; $(6, 8, 9, 10, 11) \varphi_2 (6, 7, 14, 13, 12)$;
 $(5, 9, 10) \varphi_3 (6, 7, 8)$; $(5, 14, 13) \varphi_4 (6, 12, 11)$.

Движения, отождествляющие грани многогранника R_α , метрически совпадают с движениями, отождествляющими грани октаэдра O_α . Но дискретные группы $\Gamma_{1\alpha}$ получим только в счетном числе случаев, когда $\alpha = \pi/2k$.

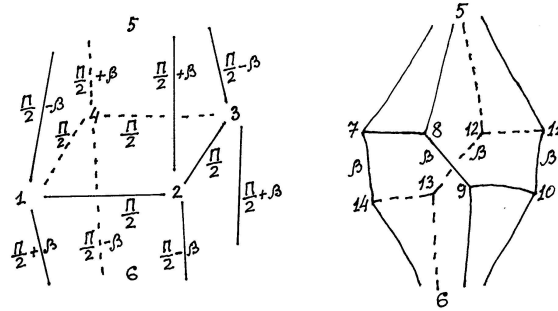


Рис. 3:

Если мы деформируем октаэдр к виду на рис. 3, то получим дру-

гую непрерывную серию орбифолдов. Соответствующий многогранник P_β , пополняющий эту структуру, также приведен на рис. 3, где все двугранные углы многогранника P_β (кроме указанных) равны $\pi/2$.

Грани многогранника P_β будут отождествлены по следующей схеме:

$(5, 7, 8) \varphi_1 (5, 12, 11); (6, 9, 10) \varphi_2 (6, 14, 13);$
 $(5, 8, 9, 10, 11) \varphi_3 (6, 14, 7, 8, 9); (5, 7, 14, 13, 12) \varphi_4 (6, 13, 12, 11, 10)$

Движения, отождествляющие грани многогранника P_β , метрически совпадают с движениями, отождествляющими грани октаэдра O_β . Но дискретные группы $\Gamma_{1\beta}$ мы получим только в счетном числе случаев, когда $\beta = \pi/2m$. Группы $\Gamma_{1\alpha}$ и $\Gamma_{1\beta}$ порождаются отождествлениями граней одного и того же многогранника, но они не изоморфны и потому метрически различны.

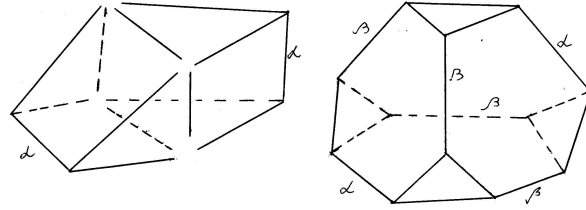


Рис. 4:

На рис. 4 приведены еще два многогранника, которые являются фундаментальными многогранниками для четырех счетных серий орбифолдов. Все неотмеченные двугранные углы этих многогранников являются прямыми.

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЗОВЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ 3–МНОГООБРАЗИЙ

Ф. Л. Дамиан (Кишинев)

В. С. Макаров, П. В. Макаров (Москва)

Симметрические 3-подмногообразия гиперболического 4-многообразия Дэвиса [1, 2] послужили толчком к исследованию некоторых икосаэдрических гиперболических многообразий с вполне геодезическим краем [3], для которых краем является платонова поверхность рода 4. Эту поверхность описывают инциденции 2-граней большого звездного додекаэдра $\{5, 5/2\}$, если игнорировать самопересечения. Напомним, что в [3] многообразия с таким краем строились из ортогонально усеченных ромбического триаконтаэдра и икосаэдра. Если эти фундаментальные многогранники разрезать на равные многогранники призматического типа и собрать их над платоновой картой края, то мы получим два «многогранника», схема отождествления граней которых перенесена с указанных выше многогранников. Они аналогичны бесконечным эквидистантным многогранникам (в данном случае правильным, см. напр. [4]), которые строились над гиперболической плоскостью. Конечные линзовые многогранники – это эквидистантные многогранники над компактной римановой поверхностью.

С другой стороны, построение этих же примеров можно было бы начать с образования конечного «линзового» многогранника [5]: берется прямое произведение поверхности на отрезок и полученный объект ограняется в соответствии с одной из платоновых карт базы. При таком подходе многообразие из ортогонально усеченного ромбического триаконтаэдра получается как линзовый полиэдр с двугранными углами $2\pi/3$ над картой $\{4, 5\}$. Многообразие из ортогонально усеченного икосаэдра представлено линзой над картой $\{5, 5\}$ (в дуальном ее положении) и схемой отождествления, перенесенной с многообразия Зейферта-Вебера [6], посредством правильного звездного многогранника $\{5, 5/2\}$, образуя несущественные циклы ребер по три (при значении двугранного угла $2\pi/3$). В обоих примерах плоскости «верхних» граней, инцидентных одной вершине, принадлежат эллиптической связке. Если через многогранник $\{5, 5/2\}$ перенести схему отождествления сферического пространства додекаэдра Пуанкаре [6] на карту $\{5, 5\}$ в базе, то в циклах собирается по пять ребер. Следовательно, для несущественности циклов значение двугранного угла должно достичь $2\pi/5$ [5, 7]. Вершины линзового многогранника в этом случае уйдут за абсолют и они могут

быть ортогонально усечены. В результате этих операций (усечения и отождествления) образуется новая компонента края, идентичная базе. Также отметим, что плоскости граней, определявших вершину, принадлежат гиперболической связке.

На рассматриваемой поверхности рода 4, кроме платоновых карт $\{5, 5\}$ и $\{4, 5\}$, имеется еще карта $\{5, 4\}$. Для случая, когда вершины линзового многогранника на абсолюте (параболический случай), мы будем использовать в базе карту $\{5, 4\}$ на той же метрической поверхности. У такого линзового многогранника с бесконечно удаленными вершинами все двугранные углы прямые. Его границу можно окрасить в шахматном порядке и тогда любое парное отождествление «белых» граней дает геодезическую границу из «черных» граней.

Мы остановились на самых симметричных схемах отождествления для параболического случая [7]. Если воспользоваться опосредованно через звездный многогранник $\{5, 5/2\}$ схемой отождествления «белых» граней, по принципу проективной плоскости, то «черные» грани образуют шесть идентичных компонент края, которые являются сферами с пятью каспами. Если применить схему отождествления, перенесенную с многообразия Пуанкаре, то граница из «черных» граней окажется однокомпонентной и будет представлена схемой инцидентий граней звездного многогранника $\{5, 5/2\}$ со всеми вершинами на абсолюте. Наконец, при использовании схемы отождествления Зейферта-Вебера (через многогранник $\{5, 5/2\}$) граница получаемого многообразия также однокомпонентная, но комбинаторно представлена многогранником $\{5, 3\}$ со всеми вершинами на абсолюте. Отметим, что во всех случаях образующаяся граница вполне геодезическая.

Для шести гиперболических многообразий с геодезическим краем коразмерности один, полученных из эквидистантных многогранников над поверхностью рода 4, допускающих правильные карты типа $\{4, 5\}$ (эллиптический случай, один пример), $\{5, 5\}$ (эллиптический случай – один пример, гиперболический случай – один пример), и $\{5, 4\}$ (параболический случай, три наиболее симметричных примера), были оценены группы изометрий. Для эллиптического случая порядок группы изометрий двух 3-многообразий равен 240 и 60, для гиперболического случая порядок группы изометрий 3-многообразия не менее 120 (3-многообразие содержит две идентичные компоненты края), для двух примеров в параболическом случае (когда «верхний» край однокомпонентный) порядок групп изометрий этих 3-многообразий не менее 120, для третьего (когда «верхний» край

имеет шесть компонент) порядок не менее 60. В заключение отметим, что все эти примеры сохраняют икосаэдрическую симметрию несмотря на то, что компоненты края для разных примеров сильно различаются.

Во всех рассмотренных случаях можно взять по два одинаковых экземпляра линзовых многообразий и склеить их по идентичным компонентам края. В результате мы получим полные гиперболические многообразия без границы, но количество различных многообразий будет зависеть от порядка группы симметрии каждой компоненты края. Так как возможностей комбинирования различных многообразий и способов устранения геодезических краев огромное множество то, следовательно, можно строить счетные серии новых гиперболических многообразий конечного объема.

Список литературы

1. Davis M. W. A hyperbolic 4-manifold // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 93, no. 2. — P. 325–328.
2. Дамиан Ф. Л. К построению гиперболических четырехмерных многообразий // Геометрия дискретных групп. Математические исследования. Вып. 119. — Кишинев: Штиинца. — 1990. — С. 79–84.
3. Дамиан Ф. Л., Макаров В. С. О трехмерных гиперболических многообразиях с икосаэдрической симметрией // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. — 1995. — № 1 (77). — С. 82–89.
4. Макаров В. С. Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1983. — 1 (5). — С. 3–59.
5. Damian F., Makarov V. S. On lens polytopes // International Seminar on Discrete Geometry. State Univ. Moldova, Chisinau. — 2002. — P. 32–35.
6. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.Л.: ГТТЛ, 1938. — 400 с.
7. Дамиан Ф. Л., Макаров В. С., Макаров П. В. Гиперболические линзовы 3-многообразия над платоновой поверхностью $\{5, 5\}$ рода 4 // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» им. Акад. О.Б.Лупанова. МГУ, Москва. — 2016. — С. 351–354.

КОМБИНАТОРИКА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВ ТРЁХМЕРНЫХ МНОГОГРАНИКОВ: ФУЛЛЕРЕНЫ И МНОГОГРАННИКИ А.В. ПОГОРЕЛОВА

Н. Ю. Ероховец (Москва)

Многогранником мы называем комбинаторный 3-мерный выпуклый многогранник. *k-пояс* — это циклическая последовательность граней, в которой смежны последовательные грани и только они и никакие 3 грани не пересекаются. Простой многогранник, отличный от симплекса Δ^3 , *циклически рёберно k-связен (ск-связен)*, если у него нет *l-поясов*, $l < k$. Он *сильно ск-связен (с*k-связен)*, если, кроме того, любой *k-пояс* окружает грань. По определению Δ^3 *с*3-*, но не *с4-*связен. Имеем цепочку семейств:

$$\mathcal{P}_s \supset \mathcal{P}_{aflag} \supset \mathcal{P}_{flag} \supset \mathcal{P}_{aPog} \supset \mathcal{P}_{Pog} \supset \mathcal{P}_{Pog^*}$$

Все простые многогранники (семейство $\mathcal{P}_s$) *с3-*связны, но не более чем *с*5-*связны. Семейство *с4-*связных многогранников $\mathcal{P}_{flag}$ совпадает с *флаговыми* многогранниками, у которых любой набор попарно смежных граней пересекается. Семейство *с*3-*связных многогранников $\mathcal{P}_{aflag}$ мы называем *почти флаговыми*. Из результатов А.В. Погорелова (1967) и Е.М. Андреева (1970) следует, что *с5-*связные многогранники (семейство $\mathcal{P}_{Pog}$) являются в точности *многогранниками Погорелова*, т.е. реализуются в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ ограниченными многогранниками с прямыми двугранными углами. Реализация единственна с точностью до изометрии. При этом флаговые многогранники реализуются в $\mathbb{L}^3$ с одинаковыми нетупыми двугранными углами. В $\mathcal{P}_{Pog}$ лежат *k-бочки* B_k , $k \geq 5$, поверхность которых склеена из двух дисков — *k-угольников*, окружённых поясом из 5-угольников. Из результатов Т. Döslíć (1998, 2003) следует, что в $\mathcal{P}_{Pog}$ лежат *фуллерены* — простые многогранники только с 5- и 6-угольными гранями. Семейство *с*4-*связных многогранников $\mathcal{P}_{aPog}$ мы называем *почти погореловскими*, а *с*5-*связных $\mathcal{P}_{Pog^*}$ — *сильно погореловскими*. Дж. Д. Биркгоф (1913) свёл проблему 4 красок к семейству $\mathcal{P}_{Pog^*}$. Т. Е. Панов заметил, что из результатов Андреева должно следовать, что $\mathcal{P}_{aPog}$ отвечает прямоугольным многогранникам конечного объема. У них вершины на абсолюте имеют валентность 4, остальные — 3.

Теорема 1 ([2]). *Срезка 4-валентных вершин устанавливает биекцию между комбинаторными типами прямоугольных много-*

гранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$ и почти погореловскими многогранниками, отличными от куба I^3 и 5-угольной призмы $M_5 \times I$.

Пусть P — простой многогранник. В. Эберхард (1891) показал, что P получаются из Δ^3 срезками вершин (0-усечениями), рёбер (1-усечениями) и пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6-сторонами (2-усечениями).

Утверждение ([2]). $P \in \mathcal{P}_{aflag} \Leftrightarrow P$ получается из Δ^3 с не более чем двумя срезанными вершинами 0-, 1- и 2-усечениями, не эквивалентными срезке вершины 3-угольника $\Leftrightarrow P$ получается срезкой набора вершин симплекса или флагового многогранника.

Из результатов А. Kotzig (1969) следует, что $P \in \mathcal{P}_{flag} \Leftrightarrow P$ получается из куба 1- и 2-усечениями. Пусть As^3 — куб с тремя срезанными дизъюнктивными попарно ортогональными рёбрами. Из результатов D. Barnette (1974) следует, что $P \in \mathcal{P}_{aPog} \setminus \{I^3, M_5 \times I\} \Leftrightarrow P$ получается из As^3 1- и 2-усечениями, не эквивалентными срезке ребра 4-угольника. В отличие от класса $\mathcal{P}_{flag}$, не любой 4-угольник в $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ получается срезкой ребра многогранника из $\mathcal{P}_{aPog}$. Однако, если в P есть 4-угольники, то хотя бы один из них так получается. Паросочетание многогранника — это дизъюнктивный набор его рёбер. Совершенное паросочетание покрывает все вершины. Пусть P_8 — куб с двумя срезанными несмежными ортогональными рёбрами.

Теорема 2 ([2]). Любой многогранник $P \in \mathcal{P}_{aPog} \setminus \{I^3, M_5 \times I\}$ получается срезкой паросочетания многогранника из $\mathcal{P}_{aPog} \sqcup \{P_8\}$, производящей все 4-угольники.

Многогранник в $\mathbb{L}^3$ называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте. Он имеет конечный объём.

Следствие. [2] Любой идеальный прямоугольный многогранник получается из некоторого многогранника из $\mathcal{P}_{aPog} \sqcup \{P_8\}$ стягиванием рёбер совершенного паросочетания.

Скручивание рёбер изображено на рис. 1. Два ребра слева принадлежат одной грани и не пересекаются. Назовём скручивание *крайним*, если рёбра смежны с одним ребром. В обзоре А. Ю. Веснина (2017) сопоставлением известных результатов было показано, что любой идеальный прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^3$ получается из некоторой k -антипризмы, $k \geq 3$, скручиваниями рёбер.

Теорема 3 ([2]). Многогранник реализуется как идеальный прямоугольный $\Leftrightarrow$ он либо является k -антипризмой, $k \geq 3$, либо получается из 4-антипризмы операциями крайнего скручивания ребер.

Гипотеза. Скручивание рёбер увеличивает объём в $\mathbb{L}^3$.

При $k \geq 5$ k -бочка лежит в $\mathcal{P}_{Pog^*}$. Из результатов D. Barnette

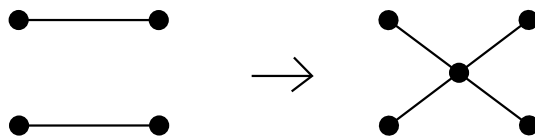


Рис. 1: Операция скручивания рёбер.

(1974,1977), J. W. Butler (1974) и работы [1] следует, что отличный от них многогранник принадлежит $\mathcal{P}_{Pog}$ $\Leftrightarrow$ он получается из 5- или 6-бочки 2-усечениями и связными суммами с 5-бочкой (рис. 2), и классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$ $\Leftrightarrow$ он получается из 6-бочки 2-усечениями. Т. Inoue (2008) показал, что обе операции увеличивают объем в $\mathbb{L}^3$. (5,0)-нанотрубки получаются из 5-бочки связной суммой с 5-бочками вдоль 5-угольников, окруженных 5-угольниками. Остальные фуллерены принадлежат $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

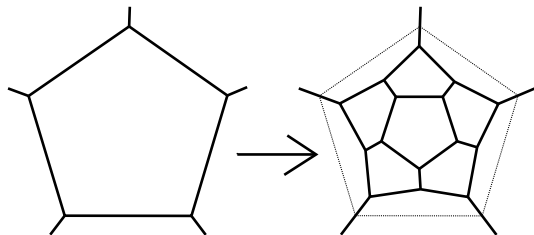


Рис. 2: Связная сумма с 5-бочкой.

Теорема 4 ([1]). *Фуллерен, отличный от 5-бочки и (5,0)-нанотрубок, получается из 6-бочки 2-усечениями так, что промежуточные многогранники имеют 5-,6- и не более одной 7-угольной грани, причём она должна граничить с 5-угольником.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-а и 18-51-50005-ЯФ-а

Список литературы

1. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 5. — С. 15-91.
2. Ероховец Н. Ю. Трехмерные прямоугольные многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции // Тр. МИАН. — 2019. — Т. 305. (в печати).

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЭДРИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ СДВИГОВ РОДА ДВА

Е. А. Заморзаева (Кишинев)

Группа $p1$ параллельных переносов евклидовой плоскости является одной из 17 двумерных федоровских групп. Все изоэдрические разбиения евклидовой плоскости известны. Для группы $p1$ имеется 2 комбинаторно-топологических типа, как и 2 сорта Делоне изоэдрических разбиений евклидовой плоскости на диски. При условии выпуклости дисков это разбиения на параллелограммы и на центрально-симметричные шестиугольники. Группа $p1$ имеет символ орбифолда $\circ$ (один кружочек).

На плоскости Лобачевского имеется бесконечная серия дискретных групп сдвигов с компактной (конечной) фундаментальной областью. Каждая группа серии характеризуется родом многообразия, полученного факторизацией плоскости Лобачевского по этой группе. Символ орорбифолда для такой группы $\circ \circ \cdots \circ$, где число кружочков равно роду группы. Наименьший род группы сдвигов равен 2, таким образом гиперболическая группа сдвигов рода 2 с символом орбифолда $\circ \circ$ является самой простой гиперболической группой сдвигов.

Изоэдрические разбиения евклидовой плоскости на диски были получены несколькими авторами с помощью разных методов. Мы используем методы, аналогичные методам Б. Н. Делоне [1, 2]. Заметим, что методы, примененные в [3], здесь не работают, они дают только малую часть из всех изоэдрических разбиений для гиперболической группы сдвигов.

Определение 1. Пусть W — разбиение плоскости Лобачевского на диски, G — дискретная группа движений плоскости Лобачевского с конечной (компактной) фундаментальной областью. Разбиение W называется изоэдрическим относительно группы G , если группа G отображает разбиение W на себя и транзитивно действует на совокупности дисков разбиения.

Определение 2. Рассмотрим всевозможные пары (W, G) , где W — разбиение плоскости Лобачевского на диски, изоэдрическое относительно дискретной группы G движений с конечной фундаментальной областью. Две пары (W, G) и (W', G') относятся к одному сорту Делоне, если существует гомеоморфное преобразование φ плоскости, отображающее разбиение W на разбиение W' и такое, что выполняется соотношение $G = \varphi^{-1}G'\varphi$.

Определим элементы дисков разбиения. Непустая связная компонента пересечения двух или более разных дисков разбиения на-

зывается вершиной разбиения, если она является одной точкой, и называется ребром разбиения в противном случае.

Сорт Делоне (W, G) называется основным, если группа G действует один раз транзитивно на множестве дисков разбиения W . Группа сдвигов допускает только основные сорта Делоне.

Таким образом, мы ищем все основные сорта Делоне изоэдрических разбиений плоскости Лобачевского на диски для группы сдвигов рода 2.

Следуя схеме работы [1], мы сначала решаем диофантовы уравнения, полученные из теоремы Эйлера. Для разбиения на поверхности рода g , имеющего N_0 вершин, N_1 ребер и N_2 дисков, формула Эйлера записывается так: $N_0 - N_1 + N_2 = 2(1 - g)$. В изоэдрическом разбиении каждый диск имеет один и тот же цикл кратностей вершин: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Если число i встречается в этом цикле q_i раз, то диофантово уравнение имеет вид

$$\sum \frac{q_i}{i} = \frac{k}{2} - 3.$$

Дополнительные условия: $i \geq 3$, $6 < k \leq 18$, k — четное число.

Найдены следующие решения диофантовых уравнений: при $k = 18$ все 3, при $k = 16$ двенадцать 3 и четыре 4, при $k = 14$ A: девять 3 и пять 5, B: шесть 6 и восемь 8, при $k = 12$ A: шесть 3 и шесть 6, B: три 3, четыре 4 и пять 5, C: все 4, при $k = 10$ A: три 3 и семь 7, B: четыре 4 и шесть 6, C: все 5, при $k = 8$ все 8.

Далее к упорядоченным циклам кратностей вершин, полученным из вышеуказанных решений, применены введенные Б.Н. Делоне символы смежности и диаграммы смежности [1, 2]. Сначала генерируем всевозможные символы смежности с учетом того, что все движения группы являются сдвигами. Для каждого кандидата в символы смежности мы проверяем условие обхода вокруг вершины для каждого класса эквивалентности вершин. Затем с помощью диаграмм смежности выявляем символы смежности, соответствующие одному и тому же сорту Делоне.

Следующая теорема объединяет результаты, подробно описанные в [4, 5].

Теорема. *Для группы сдвигов рода два имеется 119 сортов Делоне изоэдрических разбиений плоскости Лобачевского на диски, а именно 4 сорта с 8-угольниками, 18 сортов с 10-угольниками, 31 сорт с 12-угольниками, 39 сортов с 14-угольниками, 21 сорт с 16-угольниками и 6 сортов с 18-угольниками.*

В работах [4, 5] для каждого сорта Делоне изоэдрического разбиения плоскости Лобачевского указан символ смежности, полностью

его задающий, а для некоторых сортов Делоне указаны также диаграммы смежности.

Список литературы

1. Делоне Б. Н. Теория планигонов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1959. — Т. 23. — С. 365–386.
2. Делоне Б. Н., Долбилин Н. П., Штогрин М. И. Комбинаторная и метрическая теория планигонов // Тр. Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1978. — Т. 148. — С. 109–140.
3. Lučić Z. and Molnár E. Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings // Geometriae Dedicata. — 1991. — Vol. 40. — P. 125–143.
4. Zamorzaeva E. Isohedral tilings by 8-, 10- and 12-gons for hyperbolic translation group of genus two // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. — 2018. — 2. — P. 74–84.
5. Zamorzaeva E. Isohedral tilings by 14-, 16- and 18-gons for hyperbolic translation group of genus two // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica (submitted).

О ПРОЕКЦИЯХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

М. Д. Ковалёв (Москва)

Поскольку конфигурационное пространство шарнирного механизма как и сам шарнирный механизм разные авторы понимают по разному, начнём с определения этих понятий.

Мы считаем наши механизмы составленными из стержней, несущих на своих концах шарниры. Структуру механизма задаём графом $G(V, E)$ [1] без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам (стержням). Граф $G(V, E)$ обладает вершинами двух видов: отвечающими неподвижным в механизме (закреплённым) шарнирам, и подвижным (свободным) шарнирам. И мы их будем называть закреплёнными и, соответственно, свободными.

На граф $G(V, E)$ шарнирного механизма, в отличие от авторов работ [2, 3], я накладываю ряд естественных условий. А именно: а) $G(V, E)$ связан, б) закреплённые вершины смежны лишь свободным,

в) подграф графа $G(V, E)$ на свободных вершинах связан, г) условие, вытекающее из подвижности в механизме всех свободных шарниров. Из него следует, например, что каждая свободная вершина смежна не более чем одной закреплённой. Граф $G(V, E)$, для которого выполнены все эти условия, я называю *шарнирной структурной схемой* (ШСС) механизма. Условия а), в) выделяют индивидуальный механизм, без них получается несколько механизмов, движущихся независимо один от другого. Условие б) вводится из-за того, что нет нужды задавать расстояния между закреплёнными шарнирами. Условие г) введено, чтобы исключить неподвижные шарниры из числа свободных.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) называем ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости. Пусть ЗШС имеет $m \geq 1$ свободных шарниров, и $r \geq 1$ рычагов. Тогда ЗШС отвечают евклидовы пространства параметров: R^{2m} — пространство положений свободных шарниров, и $\mathcal{R}^r$ — пространство квадратов длин рычагов. Пусть p_i — радиус вектор i -го шарнира в плоскости, d_{ij} — квадрат длины рычага, соединяющего смежные в графе $G(V, E)$ i -й и j -й шарниры. Ключевым для геометрии шарнирных конструкций является так называемое *рычажное отображение*: $F : R^{2m} \rightarrow \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $\{ij\} \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов. Точку $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in \mathcal{R}^r$ мы называем, придавая вполне определённый смысл термину и понятию кинематической схемы из теории механизмов, *кинематической шарнирной схемой* (КШС), а точку $\mathbf{p} = \{p_i\} \in R^{2m}$ — *шарнирником*. С инженерной точки зрения шарнирник есть либо определённое положение шарнирного механизма, либо шарнирная ферма. Неодноточечная компонента $K \subset R^{2m}$ связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ представляет собой множество всех положений или *конфигурационное пространство* шарнирного механизма. Таким образом, мы считаем *шарнирный механизм* конструкцией, которую можно непрерывно перевести из одного её положения в любое другое.

Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении называем *конфигурационным пространством КШС $\mathbf{d}$* . При таком подходе каждой компоненте связности множества $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое шарнирное устройство: механизм или ферма — в случае одноточечности компоненты. Заметим, что авторы работ [2, 3] называют множество $F^{-1}(\mathbf{d})$ конфигурационным пространством шарнирного механизма.

Алгебраическим множеством называют множество общих нулей

совокупности многочленов. В отличие от конфигурационного пространства КШС, конфигурационное пространство шарнирного механизма может не быть алгебраическим множеством. Замыканием по Зарисскому множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называем наименьшее вещественное алгебраическое множество, содержащее M . Подмножество $\mathbb{R}^n$ будем называть *неприводимым*, если его замыкание по Зарисскому неприводимо, и *приводимым* в противном случае. Так конфигурационное пространство шарнирного механизма неприводимо, если оно является одной из нескольких компонент связности максимальной размерности неприводимого конфигурационного пространства, отвечающей механизму КШС. В этом случае оно не является алгебраическим множеством.

Пусть $K \subset R^{2m}$ — конфигурационное пространство шарнирного механизма, а $\pi_i K$ — его проекция на плоскость положений шарнира p_i . $\pi_i K$ есть не что иное как множество положений шарнира p_i при всевозможных движениях механизма. *Полуалгебраическим множеством* называют конечное объединение множеств решений конечных систем полиномиальных уравнений и полиномиальных неравенств. Фундаментальным фактом является то, что проекция алгебраического множества есть множество полуалгебраическое (теорема Тарского–Зайденберга). Справедливы следующие теоремы.

Теорема. *Если конфигурационное пространство K шарнирного механизма неприводимо и размерностно однородно, то и множество положений $\pi_i K$ каждого шарнира механизма размерностно однородно.*

Как показывает пример шарнирного механизма с переменным числом степеней свободы, из размерностной однородности всех проекций $\pi_i K$ не следует размерностная однородность конфигурационного пространства K шарнирного механизма.

Если конфигурационное пространство K одномерно, то его проекция $\pi_i K$ является либо точкой, либо алгебраической кривой, либо частью алгебраической кривой.

Теорема. *Если проекция $\pi_i K$ одномерного конфигурационного пространства K приводима, то и само K — приводимо.*

Из этой теоремы, например, следует приводимость конфигурационного пространства построенного методом Кемпе механизма, чертящего вблизи начала координат кривую второго порядка $xy = 0$.

Далее рассмотрим класс K_1 механизмов, у которых множество положений каждого свободного шарнира есть кривая. В механизме из класса K_1 назовём шарнир p_i *замирающим*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится.

Теорема. *Если у механизма класса K_1 имеется замирающий шарнир, то его конфигурационное пространство K приводимо.*

Если для какого-либо шарнира механизма множество положений $\pi_i K$ двумерно, то размерность конфигурационного пространства K механизма не менее двух. Но условия принадлежности механизма классу $\mathcal{K}_1$ ещё не достаточно для одномерности его конфигурационного пространства. Сформулируем достаточное условие одномерности конфигурационного пространства механизма.

Теорема. *Конфигурационное пространство механизма класса $\mathcal{K}_1$ одномерно тогда и только тогда, когда у механизма либо нет замирающих шарниров, либо ни одно из множеств замирающих шарниров не разбивает множества подвижных шарниров на несколько компонент связности.*

В связи с доказанными утверждениями остаётся следующий интересный вопрос: *Имеются ли в классе $\mathcal{K}_1$ механизмы с постоянным и большим единицы числом степеней свободы?*

Список литературы

1. Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математ. — 1994. — Т. 58, № 1. — С. 45–70.
2. Ошемков А. А., Попеленский Ф. Ю., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., Шафаревич А. И. Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: ЛЕНАНД, 2015.
3. Kapovich M., Millson J. J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. — 2002 — V. 41, no. 6. — P. 1051–1107.

ОБ ОДНОМ ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ИЗОЭДРЕ, ОГРАНЁННОМ МНОГОГРАННИКАМИ ИВАНОВА Q_1

Я. В. Кучериненко, В. С. Макаров (Москва)

Изучая работу Постникова [1] об описании трёхмерных сферических многообразий с помощью сферических многогранников и разбиений сферы [2], в трёхмерной сферической группе $C_3^* \times C_2^*$, наряду с правильными шестиугольными призмами [3], был обнаружен многогранник Дирихле в виде наклонённой призмы, как выяснилось, весьма похожий на многогранник Иванова Q_1 из работ [4, 5].

Поэтому был справедлив вопрос: возможен ли сферический правильнoгранный многогранник, аналогичный многограннику Иванова Q_1 , а также изоэдральное разбиение сферы на эти многогранники?

В данной работе мы даём отрицательный ответ на этот вопрос: правильнoгранные многогранники с комбинаторным устройством многогранника Иванова Q_1 не возможны ни на сфере, ни в пространстве Лобачевского.

Зато в группе $C_3^* \times C_2^*$ возможен четырёхмерный изоэдр с трёхмерными гранями – многогранниками Иванова Q_1 . Хотя задача ставилась о возможности существования изоэдров с гранями – многогранниками Иванова Q_1 в группе $C_3^* \times C_2^*$, в действительности было подтверждено не только это: было получено полное комбинаторное и метрическое описание изоэдров (простых форм), порождённых этой группой.

«Звёздочки» в обозначении указанной группы взяты, следуя в целом работе [1]. А также это обозначение напоминает нам, что эта группа задаёт пространство взаимных ориентаций двух фигур с симметриями C_3 и C_2 – соответственно осям третьего и второго порядка) [3]. Звёздочки в обозначении группы также напоминают, что при записи с помощью кватернионов эти группы удваиваются.

Отметим, что группа $C_3^* \times C_2^*$ – циклическая, т.е. можно выбрать одну операцию, порождающую всю группу, т.е. такую, что все прочие операции будут её степенями. По-другому эту группу можно обозначить как $12/5$, согласно действию винтовой оси симметрии порождающей операции – сдвигом вдоль оси на $1/12$ полного оборота и поворотом на $5/12$.

Легко видеть, что, повторив такой поворот пять раз, получим поворот, аналогичный исходному, но вокруг другой оси, скрепляющей и ортогональной к первой. Таким образом, обе оси геометрически эквивалентно характеризуют элемент, порождающий группу.

Если исходная точка сферы S^3 лежит на оси порождающей группы операции, то и все её образы окажутся на ней же, деля окружность большого круга на 12 равных частей. А граница фигуры, полученной пересечением 12-ти касательных трёхмерных гиперплоскостей – 12 «слоёв» одинаковой толщины с двугранными углами в общих двумерных гранях, равными $\pi - 2\pi/12 = 5\pi/6$, – бесконечная 12-гранная «призма» (открытая простая форма).

Если исходная точка лежит посередине между эквивалентными осями (удалена на $\pi/4$ от каждой из них), то аналогичное пересечение трёхмерных гиперплоскостей (касательных к сфере в указанных точках) приводит к многограннику, огранённому двенадцатью

правильными шестиугольными призмами, образующими два многогранных полнотория по шесть призм в каждом.

Если же исходная точка орбиты лежит в произвольном другом месте, то получим многогранник с аналогичным комбинаторным устройством, только призмы будут не правильными, а наклонными, как в многограннике Иванова Q_1 , в частности, они становятся строго такими при удалении от оси на угловое расстояние $\theta = 27.36^\circ$ ($\cos 2\theta = 1/\sqrt{3}$, т.е. в случае, когда θ равно половине острого двугранного угла многогранника Иванова Q_1).

Так выглядят все изоэдры (простые формы) в группе $C_3^* \times C_2^*$. В этом легко убедиться, записав в матричном виде порождающую операцию, размножающую точку орбиты в ортонормированном репере:

$$\begin{pmatrix} -\sin \pi/3 & \cos \pi/3 & 0 & 0 \\ -\cos \pi/3 & -\sin \pi/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \\ 0 & 0 & -\cos \pi/3 & \sin \pi/3 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

где $m = 0, 1, \dots, 11$, а затем в приспособленном косоугольном репере, взяв в качестве координатных векторов радиус-векторы полученной точечной системы при значениях $m = 0, 2, 3, 5$. Тогда и матрица преобразования, и координаты точек орбиты примут целочисленный вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Особенности группы таковы, что все точки, соответствующие чётным m лежат в вершинах правильного шестиугольника (то же для нечётных). Поэтому легко видеть, что в общем случае пересечение касательных гиперплоскостей приведёт к граням с комбинаторным устройством шестиугольных призм. Также легко установить координаты всех 36-ти вершин четырёхмерного многогранника, которые тоже можно записать в целочисленном виде. Матрица Грама координатных векторов, позволяющая вычислить двугранные углы между соседними гипергранями имеет вид:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -\sqrt{3} \cos 2\theta \\ 1 & 2 & \sqrt{3} \cos 2\theta & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \cos 2\theta & 2 & 1 \\ -\sqrt{3} \cos 2\theta & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Непосредственные расчёты длин рёбер и углов в двумерных гранях позволяют убедиться в справедливости классификации четырёхмерных простых форм в группе $C_3^* \times C_2^*$, для чего необходимо использовать такую матрицу, обратную к предыдущей:

$$\frac{2}{3 \sin^2 2\theta} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \cos 2\theta \\ -1 & 2 & -\sqrt{3} \cos 2\theta & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \cos 2\theta & 2 & -1 \\ \sqrt{3} \cos 2\theta & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Достаточно простые логические соображения и несколько громоздкие выкладки показывают, что многогранники Иванова Q_1 возможны только в пространстве Евклида (и ограняют интересный изоэдр в E^4), но не существуют в пространствах ненулевой постоянной кривизны.

Список литературы

1. Постников М. М. Трёхмерные сферические формы // сб. «Дискретная геометрия и топология» к 100-летию со дня рождения Б. Н. Делоне, Тр. МИАН СССР. — М.: Наука, 1991. — Т. 196 — С. 114–146.
2. Долбилин Н. П. О правильных разбиениях Дирихле сферы. — М., 1972.
3. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Геометрия бикристаллов и трёхмерные сферические многообразия // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», имени академика О. Б. Лупанова (20–25 июня 2016 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. — С. 360–362.
4. Окладникова Е. С., Тимофеев А. В. К теореме о типах выпуклых многогранников с паркетными гранями // там же, — С. 362–365.
5. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Украинский геометрический сборник. — 1971. — Т. 10. — С. 20–34.

КОМБИНАТОРНАЯ ФЛЕКСИРУЕМОСТЬ 2-МЕРНЫХ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

С. А. Лавренченко (Москва),
А. М. Магомедов (Махачкала)

Начнем с геометрической головоломки, основанной на свойстве правильного икосаэдра и показывающей, как из пустот в данном геометрическом объекте можно создавать новые геометрические объекты.

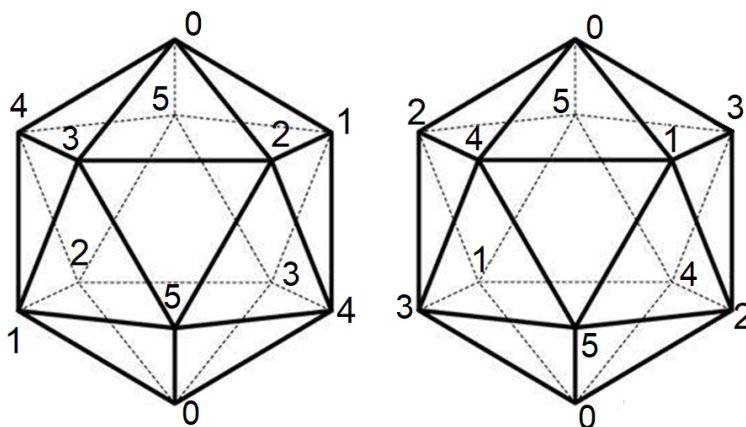


Рис. 1: Флексирование фактор-икосаэдра

Головоломка. Вершины правильного икосаэдра помечены, как на рис. 1 слева; у всех пар противоположных (центрально-симметричных) вершин метки совпадают. Для каждой пары «пустых треугольников» (т.е. не ограничивающих грани) с одинаковыми метками вершин (например, $0-1-4-0$ и $0-4-1-0$) вам дается разъединенная пара обычных правильных треугольников противоположной ориентации с теми же метками вершин и с длиной стороны, как у икосаэдра. Из всех данных вам таким образом правильных треугольников требуется составить новый правильный икосаэдр, примыкая треугольники друг к другу (как грани) в соответствии с метками вершин.

Ответ к этой головоломке показан на рис. 1 справа. Граням икосаэдра справа соответствуют пустые треугольники в фактор-икосаэдре слева, и наоборот. Мы говорим, что грань триангуляции *флексирует*, если эта грань становится пустым треугольником в

какой-нибудь другой триангуляции с тем же вершинно-помеченным графом. Мы говорим, что триангуляция флексирует, если у нее есть флексирующая грань.

Заметим, что в фактор-икосаэдрах на рис. 1 отождествлены все пары противоположных точек, и поэтому эти фактор-икосаэдры являются известными моделями 3-мерного проективного пространства, в которое вложено 2-листное накрытие триангуляции 2-мерной проективной плоскости с полным графом K_6 на вершинах 0, 1, 2, 3, 4 и 5.

Известно [1, 2], что K_6 триангулирует проективную плоскость единственным образом с точностью до изоморфизма триангуляций. На рис. 2 и 3 представлены триангуляции графом K_6 проективной плоскости, представленной как фактор-пространство фундаментального шестиугольника. Триангуляции в паре на рис. 2, а также в паре на рис. 3, комбинаторно различны; у них общими являются только незатененные треугольники, в то время как на рис. 2 флексирует связка четырех затененных треугольников — 2-мерный комплекс BT — «Bunch of Triangles», а на рис. 3 флексирует связка трех затененных четырехугольников — 2-мерный комплекс BS — «Bunch of Squares». Из примеров на рис. 2 и 3 можно заметить, что флексирование обусловлено наличием подкомплексов, изоморфных BT или BS . Следующая теорема говорит, что это — общее правило.

Теорема 1. *Любой комбинаторно флексирующий 2-мерный симплициальный комплекс с 6 вершинами, у которого к каждому ребру примыкает не более 2 треугольных граней, содержит связку треугольников BT или связку четырехугольников BS как 2-мерные подкомплексы.*

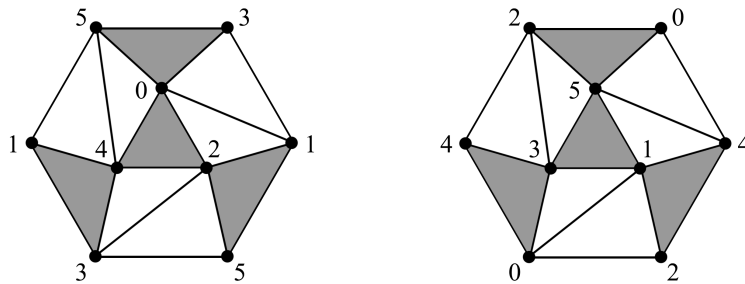


Рис. 2: Флексирующая связка треугольников (BT)

Отметим в заключение, что триангуляция проективной плоскости с графом K_6 является самодополнительным 2-комплексом [3, с. 159]

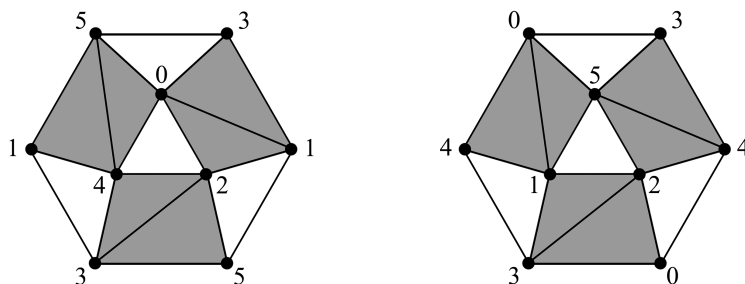


Рис. 3: Флексирующая связка четырехугольников (BS)

и допускает ровно 12 (попарно различных) изофлексов (изоморфных друг другу). Отметим далее, что подобно тому как все эти 12 изофлексов находятся в фактор-икосаэдре, все 12 триангуляций тора с графом $K_{2,2,2,2}$ тоже являются изофлексами, находящимися в 2-мерном остове 4-мерного кросс-политопы [4]. Наконец, известно [5], что каждый 2-мерный симплициальный комплекс, имеющий не более пяти вершин, в котором к каждому ребру примыкает не более двух треугольных граней, является комбинаторно *жестким*, т.е. вообще не допускает флексов.

Список литературы

1. Лавренченко С. А. О числе треугольных упаковок помеченного графа на проективной плоскости // Укр. геом. сб. (Харьков) — 1989. — Т. 32. — С. 71–84.
2. Lavrenchenko S. A. Number of triangular packings of a marked graph on a projective plane // J. Soviet Math. — 1992. — 59, 2. — P. 741–749.
3. Lavrenchenko S. A. All self-complementary simplicial 2-complexes homeomorphic to the torus or the projective plane // Baku International Topological Conference. Abstracts. Part II (Baku, 3–9 Oct., 1987). Baku, 1987. — 370 p.
4. Lawrencenko S. Polyhedral suspensions of arbitrary genus // Graphs Combin. — 2010. — 26, 4. — P. 537–548.
5. Wang C., Lawrencenko S., Mao J. On the uniqueness of embedding a graph into a surface // Math. Appl. (Wuhan) — 1998. — 11, 2. — P. 86–89.

О МНОГОГРАННИКАХ С ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В. С. Макаров, П. В. Макаров (Москва)

В работе рассматриваются выпуклые трехмерные многогранники с правильными гранями. Не пытаясь описать весь класс правильногранников, мы лишь старались указать на некоторые специфические особенности таких многогранников в зависимости от того, в каком из пространств постоянной кривизны E^3 , Λ^3 или S^3 рассматривается многогранник.

Наиболее известным подклассом в классе правильногранников является хорошо известный с древних времен класс платоновых тел (т.е. конечных правильных трехмерных многогранников), состоящий из пяти тел: тетраэдра T^3 , октаэдра O^3 , куба K^3 , додекаэдра D^3 и икосаэдра I^3 , их символы Шлефли есть соответственно $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{5,3\}$, $\{3,5\}$. Все пять тел реализуются во всех трех пространствах постоянной кривизны. На сфере S^3 появляются правильные линзы (сферу мы постараемся не очень затрагивать). В Λ^3 появляются бесконечные правильные многогранники с конечными гранями, вписанные (описанные) около орисферы или около эквидистантной поверхности (см. [1]); или пары таковых, (см. [2]). Стараясь не усложнять вопроса, мы не будем здесь касаться более сложных правильных многогранников в Λ^3 , но один все же укажем. Если на Λ^2 взять орицикл и вписать в него правильную бесконечную ломаную, то, за счет выбора длины стороны, всегда можно добиться того, чтобы плоский угол между парой соседних сторон был равен $2\pi/k$, ($k \geq 3$ — натуральное). Такой бесконечный (вписанный в орицикл) правильный многоугольник разбивает плоскость Лобачевского. Если над этой (базовой) плоскостью построить эквидистантную поверхность и на нее спроектировать указанное разбиение базовой плоскости, то получим платоново разбиение эквидистантной поверхности на геодезические орициклические бесконечные конгруэнтные правильные многоугольники (сходящиеся по k в узлах разбиения). Но все вершины любого такого многоугольника компланарны (лежат в плоскости, параллельной базовой плоскости) и потому соответствующие (линейные) орициклические правильные многоугольники формируют бесконечный платонов многогранник с бесконечными орициклическими гранями.

Перейдем теперь от класса платоновых тел к более широкому классу — классу тел Архимеда (к классу полуправильных многогранников с конгруэнтными гоноэдрами и правильными гранями).

Класс конечных архимедовых многогранников хорошо известен (по крайней мере с третьего века до новой эры). Хорошо известны и методы, позволяющие получать тела (и разбиения эвклидовой плоскости) Архимеда из тел Платона (см., напр. [3]). По известным причинам все эти методы оказываются применимыми во всех пространствах постоянной кривизны. При этом область применения некоторых построений удастся качественно расширить, удастся получить на этом пути и новые типы счетных серий архимедовых многогранников. Например, в пространстве Лобачевского правильные пирамиды существуют при любом числе k боковых граней: достаточно взять правильный k -гранный угол, построить его ось симметрии и плоскость, ортогональную этой оси; если эту плоскость «параллельно» сдвигать, удаляя от вершины, то в некоторый момент плоские углы равнобедренных боковых граней окажутся равными плоским углам исходного k -гоноэдра, что и доказывает правильность таких боковых граней (предполагается, что плоский угол k -гоноэдра меньше $\pi/3$). В [3] указан совершенно новый подход для построения архимедовых трехмерных многогранников, основанный на идеях А. Пуанкаре, указанных в его работе по фуксовым группам [4]. Более простой вариант построения архимедовых разбиений плоскости Лобачевского (и, следовательно, эквидистантных архимедовых многогранников) был предложен первым из авторов этой работы еще в середине 60-х годов прошлого века [5]. Но в той работе использовались лишь четноугольные многоугольники. В работе [6] класс архимедовых эквидистантных многогранников (так называемых «линз», как конечных, так и бесконечных) был существенно расширен, но в указанных конструкциях всегда приходилось добиваться конгруэнтности всех многогранных углов строимого объекта. При нашем теперешнем подходе это требование снимается и тем самым класс получаемых правильных многогранных многогранников резко расширяется.

Список литературы

1. Каган В. Ф. Основания геометрии. — М.-Л., 1949–1956.
2. Макаров В. С. Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского. // Дискретная математика. Проблемы геометрии. — 1983. — Т. 15. — С. 3–59.
3. Макаров В. С., Макаров П. В. К вопросу о перечислении архимедовых многогранников пространства Лобачевского // Труды МИИРАН. Т.275. — М.: Наука, 2011. — С. 99–127
4. Poincaré H. Théorie des groupes fuchsien // Acta math. — 1882. — 1. — P. 1–62.
5. Макаров В. С. Об одном классе двумерных федоровских

групп // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1967. — Т. 31, № 3. — С. 531–542.

6. Макаров В.С., Макаров П.В. Правильногранные многогранники трехмерного пространства Лобачевского // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова. — М.: Изд-во Московского ун-та, 2011. — С. 69–77.

МНОГОЧЛЕНЫ ОБЪЕМА ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ТИПОВ

И. Х. Сабитов (Москва)

В работах автора (см., например, [1–3]) было установлено, что для ориентируемого симплициального многогранника произвольно данного комбинаторного типа K существует многочлен

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \dots + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l),$$

в котором коэффициенты $a_i(l)$ в свою очередь являются многочленами от совокупности (l) квадратов длин ребер с целыми числовыми коэффициентами, определяемыми комбинаторикой многогранника, и такой, что каждый ориентированный объем любого такого многогранника является одним из корней этого многочлена $Q(V)$.

Доказательство существования такого многочлена было конструктивным, но вопрос о практическом нахождении его явного вида оставался трудным. Оказалось, что он имеет необыкновенно большое количество мономов; более того, предложенный в этих работах алгоритм его нахождения приводит к многочленам очень больших степеней, не все корни которых имеют какое-либо отношение к объемам разных конфигураций изометричных многогранников с одинаковым комбинаторным строением. Поэтому в работе [4] было введено понятие *канонического многочлена* объема, который по определению должен иметь наименьшую степень среди всех многочленов объема. В той же работе показано, что для гомеоморфных сфере многогранников такой многочлен существует, единственен, и, более того, он является делителем всех возможных многочленов объема (а общее

определение многочлена объема можно найти в статьях [4, 5]). К настоящему времени канонические многочлены объема известны лишь для нескольких комбинаторных типов многогранников и все они имеют общее свойство, которое выражается в том, что существуют такие наборы длин, когда все корни соответствующего канонического многочлена являются объемами реально существующих многогранников, так что степень их многочлена объема действительно понизить нельзя. Ниже предлагается некоторый обзор полученных в этом направлении результатов.

Отправным результатом является формула объема тетраэдра, установленная Эйлером в 1752 г. Она приводится во многих справочниках в разных записях. Принадлежащий самому Эйлеру вид ее записи с некоторой модификацией дан в брошюре [6] и там же можно найти и некоторые сведения об истории получения этой формулы. Там же в [6] приведен многочлен 4-й степени $Q(V)$ для 5-вершинного многогранника. Первое доказательство существования многочлена объема для многогранников рода 0 и с числом вершин меньше 12 дано в [7]. Но эти многочлены не были каноническими и имели степени существенно больше, чем могло быть корней, реализуемых как объемы реально существующих многогранников с данным набором длин ребер (например, для октаэдра получился многочлен степени $1024 = 2^{10}$). В [8] приведен алгоритм для нахождения канонического многочлена объема для 6-вершинного многогранника – октаэдра, а работающая программа по этом алгоритму написана С. Н. Михалевым. Получился многочлен 16-й степени, но он оказался таким большим, содержащим несколько миллионов мономов, что нет никакой возможности получить его напечатанный вариант с выписыванием всех его коэффициентов как функций от квадратов длин ребер октаэдра. Однако программа вполне работоспособна в том смысле, что при задании конкретных числовых значений длин ребер многочлен выписывается с вычисленными числовыми значениями его коэффициентов, и есть примеры, когда все 16 корней оказываются объемами реально существующих 8 изометричных, но неконгруэнтных октаэдров, как это продемонстрировано в [6] (надо учесть, что изменения ориентации дают корней в два раза больше, чем число октаэдров).

Дальнейшее продвижение в расширении списка многогранников с вычислимым многочленом объема шло по пути сведения многогранников сложного строения к более простым путем выделения в них частей известного простого типа. В первую очередь это было сделано в [9] для так называемых пирамид, которые определяются как многогранные поверхности, содержащие вершину, соединенную ребрами со всеми остальными вершинами: телесные многогранники

с границей в виде пирамидальных многогранников можно считать состоящими из объединения симплексов с известными длинами ребер. Этот класс многогранников интересен тем, что пирамиды бывают любого топологического строения и в любой размерности, и для их объема можно получить представление в виде многочлена с коэффициентами от объемов составляющих их симплексов, что важно для гиперболических и сферических пространств, так как в них нет алгебраического выражения для симплексов в функции длин ребер. Затем в работах [10, 11] был предложен алгоритм для нахождения многочленов объема для многогранников комбинаторного типа n -гранных призм в случаях $n = 4, 5, 6, 7$ с предварительной триангуляцией их граней, который был реализован для прямых призм с правильными основаниями. В частности, для триангулированного куба с ребром a многочлен объема имеет вид

$$V^{28}(V-12a^3)(V+12a^3)(V-8a^3)^2(V+8a^3)^2(V-4a^3)^{15}(V+4a^3)^{15} = 0,$$

где $V = 12v$, а v — ориентированный объем куба.

Мне доставляет удовольствие заметить, что это уравнение является, наконец, ответом на вопрос О.Б. Лупанова, как выглядит многочлен объема для куба, который он мне задал в 1996 г., когда я рассказывал в первый раз о своей теореме.

Работа поддержана грантом НШ-6222.2018.1.

Список литературы

1. Сабитов И. Х. Объем многогранника как функция его метрики // Фундамент. и прикл. математика. — 1996. — Т. 2, № 4. — С. 1235–1246.
2. Сабитов И. Х. Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия // Математический сборник. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 105–134.
3. Sabitov I. Kh. The volume as a metric invariant of polyhedra // Discrete and Computational Geometry. — 1998. — 20, 4. — С. 405–425.
4. Астрелин А. В., Сабитов И. Х. Канонический многочлен для объема многогранника // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 2. — С. 165–166.
5. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, № 3. — С. 3–66.
6. Сабитов И. Х. Объемы многогранников // М.: МЦНМО, 2002. — 32с.
7. Сабитов И. Х. К проблеме об инвариантности объема изгибаемого многогранника // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50, № 2. — С. 223–224.

8. Астрелин А. В., Сабитов И. Х. Минимальный по степени многочлен для определения объема октаэдра по его метрике // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50, № 4. — С. 245–246.

9. Сабитов Д. И., Сабитов И. Х. Многочлены объема для некоторых многогранников в пространствах постоянной кривизны // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 6. — С. 159–167.

10. Сабитов Д. И., Сабитов И. Х. Канонические многочлены объема для многогранников комбинаторного типа гексаэдра // Сибирские электронные математ. известия. — 2017. — Т. 14. — С. 1078–1087.

11. Сабитов Д. И., Сабитов И. Х. Многочлены объема для многогранников комбинаторного типа n -гранных призм в случаях $n = 5, 6, 7$ // Сибирские электронные математ. известия. — 2019. — Т. 16. — С. 439–448.

О ДВУХ ПОДКЛАССАХ МНОГОГРАННИКОВ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

В. И. Субботин (Новочеркасск)

Пусть у замкнутого выпуклого многогранника в E^3 существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками одного типа. Тогда такой многогранник называется RR -многогранником (от слов *rombic* и *regular*).

Здесь ромбической вершиной называется такая вершина V многогранника, звезда $StarV$ которой состоит только из равных и одинаково расположенных ромбов. Если количество ромбов равно n , то при условии, что порядок оси вращения $StarV$ равен n , вершина V называется симметричной n -ромбической.

В данной работе найдены все многогранники следующих подклассов RR -многогранников: 1) RR -многогранники с одной ромбической вершиной и 2) RR -многогранники с неизоллированными симметричными ромбическими вершинами. Неизоллированность ромбических вершин означает, что их звёзды граней имеют общие вершины. Объединение подклассов 1) и 2) RR -многогранников обозначим RR_1 .

Теорема. Множество всех многогранников класса RR_1 исчерпывается следующими многогранниками:

- 1) 12-гранник с двумя 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами;
- 2) семь многогранников с двумя n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями.
- 3) четыре многогранника с одной ромбической вершиной.

Отметим, что первоначальный неполный список RR -многогранников с изолированными ромбическими вершинами, имеется в [1]. Учитывая настоящую теорему и пополняя список в [1] 24-гранником с треугольными гранями и исключая многогранник с треугольными гранями и двумя изолированными 5-ромбическими вершинами, получаем полный список из двадцати одного RR -многогранника.

Список литературы

1. Субботин В. И. Многогранники с симметричными ромбическими вершинами // Дискретная математика и ее приложения. — М.: МГУ, 2016. — С. 368–370.

Секция «Теория кодирования и математические вопросы защиты информации»

ПОСТРОЕНИЕ ПОДСТАНОВОК С ПОЛНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

А. В. Галатенко, В. А. Носов,
А. Е. Панкратьев (Москва)

Пусть $(G, +)$ — конечная абелева группа, σ — подстановка на множестве G . Подстановка σ называется полной (имеющей полный дифференциал) над группой $(G, +)$, если функция $\sigma(x) - x$ есть биекция. В случае, если $(G, +)$ является аддитивной группой поля $(G, +, \cdot)$, очевидным примером полной подстановки является линейная функция с коэффициентом при x , отличным от 0 и 1.

Одно из применений полных подстановок — задание латинских квадратов. Напомним, что латинские квадраты представляют собой таблицы Кэли квазигрупповых операций, то есть таких бинарных операций $f: G \times G \rightarrow G$ на множестве G , что для любых $a, b \in G$ уравнения $f(x, a) = b$ и $f(a, y) = b$ однозначно разрешимы. В настоящее время латинские квадраты активно используются при построении перспективных криптографических примитивов [1–3].

Теорема. Пусть $(G, +)$ — конечная абелева группа, σ — полная подстановка над $(G, +)$. Тогда операция $F: G \times G \rightarrow G$, определяемая формулой

$$F(x, y) = \sigma(x + y) - y,$$

является квазигрупповой.

Одним из методов построения больших параметрических семейств латинских квадратов является подход, основанный на использовании правильных семейств функций [4]. Ниже будет показано, что порождаемые с помощью описанной конструкции латинские квадраты вообще говоря не задаются с помощью правильных семейств функций.

Несложно увидеть, что свойство полноты сохраняется при переходе к прямым произведениям. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $(G_1, +_1), \dots, (G_n, +_n)$ — абелевы группы, σ_i — подстановка над $(G_i, +_i)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим

рим прямое произведение $(G, +) = (G_1, +_1) \times \dots \times (G_n, +_n)$ и подстановку σ над G , определяемую как покомпонентное применение подстановок σ_i .

Теорема. *Подстановка σ полна над группой $(G, +)$ тогда и только тогда, когда каждая из подстановок σ_i полна над $(G_i, +_i)$.*

Рассмотрим случай, когда группа является прямым произведением одинаковых сомножителей $(G_0, +_0)$, а подстановка σ произвольная. В этом случае естественно представить σ в векторной форме:

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим две конструкции, широко используемые в криптографических приложениях: линейные регистры сдвига с обратной связью и сети Фейстеля.

Линейный регистр сдвига с обратной связью задается соотношениями

$$\begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = x_3 \\ \dots \\ f_{n-1} = x_n \\ f_n = x_1 +_0 g(x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

(фиктивные аргументы в правой части опущены).

Теорема. *Линейный регистр сдвига с обратной связью (2) задает полную подстановку если и только если любой нетривиальный сдвиг меняет значение g , то есть для любого набора $(x_2, \dots, x_n)$ и любого $\alpha \in G_0$, $\alpha \neq 0$, значения $g(x_2, \dots, x_n)$ и $g(x_2 +_0 \alpha, \dots, x_n +_0 \alpha)$ различны.*

Заметим, что при $|G_0| = 2$ сформулированное в теореме условие полноты подстановки означает самодвойственность функции g .

Пусть $n = 2$. Классическая сеть Фейстеля задается соотношениями

$$\begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = x_1 +_0 g(x_2), \end{cases}$$

где g — некоторая функция из G_0 в G_0 . Известно, что задаваемая таким образом подстановка полна если и только если функция g является биекцией.

Рассмотрим обобщение сети Фейстеля, определяемое соотношениями

$$\begin{cases} f_1 = s(x_2) \\ f_2 = x_1 +_0 p(x_2), \end{cases}$$

где s, p — функции из G_0 в G_0 .

Теорема. *Обобщенная сеть Фейстеля задает полную подстановку тогда и только тогда, когда $s(x)$, $p(x)$ и $s(x) +_0 p(x) -_0 x$ являются биекциями.*

Интересно, что уже в случае классических сетей Фейстеля и $|G_0| = n = 2$ обе биекции g порождают с помощью конструкции (1) латинские квадраты, которые невозможно задать правильными семействами булевых функций.

Список литературы

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. — 2008. — вып. 2. — С. 28–32.
2. Shcherbacov V. Quasigroup based crypto-algorithms // arXiv: 1201.3016v1.
3. Wolf C., Prenel B. Taxonomy of public key schemes based on the problem of multivariate quadratic equations // Cryptology ePrint Archive, Report 2005/077, 2005.
4. Носов В. А. Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных // Интеллектуальные системы. — 1999. — Т. 4., вып. 3–4. — С. 307–320.

ТЕХНОЛОГИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ГЕНЕТИЧЕСКИХ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ГРАФАХ ДЕ БРЕЙНА

А. А. Евдокимов (Новосибирск)

Этот доклад — дань памяти Альберта Абрамовича Левина (1939–2017), который много работал и сделал по теме разработки программного обеспечения и эффективного инструментария визуализации символьных последовательностей на графах де Брёйна.

Целый ряд теоретических и прикладных задач распознавания свойств символьных последовательностей (с.п.) связаны с изучением взаимосвязи локальных свойств, которые можно наблюдать в последовательности, просматривая её через определённое «окно просмотра», с ее поведением «в целом», которое зависит от способов описания или свойств исследуемого класса с.п. [1, 3]. Например, генетические «тексты» или списки фрагментов расшифрованных нуклеотидных последовательностей. При этом основной целью исследования является изучение взаимосвязей между первичной линейной структурой, например, ДНК последовательностей, и последующими «производными» структурами, включая пространственно организованные белковые структуры, которые уже являются носителями определённого функционирования. Всё шире применяются математические методы для задач анализа генетических текстов и вопросов обработки, хранения и распознавания структурных свойств различного типа нуклеотидных последовательностей [3, 4]. Одним из подходов к изучению является исследование различного типа «естественных» математических структур, определяемых на множествах фрагментов «первичных» структур, например, ДНК-последовательностей. Одной из таких структур являются графы перекрытия слов, называемые графами де Брёйна (de Bruijn graph). Эти графы изучались в лаборатории дискретного анализа ИМ начиная с 80-х годов в связи с различными теоретическими и прикладными задачами. В частности по задачам визуализации нуклеотидных последовательностей на графах де Брёйна и анализу генетических текстов мы работали в контакте с сотрудниками лаборатории теоретической генетики ИГиГ СО РАН [2–4]. Для этих задач, и не только, А.А. Левиным было разработано программное обеспечение и инструментарий (VIZ) для задач анализа свойств генетических последовательностей на основе наблюдения динамики изменения структуры их граф-портретов.

Теперь несколько определений. Графом де Брёйна размерности n называется ориентированный граф $B_m^n = (V, E)$, где множество вершин $V = A^n$ — это все слова длины n в алфавите $A = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Вершины $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ соединяются дугой, ориентированной от α к β , если выполняются равенства $\alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_{n-1}$, то есть слова α и β перекрываются по $n-1$ букве. Построение последовательности графов $B_m^i, i = 1, 2, \dots$ на компьютере легко осуществить, используя то, что граф B_m^i является реберным графом для B_m^{i-1} . Произвольной последовательности $X = x_1, x_2, x_3, \dots$ в алфавите A поставим в соответствие путь в графе B_m^n , который начинается в вершине $(x_1, \dots, x_n)$ и последовательно

проходит вершины $(x_i, \dots, x_{i+n-1})$ при $i = 2, 3, \dots$. Замечаемый этим путем подграф графа B_m^n называется графом подслов с.п. X . Будем говорить, что его размерность равна n и обозначать $G^n(X)$. Множеством вершин $V^n(X)$ графа $G^n(X)$ является множество всех подслов длины n в X . Любая с.п. X имеет, таким образом, свой «портрет» $G^n(X)$ на каждом из графов де Брёйна растущей размерности $n = 2, 3, 4, \dots$.

Схемой конкатенации слова X называется такая последовательность слов, в которой каждое слово является либо буквой алфавита, либо конкатенацией двух предшествующих слов из последовательности, которая заканчивается словом X . Аддитивной сложностью $L(n, X)$ слова X называется минимальная длина его схемы конкатенации [3]. Комбинаторной сложностью с.п. X называют функцию $C(n, X)$, равную количеству различных подслов длины n в X .

При решении известной комбинаторной проблемы «змея в ящике» А. А. Евдокимовым в 1968 году была определена бесконечная последовательность (далее E) в конечном алфавите, которая порождается простой рекурсивной схемой, но имеет «нерегулярное поведение», которое позволяет длинную цепь в n -мерном кубе (змею) «хорошо направлять, не давая ей заикнуться» [5]. Последовательность E определялась следующей схемой её рекурсивного порождения.

$$a_1 = 0; \quad b_1 = 0; \quad a_{k+1} = a_k 0 b_k; \quad b_{k+1} = a_k 1 b_k; \quad k = 2, 3, \dots \quad (1)$$

Для любого k $|a_k| = |b_k| = 2^k - 1$. Для слов a_k выполняется свойство вложимости префиксов ($a_1 \subset a_2 \subset a_3 \dots$), и потому можно корректно определить бесконечную последовательность $E = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, вложенными префиксами которой являются слова a_k , где $k = 1, 2, \dots$. Из схемы порождения (1) легко получить другое задание E рекурсивной схемой иного типа

$$X_1 = 0; \quad X_{n+1} = X_n 0 \overline{X_n}; \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

где $\overline{X}$ — это результат замены в слове X нулей на единицы, а единиц на нули, а $\tilde{X}$ — обращение слова X , т.е. прочтение его с конца. Эта схема порождения описана в [5]. Таким образом, $E = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Из (1) и (2) нетрудно найти формулу для непосредственного вычисления по номеру i позиции буквы в E , стоящей на этой позиции. Для этого представим число i в виде $i = 2s(4t + q)$, где $q = 1$ или $q = 3$, и положим $x_i = 0$, если $q = 1$; и $x_i = 1$, если $q = 3$.

Отметим ещё один способ описания E , при котором она определяется действием на буквы алфавита $\{0, 1\}$ «условного морфизма» f , действующего следующим образом: применяем подстановку $0 \rightarrow 001$, $1 \rightarrow 011$ к буквам, стоящим на нечётных позициях, а тождественную подстановку $0to0$, $1 \rightarrow 1$ к буквам на чётных позициях. Тогда $a_2 = f(0)$, $a_3 = f^2(0)$, $a_4 = f^3(0)$, ..., стало быть $E = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0)$.

Функция $L(n)$ аддитивной сложности слова $f^n(0) = a_n$ растёт линейно по n , т.е. имеет логарифмический рост от длины слова $|a_n| = 2^n - 1$. Точный вид этой функции неизвестен.

Графы $G^n(E)$ перекрытия подслов длины n при $n > 7$ разбиваются на два класса гомеоморфных графов в зависимости от четности n . Из этого легко находится комбинаторная сложность $C(n, E) = 4n$, при $n > 7$. Вид графов $G^n(E)$ при $n < 6$ устанавливается непосредственно, или это можно сделать с помощью программы VIZ.

Для нахождения и доказательства свойств E помогает разработанная технология визуализации. Этот программный инструмент позволяет быстро идентифицировать последовательности, анализировать способы их порождения или списочные задания, как, например, классы нуклеотидных генетических последовательностей, быстро находить вхождения нужных подслов, их кратность, повторы, вычислять некоторые сложностные характеристики. Более детальное описание технологии использования программы визуализации VIZ смотри в [1, 2], а применение к анализу генетических текстов в [2, 4].

Исследование выполнено при финансовой поддержке проекта РАН № 0314-2015-0011 и программы программы повышения конкурентоспособности НГУ. Автор является сотрудником Новосибирского государственного университета.

Список литературы

1. Евдокимов А. А., Левин А. А. Комбинаторика и визуализация математических и генетических символьных последовательностей // Материалы конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А.А. Ляпунова. Новосибирск. 2001. — С. 203-204.
2. Evdokimov A. A., Levin A. A. Subwords graphs, generated by genetic sequences // Proceedings of the Third International Conference on Bioinformatics of Genome Regulation and Structure - BGRS' 2002. — 2002. — 1. — P. 131-133.
3. Евдокимов А. А. Анализ, сложность и реконструкция символьных последовательностей // Вестник ТГУ. — 2005. — № 14. — С. 4-12.
4. Евдокимов. А. А., Левин А. А. Графические модели и комбина-

торика генетических и математических символьных последовательностей // Вычислительные технологии. — 2002. — 7. — С. 274–278. 5. Евдокимов. А. А. О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе // Математические заметки. — 1969. — Т. 6, вып. 3. — С. 309–319.

ОБ УСЛОВИЯХ ВСКРЫТИЯ И БЕЗОПАСНОСТИ СХЕМЫ БЛОМА

А. Б. Фролов, Н. А. Давыдова (Москва)

Изучаемая в настоящей работе (k, m) -схема Р. Блома [1] задается симметрическим многочленом $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ степени m по каждой из k переменных над полем F_p . По числу n абонентов выбираются различные элементы $r_1, \dots, r_n$ поля. Каждый абонент i получает коэффициенты многочлена $f(r_i, x_2, \dots, x_k)$, $i = 1, \dots, n$. Любые k абонентов могут вычислить единый ключ $K = f(r_1, r_2, \dots, r_k)$. Мы покажем, что для вскрытия (k, m) -схемы Блома, достаточно использовать $\binom{m+k}{m}$ определенных коэффициентов $m+1$ многочленов $f(r_i, x_2, \dots, x_k)$, $i = 1, \dots, m+1$. В заключение мы представим также условие безопасности (k, m) -схемы Блома.

Обозначим $p_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ однородные многочлены как суммы всех одночленов $x_{\pi(1)}^{i_1} x_{\pi(2)}^{i_2} \dots x_{\pi(k)}^{i_k}$, $\pi \in S_k$. Представим исходный многочлен в виде линейной комбинации над полем F_p всевозможных таких многочленов:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} p_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Обозначим $A(k, m)$ набор индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ как чисел в системе счисления по основанию $m+1$ в порядке возрастания их числовых эквивалентов. Длина такого набора есть $\binom{m+k}{m}$. Он разбивается на $\binom{m+k-1}{m}$ наборов $A_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}(k, m)$ индексов с одинаковыми первыми $k-1$ значениями. Будем использовать обозначение $A_t(k, m)$ для t -ого

такого набора. Обозначим через $S(k, m)$ набор длин $S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}(k, m)$ таких наборов и через $S_t(k, m)$ — t -й его элемент.

Далее рассмотрим многочлен ($r \in F_p$)

$$f(r, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} p_{i_1, i_2, \dots, i_k}(r, x_2, \dots, x_k).$$

Он также симметрический и может быть представлен в виде

$$f(r, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m} c_{i_2, \dots, i_k} p_{i_2, \dots, i_k}(x_2, \dots, x_k).$$

Коэффициенты этих многочленов удовлетворяют соотношениям

$$c_{i_2, \dots, i_k} = \sum_{i_1=0}^m a_{i_1, i_2, \dots, i_k} r^{i_1}.$$

Обозначим

$$c_{i_2, \dots, i_k; j} = \begin{cases} a_{j, i_2, \dots, i_k}, & \text{если } j \leq i_2, \\ a_{i_2, \dots, i_t, j, i_{t+1}, \dots, i_k}, & \text{если } i_t < j \leq i_{t+1}, \end{cases}$$

Для данных различных $m + 1$ элементов $r_1, \dots, r_{m+1}$ поля F_p и соответствующих $\binom{m+k-1}{m}$ коэффициентов $c_{i_2, \dots, i_k}^{(i)}$ многочленов $f(r_i, x_2, \dots, x_k)$ получаем $\binom{m+k-1}{m}$ систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов $c_{i_2, \dots, i_k; j}$ исходного многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$c_{i_2, \dots, i_k}^{(i)} = \sum_{j=0}^m c_{i_2, \dots, i_k; j} r_i^j, \quad i = 1, \dots, m + 1. \quad (1)$$

Такие СЛАУ имеют ранг $m + 1$, так как составлены на основе матриц Вандермонда. Объединение их решений включает все коэффициенты исходного многочлена.

Будем решать СЛАУ (1) в порядке возрастания числовых эквивалентов наборов индексов $i_2, \dots, i_k$. Решение первой СЛАУ

$$c_{0, \dots, 0}^{(i)} = \sum_{j=0}^m c_{0, \dots, 0; j} r_i^j, \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

ранга $m + 1$ содержит значения $\dot{c}_{0,\dots,0;j} = \dot{a}_{0,\dots,0,j}$, $j = 0, \dots, m$, $S_{0,\dots,0}(k, m) = S_1(k, m) = m + 1$ ранее неизвестных коэффициентов $c_{0,\dots,0;j} = a_{0,\dots,0,j}$, $j = 0, \dots, m$, с индексами из набора $A_{0,\dots,0}(k, m) = A_1(k, m)$. Одним из них $\dot{c}_{0,\dots,1;0} = \dot{a}_{0,0,\dots,0,1}$ можно заменить переменную $c_{0,\dots,1;0}$ второй СЛАУ, которая при этом упрощается с уменьшением числа переменных и одновременно ранга до $S_2(k, m)$.

После решения t -й СЛАУ, станут известными значения коэффициентов с индексами из подмножеств $A_1(k, m), \dots, A_t(k, m)$, а неизвестные $(t + 1)$ -й СЛАУ будут соответствовать $S_{t+1}(k, m)$ индексам из набора $A_{t+1}(k, m)$. Следовательно, $(t + 1)$ -я СЛАУ упрощается до ранга $S_{t+1}(k, m)$.

В процессе решения СЛАУ (1) рангов $m + 1$ преобразуются в СЛАУ рангов $S_t(k, m)$, их объединение есть СЛАУ ранга $\binom{m+k}{m}$, при этом используется столько же коэффициентов $m + 1$ многочленов.

Покажем, что m абонентов, объединив свои секретные данные

$$f_i(r'_i, x_2, \dots, x_k), i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

не могут вычислить ключ $K = f(r_1, \dots, r_k)$ других k участников с идентификаторами $r_1, r_2, \dots, r_k$. Обобщив известное для $(2, m)$ -схемы Блома доказательство [2], покажем, что данные (2) совместимы с любым значением K^* такого ключа. Рассмотрим многочлен

$$f^*(x_1 x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, X_k) + \\ + (K^* - K) \prod_{1 \leq i \leq m} \frac{(x_1 - r'_i)(x_2 - r'_i) \dots (x_k - r'_i)}{(r_1 - r'_i)(r_2 - r'_i) \dots (r_k - r'_i)}.$$

Как видим, для любого значения K^* существует симметрический многочлен $f^*(x_1, x_2, \dots, x_k)$ степени m по каждой из k переменных такой, что $f^*(r_1, r_2, \dots, r_k) = K^*$ и для любых i , таких, что $1 \leq i \leq m$, верно, что $f^*(r'_i, x_2, \dots, x_k) = f(r'_i, x_2, \dots, x_k)$, то есть секретная информация (2) нарушителей такая же, как и при многочлене $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которому соответствует истинное значение ключа $K = f(r_1, r_2, \dots, r_k)$. Это говорит о безусловной (не зависящей от вычислительных ресурсов криптоаналитика) безопасности (k, m) -схемы Блома относительно компрометации многочленов m участников. В итоге доказана

Теорема. (k, m) -Схема Блома безусловно безопасна относительно компрометации многочленов любых m абонентов, каждый

из которых должен хранить $\binom{m+k-1}{m}$ элементов поля, а для ее вскрытия достаточно использовать $\binom{m+k}{m}$ определенных коэффициентов из числа коэффициентов многочленов $m + 1$ абонентов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00294а.

Список литературы

1. Blom R. Nonpublic key distribution // Advances in Cryptology. Proceedings of EUROCRYPT'82. — New York, 1983. — P. 231–236.
2. Stinson D. R. Overview of Attack Models and Adversarial Goals for SKDS and KAS. CS 758. — URL: http://cgi.di.uoa.gr/~halatsis/Crypto/Bibliografia/Crypto_Lectures/Stinson_lectures/lec09.pdf

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ ПЛАТОВИДНЫХ УСТОЙЧИВЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С НЕКОТОРЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. В. Хинко (Москва)

Вопросы корреляционной иммунности и устойчивости булевых функций в настоящее время нередко поднимаются в работах многих авторов. Например, в [1, 2, 4] затрагивается проблема устойчивости функций при максимальных значениях нелинейности, в частности для случая $m > n/2 - 2$, где m — порядок устойчивости функции, а n — число переменных, оценка нелинейности булевой функции была усилена тремя группами авторов до $nl(f) < 2^{n-1} - 2^{m+1}$ при $m \leq n - 2$, при этом если граница достигается, то $m > 0.5 \cdot n - 2$. Отсюда легко видно, что важные с точки зрения криптографии высокие нелинейность и корреляционная иммунность функции являются в некотором смысле противоречащими друг другу параметрами.

Также было показано, что верхние оценки нелинейности достигаются на платовидных булевых функциях. *Платовидными* называют булевы функции, у которых множество значений коэффициентов Уолша принадлежит множеству $\{0, \pm 2^c\}$, где c (*амплитуда платовидности*) — натуральная константа, не зависящая от числа переменных n .

Представляет интерес построение и классификация конструкций, в частности рекурсивных, платовидных m -устойчивых булевых функций, позволяющих относительно легко получить функции от большого числа переменных с достаточно хорошим порядком устойчивости. В работах [1–3] затрагиваются вопросы устойчивости функций при максимальных значениях нелинейности и построены соответствующие рекурсивные конструкции m -устойчивых функций для $n - 2 \geq m \geq 0.6n - 1$.

Автор настоящей статьи проводит исследование конструкций с шагом числа переменных три. В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом: пусть имеются b , $b \in \mathbb{N}$, платовидных m -устойчивых булевых функций от n переменных $f_n^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, b}$, среди которых, возможно, есть совпадающие с точностью до взятия отрицания; добавим три переменные x_{n+1} , x_{n+2} и x_{n+3} . Новые функции от $n + 3$ переменных обозначим $f_{n+3}^s(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$, $s = \overline{1, 8}$.

Вектор-строка функции f_{n+3}^s имеет вид

$$(\sigma_{s1}g_{s1} \mid \sigma_{s2}g_{s2} \mid \sigma_{s3}g_{s3} \mid \sigma_{s4}g_{s4} \mid \sigma_{s5}g_{s5} \mid \sigma_{s6}g_{s6} \mid \sigma_{s7}g_{s7} \mid \sigma_{s8}g_{s8}),$$

где $g_{sj} = f_n^i$ или $g_{sj} = \overline{f_n^i}$; $s, j = \overline{1, 8}$; $i = \overline{1, b}$, а выбор функции или её отрицания зависит от значения индикатора σ_{sj} .

Представляет интерес подбор соотношений индикаторов σ_{sj} и порождающих функций f_n^i , чтобы для полученных новых функций от $n + 3$ переменных выполнялись следующие свойства:

- а) сохранение свойства платовидности;
- б) обеспечение роста устойчивости;
- в) рекурсивное воспроизведение конструкции.

В [5] автором была построена конструкция с примерами начальных функций для случая $b = 4$ различных функций, удовлетворяющая приведённым условиям, отличительной особенностью которой является то, что рассматривается случай порождающих функций с пересекающимися носителями спектра всех порождающих функций, в то время как в большинстве из построенных ранее конструкций порождающие функции обладали непересекающимися носителями спектра. В [6, 7] возможности использования данной конструкции были расширены.

Не менее интересен случай, когда нет двоичных наборов, содержащихся в носителях спектров всех порождающих функций f_n .

Мощность носителя спектра каждой функции возрастает в 4 раза, поэтому из равенства Парсеваля ($\sum_{u \in V_n} W_f^2(u) = 4^n$) следует, что

амплитуда платовидности также должна увеличиться в 4 раза. Случаи нуля и двух ненулевых коэффициентов Уолша отбросим сразу, т.к. 0 и 2 меньше 4. Остаются варианты четырех и шести коэффициентов.

Естественно возникает вопрос существования рекурсивных конструкций с начальными функциями, для которых каждый двоичный набор содержится в носителях спектра ровно 6 и ровно 4 или 6 функций.

Утверждение 1. *Не существует 8 платовидных m -устойчивых функций от n переменных, каждый набор носителя спектра которых содержится ровно в 6 из 8 носителей спектра этих функций.*

Набросок доказательства Предположим, что такие функции существуют. Согласно равенству Парсеваля мощность носителя спектра каждой порождающей функции f_n^i , $i = \overline{1, 8}$, равна в точности 4^{n-c} . Функций всего 8, поэтому сумма мощностей спектров равна $8 \cdot 4^{n-c}$, т.е. является степенью двойки.

С другой стороны каждая строка носителя спектра любой из порождающих функций f_n^i , $i = \overline{1, 8}$, содержится в спектре ровно 6 функций, следовательно суммарная мощность спектров кратна 6. Противоречие.

Утверждение 2. *Не существует рекурсивных конструкций, удовлетворяющих условиям рассматриваемой модели, для которых каждый двоичный набор длины n содержится в носителях спектра только 0, 4 или 6 из 8 порождающих функций.*

Набросок доказательства Рассмотрим 8 порождающих функций. Пусть ровно k двоичных наборов длины n содержится в носителях спектра каких-то (не обязательно совпадающих) 6 порождающих функций f_n^i , $i = \overline{1, 8}$, а ровно l наборов — в носителях спектра каких-то 4 функций. Тогда по равенству Парсеваля

$$6k \cdot 2^{2c} + 4l \cdot 2^{2c} = 8 \cdot 2^{2n}.$$

Нами установлено, что если удастся построить новые функции f_{n+3}^s , то в носителе спектра каждой из них будет в точности $2 \cdot (k + l)$ наборов, т.е.

$$2(k + l) \cdot 2^{2c+4} = 2^{2n+6}.$$

Из этих двух уравнений нетрудно видеть, что $k = 0$.

Таким образом, рекурсивных конструкций с начальными функциями, для которых каждый двоичный набор содержится в носителях спектра ровно 6 и ровно 4 или 6 функций, не существует.

Список литературы

1. Fedorova M., Tarannikov Yu. On the constructing of highly nonlinear resilient Boolean functions by means of special matrices // Progress in Cryptology — Indocrypt 2001, Chennai, India, December 16–20, 2001, Proc., Lecture Notes in Computer Science. — V. 2247. — P. 254–256.
2. Pasalic E., Maitra S., Johansson T., Sarkar P. New constructions of resilient and correlation immune Boolean functions achieving upper bounds of nonlinearity // WCC2001 International Workshop on Coding and Cryptography, Paris, January 8–12, 2001. Electronic Notes in Discrete Mathematics — V. 6.
3. Tarannikov Yu. New constructions of resilient boolean functions with maximal nonlinearity // Fast Software Encryption. 8th International Workshop, FSE 2001, Yokohama, Japan, April 2–4, 2001. Lecture notes in computer science. — V. 2355. — P. 66–77.
4. Zheng Y., Zhang X. M. Improved upper bound on the nonlinearity of high order correlation immune functions // Selected Areas in Cryptography, 7th Annual International Workshop, SAC2000, Lecture Notes in Computer Science. — V. 2012. — P. 264–274.
5. Хинко Е. В. Об одной рекурсивной конструкции платовидных устойчивых булевых функций с шагом числа переменных 3 // ПДМ. — 2016. — № 1 (31). — С. 92–103.
6. Хинко Е. В. О двух новых рекурсивных конструкциях платовидных устойчивых булевых функций // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.). — С. 401–403.
7. Хинко Е. В. О расширении возможностей конструкции платовидных m -устойчивых булевых функций // Интеллектуальные системы и их приложения. — 2016. — Т. 20, вып. 4. — С. 110–116.

СПИСОК ПЛЕНАРНЫХ ДОКЛАДОВ, ПРОЧИТАННЫХ НА СЕМИНАРЕ

- В. Н. Чубариков (Москва)** *Арифметика и криптография*
- А. А. Евдокимов (Новосибирск)** *Полнота множества слов и структурированное кодирование через запреты в задачах дискретной математики*
- Н. П. Долбилин (Москва)** *От локальной идентичности к глобальной симметрии*
- Н. П. Редькин (Москва)** *Оценки сложности булевых функций с малым числом единиц*
- С. Н. Селезнева (Москва)** *Конъюнктивные формы для предикатов на конечных множествах, их свойства и некоторые применения*
- Д. С. Малышев (Нижний Новгород)** *Граничные классы: что делает сложную задачу на графах простой?*
- А. В. Черемушкин (Москва)** *Свойства сильно зависимых функций, связанные с неповторной суперпозицией*
- А. М. Ревякин (Москва), А. Н. Исаченко (Минск)** *Матроиды и их некоторые приложения*
- А. А. Часовских (Москва)** *О проблеме полноты в классах линейных автоматов над конечными полями*
- М. А. Иорданский (Нижний Новгород)** *Классы графов с операциями*
- М. Д. Ковалев (Москва)** *О теореме Кемпе и вопросах геометрии шарнирных конструкций*
- А. Д. Яшунский (Москва)** *Булевы преобразования бернуллиевских случайных величин*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Пленарные доклады

А. А. Евдокимов Полнота множества слов и структурированное кодирование в задачах дискретной математики	4
Н. П. Долбилин От локальной идентичности к глобальной симметрии	13
Н. П. Редькин О сложности реализации булевых функций с малым числом единиц	23
С. Н. Селезнева Конъюнктивные формы для предикатов на конечных множествах, их свойства и некоторые применения	27
А. М. Ревякин, А. Н. Исаченко Матроиды и их некоторые приложения	37
А. А. Часовских О проблеме полноты в классах линейных автоматов над конечными полями	50
М. А. Иорданский Классы графов с операциями	60
М. Д. Ковалев О теореме Кемпе и вопросах геометрии шарнирных конструкций	70
А. Д. Яшунский Булевы преобразования бернуллиевских случайных величин	83

Секция

«Синтез, сложность и надежность управляющих систем»

М. Ф. Аблаев О свойстве коллизия устойчивости квантовой функции	92
В. Б. Алексеев, А. А. Назаров Нижняя оценка билинейной сложности умножения матриц размеров 2×2 и $2 \times t$ над конечными полями	95
М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова, Т. А. Шорникова О надежности схем в базисе, содержащем существенную линейную функцию	98
М. А. Алехина, С. М. Грабовская, Ю. С. Гусынина Об асимптотически оптимальных по надежности схемах, при неисправностях типа 0 на выходах элементов	100
Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, Д. В. Фастовец, В. Ф. Лукичев Функции булевой и многозначной логики на языке квантовой информатики	102
Ю. В. Бородина Легкотестируемые схемы в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «1» на выходах элементов	105

А. В. Бухман О применении SAT-решателей для проверки принадлежности булевых функций, заданных полиномами, одному замкнутому классу	107
С. Ф. Винокуров, А. С. Францева Сложность и сложные функции в классах полиномиальных форм булевых функций	109
С. Б. Гашков Быстрые алгоритмы решения уравнений степени не выше 4 в некоторых конечных полях	112
А. А. Ефимов Верхняя оценка энергопотребления объемных схем в классе булевых операторов	116
Д. В. Кафтан, А. А. Вороненко Тестирование поляризуемых функций	119
Ю. А. Комбаров Нижняя оценка сложности линейной функции в одном бесконечном базисе	121
С. А. Корнеев О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции	123
Н. Н. Косовский, Т. М. Косовская Дискретная постановка задачи о сложности вычисления расстояния между хаусдорфовыми пространствами	126
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович О сложности систем функций k -значной логики в двух бесконечных базисах	129
Е. В. Кудрявцев, М. А. Федоткин Синтез и оптимизация управляющей системы обслуживания неоднородных требований	132
И. М. Маннапов, Л. И. Сафина, К. Р. Хадиев Квантовое улучшение алгоритма построения деревьев решений C5.0 для задач классификации	135
К. А. Попков О проверяющих и диагностических тестах для контактных схем	137
И. С. Сергеев О сложности монотонных схем для симметрических пороговых функций	140
Т. Р. Сытдыков, Г. В. Калачев Сложность синтеза многослойных схем	142
Ю. Г. Таразевич Алгебраический синтез гиперконтактных и контактно-трансформаторных схем	145
В. А. Титов, С. А. Ложкин О поведении функции Шеннона для глубины функций алгебры логики в стандартном базисе	149
Д. Э. Хзмалян, С. А. Ложкин О сложности реализации стандартных мультиплексорных функций в некоторых классах контактных схем	152
А. В. Чашкин О сложности частичных булевых функций	154
И. П. Чухров Минимизация булевых функций для мер сложности полиномиального порядка роста	158
С. В. Шалагин, Б. Ф. Эминов Представление множеств стохастических матриц с заданными свойствами на основе автономного вероятностного автомата	161
С. В. Шалагин, А. Р. Нурутдинова Применение алгоритма «прямого-обратного хода» для идентификации цепей Маркова	164

Секция «Функциональные системы»

В. Б. Алексеев О некоторых интервалах решетки замкнутых классов в частичной k -значной логике	168
Д. Н. Бабин О решетке замкнутых классов автоматов с операцией суперпозиции	171
О. С. Дудакова О классах частичных монотонных функций трехзначной логики	173
Д. Г. Мещанинов На пути к полной классификации нелинейных по модулю k функций P_k	175
И. В. Савицкий Арифметизация регистровых машин со счетчиками	178
М. В. Старостин О классах самодвойственных функций неявно предполных в P_k	182
Л. Н. Сысоева Квазиуниверсальный инициальный булев автомат с 4 константными состояниями	184
А. В. Черемушкин Группа автотопий сильно зависимых n -арных полугрупп	187
А. Д. Яшунский Единственность предельной точки в алгебрах бернуллиевских распределений	190

Секция «Комбинаторный анализ»

Л. Г. Афраимович, М. Д. Емелин Решение задачи оптимального комбинирования двух допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях	193
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова Применение T -моделей и T -диаграмм в комбинаторике	196
А. С. Гаспарян Комбинаторные тождества и неравенства многомерно-детерминантного типа	199
В. П. Ильев, С. Д. Ильева Комбинаторные оптимизационные задачи в булевых и геометрических решетках	202
А. Н. Исаченко Некоторые вопросы теории матроидов	205
Р. М. Колпаков Оптимальная стратегия решения частного случая задачи о ранце методом ветвей и границ	207
А. М. Ревякин, А. Н. Исаченко Ориентированные матроиды, некоторые свойства	211

Секция «Теория графов»

М. Б. Абросимов Об эффективности достаточных условий гамильтоновости типа Дирака	215
---	-----

Р. Бузату, С. Катаранчук О сложности вычисления максимального числа d -выпуклого покрытия графа	218
В. А. Воблый Явная формула для числа помеченных эйлеровых графов	219
М. А. Иорданский О сложности синтеза графов операциями клонирования	220
А. А. Лобов, М. Б. Абросимов О генерации графов, содержащих заданный подграф	223
И. В. Лось, М. Б. Абросимов Исследование вопроса критерия равенства экспонента регулярного примитивного графа числу 3	226
Д. С. Малышев Об алгоритмической сложности задач о раскраске в семействе наследственных классов графов, определяемых запретами небольшого размера	229
О. В. Моденова, М. Б. Абросимов О минимальных вершинных 1-расширениях двух ориентаций цикла	232
Д. Б. Мокеев О классах графов, имеющих нулевой разрыв двойственности в задачах об упаковке и вершинном покрытии путей	235
С. Н. Селезнева, М. В. Мельник Раскраски псевдoreгулярных графов	238
Д. В. Сироткин, Д. С. Малышев Некоторые локальные преобразования графов для задачи о независимом множестве и связанная с ними конструктивная теорема существования	241
Д. С. Талецкий О деревьях с заданным числом листьев и максимально возможным количеством наибольших независимых множеств	243
С. Н. Хорошеньких Алгоритм отображения графа в гиперболическое пространство с помощью машинного обучения	246

Секция «Математическая теория интеллектуальных систем»

А. Бернадотт О решении проблемы экспоненциального взрыва для одного класса регулярных языков	249
Г. В. Боков Базисы заданий логических систем пропозициональными исчислениями	252
И. К. Ведерников Почти полное прогнозирование одноэлементных сверхсобытий в многозначном алфавите	254
Е. М. Винарский, В. А. Захаров О задаче верификации для одного класса автоматов реального времени	257
Э. Э. Гасанов Оценки сложности конструирования многоцветных изображений клеточными автоматами	260
А. Р. Гнатенко, В. А. Захаров Верификация моделей реагирующих систем относительно одного расширения темпоральной логики CTL*	263

К. А. Голиков Алгоритм обучения систем с дискретным управлением	266
П. С. Дергач О прогрессивном покрытии натуральных чисел с рядом ограничений	269
Ш. Р. Жайлауова, В. А. Захаров О проблеме эквивалентности недетерминированных автоматов-преобразователей над однобуквенным выходным алфавитом	272
В. Н. Козлов Коды для изображений	275
А. Ю. Коновалов Понятие реализуемости на основе общерекурсивных функций	277
А. К. Муравьев О самоорганизующейся системе светофоров, обеспечивающих бесперебойное движение транспорта	280
А. С. Строгалов Об описании класса функций роста регулярных языков полиномиального типа	283

Секция «Дискретная геометрия»

М. Б. Банару Дискретная характеристика асп-гиперповерхностей косимплетического типа келеровых многообразий	286
И. С. Гуцул Орбифолды, пополняющие гиперболическую структуру на дополнении к зацеплению Уайтхеда	288
Ф. Л. Дамиан, В. С. Макаров, П. В. Макаров Геометрия линейных гиперболических 3-многообразий	292
Н. Ю. Ероховец Комбинаторика и гиперболическая геометрия трехмерных многогранников: фуллерены и многогранники А. В. Погорелова	295
Е. А. Заморзаева Классификация изоэдрических разбиений для гиперболической группы сдвигов рода два	298
М. Д. Ковалев О проекциях конфигурационных пространств шарнирных механизмов	300
Я. В. Кучериненко, В. С. Макаров Об одном четырехмерном изоэдре, ограниченном многогранниками Иванова Q_1	303
С. А. Лавренченко, А. М. Магомедов Комбинаторная флексируемость 2-мерных симплициальных комплексов	307
В. С. Макаров, П. В. Макаров О многогранниках с правильными гранями в пространстве Лобачевского	310
И. Х. Сабитов Многочлены объема для многогранников некоторых комбинаторных типов	312
В. И. Субботин О двух подклассах многогранников с ромбическими вершинами	315

Секция
«Теория кодирования
и математические вопросы
теории защиты информации»

А. В. Галатенко, В. А. Носов, А. Е. Панкратьев Построение подстановок с полным дифференциалом	317
А. А. Евдокимов Технология визуализации математических и генетических символьных последовательностей на графах де Брейна	319
А. Б. Фролов, Н. А. Давыдова Об условиях вскрытия и безопасности схемы Блома	323
Е. В. Хинко О несуществовании конструкций платовидных устойчивых булевых функций с некоторыми параметрами	326
Список пленарных докладов, прочитанных на семинаре ...	330