

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН  
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

# ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Материалы XVI Международной конференции

*(Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.)*

Нижний Новгород  
Издательство Нижегородского госуниверситета  
2011

УДК 519.7  
ББК 22.18  
П 78

*Под общей редакцией*  
Ю. И. Журавлева

П 78      **Проблемы теоретической кибернетики. Материа-**  
**лы XVI Международной конференции** (Нижний Нов-  
город, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю. И. Журавлева. —  
Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверсите-  
та, 2011. — 586 с.

ISBN 978-5-91326-161-8

Сборник содержит доклады, представленные на XVI Международ-  
ной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний  
Новгород, 20–25 июня 2011 г.), организованной при поддержке Россий-  
ского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-06036-г).

Для научных работников и специалистов в области математической  
кибернетики, дискретной математики, информатики и их приложений.

УДК 519.7  
ББК 22.18

*Редакционная группа:*

В. Б. Алексеев, О. М. Касим-Заде, В. Н. Шевченко

*Ответственный за выпуск:* Н. Ю. Золотых

*Издание осуществлено при финансовой поддержке*  
*Российского фонда фундаментальных исследований*  
*по проекту № 11-01-06036-г*



ISBN 978-5-91326-161-8

© Нижегородский госуниверситет  
им. Н. И. Лобачевского, 2011

## Содержание

<i>М. Б. Абросимов</i> Об одной гипотезе, связанной с вершинными расширениями соединений графов . . . . .	16
<i>Я. В. Акулов</i> О классах булевых функций, замкнутых относительно опе- рации расширенной суперпозиции . . . . .	20
<i>В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров</i> О расстояниях от максимально-нелинейных булевых функ- ций до почти аффинных функций . . . . .	24
<i>В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова</i> Полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве для некоторых классов графов . . . . .	28
<i>М. А. Алехина, С. М. Грабовская</i> О методах повышения надежности схем и неветвящихся про- грамм . . . . .	30
<i>М. А. Алехина, Д. М. Клянчина</i> Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \& x_2^b$ . . . . .	33
<i>О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов</i> К проблеме оптимизации процесса управления в системах с переменной структурой . . . . .	38
<i>Л. Г. Афраймович</i> Приближенный алгоритм решения многоиндексных транс- портных задач с декомпозиционной структурой . . . . .	42
<i>А. В. Баркалов, Н. В. Шестакова</i> Оценка скорости сходимости одной итеративной процедуры решения биматричной игры $2 \times 2$ . . . . .	46
<i>О. Ю. Барсукова</i> О надежности и сложности сумматора порядка $n$ . . . . .	50
<i>С. Р. Беджанова</i> Полные проверяющие тесты для схем, реализующих дизъ- юнкцию . . . . .	54

<i>П. П. Бондаренко</i>	
Минимальные вершинные расширения цепей с вершинами двух типов . . . . .	55
<i>В. А. Бондаренко, А. В. Николаев</i>	
О связи между классом гиперграфов специального вида и свойствами вершин релаксаций разрезного многогранника .	58
<i>Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова</i>	
Интерполяционные взаимно обратные соотношения и обоб- щение формулы Ворпицкого . . . . .	62
<i>Ю. В. Бородина</i>	
Синтез легкотестируемых схем для систем булевых функций из некоторых классов . . . . .	67
<i>Д. Б. Буй, Ю. А. Богатырёва</i>	
Теория мультимножеств: операции, структура, вычислимость	69
<i>Д. Б. Буй, И. Н. Глушко</i>	
Обобщенная табличная алгебра, обобщенные исчисления строк и доменов и их эквивалентность . . . . .	73
<i>Д. Б. Буй, С. В. Компан</i>	
Формализация наследования в объектно-ориентированных базах данных. Простое и множественное наследование . . .	77
<i>Д. Б. Буй, С. В. Компан</i>	
Формализация объектов, классов, методов в объектно- ориентированных базах данных . . . . .	81
<i>Д. Б. Буй, А. В. Пузикова</i>	
Полнота аксиоматики Армстронга . . . . .	85
<i>А. В. Бухман</i>	
Полиномиальные алгоритмы для распознавания сохранения некоторых множеств функциями, представленными полино- мами . . . . .	88
<i>С. И. Веселов</i>	
О фасетах бимодулярного полиэдра . . . . .	91
<i>В. Ю. Винник, Т. С. Парфирова</i>	
Суперпозиции ациклических программ . . . . .	92
<i>Н. В. Власов</i>	
О сложности мультиплексорной функции в классе формул .	96

<i>А. В. Власова</i>	
Об эволюционных параметрах конечных динамических систем, ассоциированных с графами . . . . .	98
<i>В. А. Воблый</i>	
Аналог формулы Моллоуса–Риордана для помеченных эйлеровых графов . . . . .	102
<i>А. А. Вороненко, Д. В. Чистиков</i>	
Расшифровка бесповторных функций запросами тождественности . . . . .	105
<i>М. Н. Вялый, С. П. Тарасов</i>	
О сложности задач регулярной реализуемости . . . . .	109
<i>А. В. Гавриков</i>	
О минимальных эйлеровых реконструкциях ориентированных графов . . . . .	113
<i>С. Б. Гашков, И. С. Сергеев</i>	
О сложности монотонных вычислений действительных многочленов . . . . .	114
<i>С. Ю. Городецкий</i>	
Учет ограничений в триангуляционных методах многоэкстремальной оптимизации . . . . .	117
<i>С. М. Грабовская</i>	
О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих нелинейную функцию двух переменных . . . . .	122
<i>Д. В. Груздев</i>	
О разбиении множества всех триангуляций точечных конфигураций на 64 подкласса . . . . .	125
<i>В. И. Грунская, М. Ю. Тихончев</i>	
Автоматное распознавание отмеченных орграфов . . . . .	129
<i>Е. В. Гуревич, Л. Б. Тятаев</i>	
Анализ геометрических образов асинхронных автоматов . . . . .	133
<i>Д. А. Дагаев</i>	
Реализация формулами функций из некоторых классов трехзначной логики . . . . .	136
<i>А. Б. Дайняк</i>	
О графах с заданным числом независимых множеств . . . . .	139

<i>Г. А. Донец</i>	Задачи комбинаторного распознавания . . . . .	142
<i>О. С. Дудакова</i>	О порождающих системах специального вида для предположенных классов монотонных функций $k$ -значной логики . . . . .	145
<i>А. Г. Дьяконов</i>	Задачи теории интерполяции, возникающие в алгебраическом подходе к распознаванию . . . . .	147
<i>А. А. Евдокимов, С. Е. Кочемазов, И. В. Отпущенников, А. А. Семенов</i>	Символьные алгоритмы решения булевых уравнений в применении к исследованию дискретных моделей генных сетей .	151
<i>А. А. Евдокимов, А. Л. Пережогин</i>	Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети . . . . .	154
<i>В. А. Емеличев, В. В. Коротков</i>	Анализ чувствительности векторной инвестиционной булевой задачи с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа	159
<i>А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин</i>	Применение оптимизационных алгоритмов для одного класса обратных задач атмосферного электричества . . . . .	162
<i>Л. П. Жильцова, И. М. Мартынов</i>	О свойствах деревьев вывода для стохастической КС-грамматики, имеющей вид «цепочки» . . . . .	166
<i>И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина</i>	О некоторых алгоритмах минимизации, основанных на отсечении множеств . . . . .	169
<i>В. А. Замираев</i>	Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка . . . . .	173
<i>Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков</i>	О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции . . . . .	176
<i>А. В. Зорин</i>	Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков . . . . .	179

<i>М. А. Иорданский</i>	
Функциональные построения в теории графов . . . . .	183
<i>А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко</i>	
Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках . . . . .	187
<i>А. В. Калинин, М. И. Сумин, А. А. Тюхтина</i>	
Оптимизационные методы решения прямых и обратных задач для квазистационарных электромагнитных процессов . .	191
<i>Е. О. Карманова</i>	
О конгруэнциях графов . . . . .	195
<i>К. Д. Кириченко</i>	
Свойства шаблонов минимизации полиномиальных форм булевых функций . . . . .	198
<i>Д. И. Коган, Ю. С. Федосенко, Н. А. Дуничкина</i>	
Бикритериальные задачи обслуживания mobile-процессором рассредоточенных в одномерной рабочей зоне объектов . . .	202
<i>Л. М. Коганов</i>	
Проверка методом передаточной функции одной перечислительной теоремы А. М. Каменецкого . . . . .	205
<i>И. Б. Кожухов, Ю. И. Кожухова</i>	
О продолжениях частичных полигонов . . . . .	207
<i>С. С. Коляда</i>	
О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов . . . . .	209
<i>Д. Д. Комаров</i>	
Реберные 1-расширения некоторых деревьев . . . . .	211
<i>Ю. А. Комбаров</i>	
О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в некотором базисе .	215
<i>Е. В. Константинова, А. Н. Медведев</i>	
Циклы длины девять в Рапсаке-графе . . . . .	218
<i>О. М. Копытова</i>	
Неисправности автоматов, сохраняющие их поведение . . . .	222
<i>Е. В. Коротков</i>	
Поиск вставок в бактериальных генах . . . . .	226

<i>В. В. Костерин</i>	Фрактальные методы оценки пробега автомобиля в системах спутникового мониторинга . . . . .	230
<i>В. В. Кочергин</i>	Некоторые оценки сложности вентильных схем с кратными путями для недоопределенных матриц . . . . .	235
<i>А. А. Кочжаров, Л. И. Сенникова</i>	Модели и задачи структурного распознавания в исследованиях социальных сетей . . . . .	239
<i>В. М. Краснов</i>	Оценки сложности 1-самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций . . . . .	242
<i>Т. И. Краснова</i>	О конъюнкторной сложности самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций . . . . .	246
<i>Н. Н. Кузюрин</i>	Онлайновая упаковка прямоугольников в полосы . . . . .	250
<i>Е. А. Куликова</i>	Сведение двух подклассов систем линейных неравенств к задачам распределения ресурсов . . . . .	252
<i>А. Н. Курганский</i>	Связь вычислительных и динамических свойств коллективов автоматов в дискретной среде . . . . .	255
<i>С. А. Лавренченко</i>	Построение квадрангуляций поверхностей с заданными свойствами . . . . .	259
<i>В. Б. Ларионов</i>	О надструктуре некоторых классов функций $k$ -значной логики	263
<i>В. К. Леонтьев</i>	Параметры Чоу . . . . .	266
<i>И. В. Лисаченко, В. И. Сумин</i>	Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости и их применения . . . . .	268
<i>О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Яценко</i>	$\rho$ -уравновешенные булевы функции и их свойства . . . . .	272



<i>С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов</i>	
Поведение функции Шеннона для задержки в одной модели схем из функциональных элементов . . . . .	277
<i>С. А. Ложкин, В. А. Коноводов</i>	
О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования . . . . .	281
<i>А. М. Магомедов</i>	
Условия непрерывной реберной раскрашиваемости ассоциированных графов . . . . .	284
<i>А. А. Мазуров</i>	
О стационарных классах функций трехзначной логики . . . .	286
<i>А. И. Майсурадзе</i>	
Исследование метода главных компонент с дополнительными метрическими ограничениями . . . . .	290
<i>А. Н. Максименко</i>	
Об универсальных свойствах многогранника разрезов . . . .	294
<i>Д. С. Мальшев</i>	
Конечно определенные минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании . . . .	297
<i>Н. К. Маркелов</i>	
О сложности периодических функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов . . . . .	301
<i>Д. О. Матов</i>	
Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов . . . . .	303
<i>Г. А. Махина</i>	
Оценка обобщающей способности для монотонных алгоритмов классификации . . . . .	307
<i>Б. Ф. Мельников</i>	
Итерации конечных языков и недетерминированные конечные автоматы . . . . .	311
<i>Ю. В. Меркин</i>	
О вычислении сложности по Арнольду двоичных слов . . . .	315
<i>А. В. Михайлович</i>	
О замкнутых классах функций трехзначной логики, порожденных периодическими симметрическими функциями . . . .	319

<i>О. А. Мишулина, И. А. Круглов</i>	
Метод принятия решения комитетом нейронных сетей при решении плохо обусловленных задач восстановления функциональных зависимостей . . . . .	323
<i>Д. Б. Мокеев</i>	
Упаковки и покрытия 3-путей . . . . .	327
<i>Е. В. Морозов, Д. С. Романов</i>	
О тестах относительно локальных линейных слипаний входов схем . . . . .	330
<i>Р. Г. Мубаракзянов</i>	
О сложности некоторых функций для вероятностных вычислений . . . . .	334
<i>А. С. Нагорный</i>	
О свойствах теоретико-множественных операций над предполными классами трехзначной логики . . . . .	336
<i>Т. А. Новикова, В. А. Захаров</i>	
О применении антиунификации подстановок для проверки эквивалентности программ . . . . .	340
<i>А. Р. Нурутдинова, С. В. Шалагин</i>	
Распознавание подклассов марковских автоматов на основе последовательностей состояний конечной длины . . . . .	344
<i>Д. Ю. Панин</i>	
О некоторых свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики . . . . .	349
<i>В. И. Пантелеев</i>	
Об одной последовательности мультиклонов . . . . .	352
<i>А. В. Панюков, Т. А. Панюкова</i>	
Применение дополнений паросочетаниями для задачи коммивояжера . . . . .	355
<i>Н. А. Перязев</i>	
Теория Галуа для клонов и суперклонов . . . . .	359
<i>В. И. Петренко</i>	
Построение графов-обструкций ограниченного ориентированного рода . . . . .	363

<i>Р. И. Подловченко</i>	Конечные автоматы и алгебраические модели программ с позиции разрешимости проблемы эквивалентности . . . . .	368
<i>В. В. Подымов, В. А. Захаров</i>	О двухленточных машинах, описывающих полугруппы с левым сокращением . . . . .	372
<i>В. Н. Потапов</i>	О мощности компонент корреляционно-иммунных функций, совершенных раскрасок и кодов . . . . .	376
<i>Е. А. Пряничникова</i>	Алгебры языков, представимых в размеченных графах . . .	380
<i>А. М. Ревякин</i>	Структурные свойства комбинаторных систем, описываемых субмодулярными функциями . . . . .	384
<i>М. Б. Резников, А. И. Цветков</i>	Синтез стратегий выбора объектов в линейной зоне обслуживания двух mobile-процессоров . . . . .	388
<i>А. М. Романов</i>	О гамильтоновых циклах в графах минимальных расстояний совершенных кодов . . . . .	392
<i>Д. С. Романов</i>	О проверяющих тестах относительно перестановок переменных в булевых функциях . . . . .	396
<i>Д. С. Романов</i>	О синтезе схем, допускающих проверяющие тесты константной длины . . . . .	400
<i>В. С. Рублев, А. В. Смирнов</i>	$NP$ -полнота задачи о наибольшем кратном потоке . . . . .	403
<i>В. С. Рублев, Е. А. Смирнова</i>	Оптимизация вычислений объектных запросов системы управления данными DIM . . . . .	408
<i>О. А. Садовников</i>	Уточненные оценки функции Шеннона в некоторых базисах схем из функциональных элементов, вложенных в единственный куб . . . . .	412

<i>А. А. Сапоженко</i>	
К вопросу о числе совершенных кодов . . . . .	416
<i>С. В. Сапунов</i>	
О взаимодействии мобильных агентов с топологической сре- дой . . . . .	419
<i>В. Г. Саргсян</i>	
Максимальная мощность $(k, l)$ -множества свободного от сумм в циклической группе . . . . .	422
<i>Я. Ю. Сафонова</i>	
Использование графовых моделей при распараллеливании метода Холецкого для решения разреженных симметрич- ных СЛАУ . . . . .	426
<i>С. Н. Селезнева</i>	
О сложности $k$ -значных функций в одном классе полиномов	430
<i>С. В. Сидоров</i>	
О подобии некоторых верхнетреугольных матриц над коль- цом целых чисел . . . . .	434
<i>В. В. Слободской</i>	
Моделирование работы ациклического алгоритма на много- процессорной вычислительной системе . . . . .	437
<i>А. В. Смирнов</i>	
Потоки в кратных сетях специального вида . . . . .	441
<i>Т. Г. Смирнова</i>	
О структуре матриц оптимального локально-префиксного кодирования языков . . . . .	445
<i>П. И. Стецюк</i>	
Релаксационный субградиентный метод минимизации овраж- ных выпуклых функций . . . . .	449
<i>Ю. М. Суворова, Е. В. Коротков</i>	
Граница смены триплетной периодичности в гене как об- ласть потенциальной склейки . . . . .	454
<i>В. И. Сумин</i>	
Метод вольтерровых функционально-операторных уравне- ний в теории оптимального управления распределенны- ми системами . . . . .	457

<i>М. И. Сумин</i>	О регуляризованной теореме Куна–Таккера и ее применении в оптимальном управлении и некорректных задачах . . . . .	461
<i>В. П. Тарасова</i>	Оптимальный поиск экстремальной области функции . . . . .	465
<i>Е. А. Татаринцов</i>	Восстановление графа агентом с ограниченными ресурсами	469
<i>В. А. Твердохлебов</i>	Диагностика управляющих автоматов со счетно-бесконечными множествами состояний . . . . .	473
<i>Е. Е. Трифонова</i>	О построении восстановлений баз данных для некоторых классов формул-ограничений . . . . .	477
<i>М. А. Трушников</i>	Об одной задаче теории расписаний . . . . .	481
<i>Д. В. Трущин</i>	Об оценках глубины $\alpha$ -пополнений систем функций трехзначной логики . . . . .	484
<i>А. Ю. Улесова</i>	О сложности односторонних клеточных схем фиксированной высоты с кратными входами . . . . .	487
<i>Т. И. Федоряева</i>	Разнообразие шаров в графах с фиксированными числом вершин и диаметром . . . . .	491
<i>Ю. С. Федосенко, А. С. Кумова, Д. В. Минаев</i>	Задача синтеза стратегий обслуживания потока объектов в системе с накопительным компонентом . . . . .	495
<i>А. М. Федоткин</i>	Управляющие конфликтные системы и аппроксимация потока Гнеденко–Коваленко . . . . .	499
<i>М. А. Федоткин, Е. В. Кудрявцев</i>	Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением . . . . .	503
<i>М. А. Федоткин, М. А. Рачинская</i>	Исследование математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова–Яблонского . . . . .	508

<i>М. А. Федоткин, А. А. Федоткин</i>	
Кибернетический подход к изучению выходных процессов управления потоками Бартлетта . . . . .	512
<i>О. В. Хамисов</i>	
Построение глубоких отсечений в булевом программировании	516
<i>В. Е. Хачатрян, Я. Г. Великая</i>	
Решение проблемы обобщенной минимизации для многолен- точных автоматов с одной существенной лентой . . . . .	520
<i>Р. В. Хелемендик</i>	
О сведениях задачи распознавания выполнимости формул логики линейного времени к распознаванию выполнимости формул логики высказываний . . . . .	523
<i>А. Н. Черепов</i>	
Свойства непрерывных детерминированных функций с за- держкой . . . . .	527
<i>А. В. Чернов</i>	
О равномерной поточечной оценке приращения решения управ- ляемого функционально-операторного уравнения . . . . .	530
<i>Б. В. Чокаев</i>	
О сложности распознавания предикатов в трехзначной логике	534
<i>С. В. Шалагин</i>	
Сложность обобщенной распределенной полиномиальной модели на базе системы многочленов над конечными полями	539
<i>И. К. Шаранхаев</i>	
О сравнении базисов при формульном представлении буле- вых функций . . . . .	543
<i>Я. А. Шарифов</i>	
Задача оптимального управления для систем с нелокальны- ми условиями . . . . .	545
<i>Н. К. Шатохина</i>	
Восстановление графа мозаичной структуры агентами . . . .	548
<i>В. И. Шевченко</i>	
О диагностике отождествления переменных в формулах бу- левых функций . . . . .	552

<i>В. Н. Шевченко</i>	О сложности задач целочисленного линейного программирования с ограниченными минорами . . . . .	554
<i>В. Н. Шевченко, М. Е. Сморкалов</i>	Численное нахождение количественных характеристик некоторых $\{0, 1\}$ -матриц . . . . .	556
<i>Г. В. Шевченко</i>	О достаточности принципа максимума Понтрягина для одной нелинейной задачи оптимального управления . . . . .	560
<i>Д. С. Шелухин</i>	Свойства минимальных нумераций корневых ордеревьев с выделенной вершиной . . . . .	564
<i>А. Е. Шиганов</i>	Некоторые оценки сложности двоичных решающих диаграмм	568
<i>Л. А. Шоломов</i>	Декомпозиция недоопределенных данных . . . . .	570
<i>М. С. Шуплецов</i>	О сложности реализации предикатов из некоторых классов предикатными схемами . . . . .	573
<i>А. Д. Яшунский</i>	О скорости сходимости квазигрупповых свёрток распределений вероятностей . . . . .	577

## Об одной гипотезе, связанной с вершинными расширениями соединений графов

М. Б. Абросимов

mic@rambler.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

*Неориентированным графом* называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное множество (множество вершин), а  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на  $V$  (множество ребер).

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением* ( $k$  — натуральное)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1)  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением  $G$ , то есть граф  $G$  вкладывается в каждый подграф графа  $G^*$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин;
- 2)  $G^*$  содержит  $n + k$  вершин, то есть  $|V^*| = |V| + k$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

*Соединением* двух графов  $G_1 = (V_1, \alpha_1)$  и  $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ , не имеющих общих вершин, называется граф

$$G_1 + G_2 := (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Граф  $G_t = (V_t, \alpha_t)$  называется *тривиальным  $k$ -расширением* графа  $G = (V, \alpha)$ , если граф  $G_t$  получается из графа  $G$  добавлением  $k$  вершин, соединением их со всеми вершинами графа  $G$  и друг с другом, то есть граф  $G_t$  есть соединение графа  $G$  и полного графа  $K_k = (V_k, V_k \times V_k)$ :

$$G_t = (V_t, \alpha_t) = (V \cup V_k, \alpha \cup V_k \times V_k \cup V \times V_k \cup V_k \times V).$$

Очевидно, что тривиальное  $k$ -расширение графа является и его вершинным  $k$ -расширением, причем  $|V_t| = |V| + k$ .

Понятие минимального вершинного  $k$ -расширения введено на основе понятия оптимальной  $k$ -отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом в работе [1] при построении модели отказоустойчивости, основанной на графах. Введем частичную операцию



получения минимального 1-расширения графа, считая ее неопределенной для графов, которые имеют более одного минимального 1-расширения.

Пусть  $G$  — некоторый граф, а  $G^*$  — его минимальное вершинное 1-расширение. Обозначим через  $(G)^*$  результат операции получения минимального вершинного 1-расширения графа  $G$ . Тогда если граф  $G$  имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, то  $(G)^* = G^*$ . В противном случае результат операции получения минимального вершинного 1-расширения считается неопределенным для графа  $G$ . Далее нас будут интересовать графы вида  $G + G^*$ .

Вершина называется *полной*, если она смежна со всеми остальными вершинами графа. У полного графа  $K_n$  все вершины полные. Граф называется *предполным*, если у него есть хотя бы одна полная вершина. Предполный граф можно записать в виде:  $K_1 + G$ . Класс предполных графов является достаточно большим (см. [2]):  $n$ -вершинных предполных графов столько же, сколько всего неизоморфных  $(n - 1)$ -вершинных графов.

Очевидно, что единственным минимальным вершинным 1-расширением графа  $K_n$  является граф  $K_{n+1}$ . Легко доказать три следующих результата.

**Теорема 1.** *Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа  $K_n + K_n^*$  имеет вид  $K_n^* + K_n^*$ , причем справедлива запись:*

$$\begin{aligned} (K_n + K_n^*)^* &= (K_n + K_{n+1})^* = K_{2n+1}^* = \\ &= K_{2n+2} = K_{n+1} + K_{n+1} = K_n^* + K_n^*. \end{aligned}$$

Вполне несвязным  $n$ -вершинным графом  $O_n$  называется граф с пустым отношением смежности. Очевидно, что единственным минимальным вершинным 1-расширением графа  $O_n$  является граф  $O_{n+1}$ .

**Теорема 2.** *Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа  $O_n + O_n^*$  имеет вид  $O_n^* + O_n^*$ , причем справедлива запись:*

$$(O_n + O_n^*)^* = (O_n + O_{n+1})^* = O_{n+1} + O_{n+1} = O_n^* + O_n^*.$$

Цепью  $P_n$  называется граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = v_1, v_2, \dots, v_n$  и  $\alpha = (v_i, v_j) : |i - j| = 1$ , а циклом  $C_n$  — граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = v_1, v_2, \dots, v_n$  и  $\alpha = (v_i, v_j) : |i - j| = 1 \cup (v_1, v_n), (v_n, v_1)$ . Легко убедиться (см. [1]), что цикл  $C_{n+1}$  является минимальным вершинным 1-расширением цепи  $P_n$ .

**Теорема 3.** *Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа  $P_n + P_n^*$  имеет вид  $P_n^* + P_n^*$ , причем справедлива запись:*

$$(P_n + P_n^*)^* = (P_n + C_{n+1})^* = C_{n+1} + C_{n+1} = P_n^* + P_n^*.$$

На основании предыдущих результатов представляется разумным высказать более общее предположение (см. [4]).

**Гипотеза 1.** Пусть  $G$  — произвольный граф, а  $G^*$  — некоторое его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида  $G + G^*$  всегда имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и оно может быть представлено в виде  $G^* + G^*$ , то есть справедлива запись:

$$(G + G^*)^* = G^* + G^*.$$

Однако оказалось, что ситуация является более сложной, и удалось найти два контрпримера к этой гипотезе. Обозначим однородный  $n$ -вершинный граф порядка  $p$  через  $R_{n,p}$ . В работе [2] доказывается, что при четном  $n$  существует единственный с точностью до изоморфизма однородный граф  $R_{n,n-2}$ , причем он имеет вид  $O_2 + \dots + O_2$ , а его единственным минимальным вершинным 1-расширением является тривиальное 1-расширение:  $K_1 + O_2 + \dots + O_2$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $G$  — граф вида  $R_{n,n-2}$ , а  $G^*$  — его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа  $G + G^*$  единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид  $R_{2n+2,2n}$ .*

Обозначим через  $G_{np2}$  граф, который получается из графа  $K_1 + O_2 + \dots + O_2$  удалением любого ребра, соединяющего две вершины степени  $n - 2$ . В работе [2] доказывается, что при нечетном  $n$  существует единственный с точностью до изоморфизма граф вида  $G_{np2}$ , причем такой граф имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: вида  $O_2 + O_2 + \dots + O_2$  и тривиальное  $K_1 + G_{np2}$ .

**Теорема 5.** *Пусть  $G$  — предполный граф вида  $G_{np2}$ , а  $G^*$  — его минимальное вершинное 1-расширение вида  $O_2 + \dots + O_2$ . Тогда граф  $G + G^*$  имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, одно из которых имеет вид  $G^* + G^*$ , а второе имеет вид  $O_2 + \dots + O_2$ .*

Таким образом, в общем виде гипотеза 1 является ошибочной. Однако для большого числа графов ее утверждение справедливо, что в дополнение к предыдущим теоремам 1–3 показывает и следующая

**Теорема 6.** Пусть  $G$  — граф, неизоморфный графу вида  $R_{n,n-2}$ , а его тривиальное 1-расширение  $G^*$  является и его минимальным вершинным 1-расширением. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид  $G^* + G^*$ , то есть справедлива запись:

$$(G + G^*)^* = G^* + G^*.$$

Много ли графов попадает под действие этой теоремы? Как показывает следующее утверждение, это почти все предполные графы, но и кроме них многие графы имеют минимальное вершинное 1-расширение, которым является их тривиальное 1-расширение. Так, например, по материалам работы [3] для 7-вершинных графов: 405 графов из 1043 графов имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение; для 6-вершинных: 65 из 155; для 5-вершинных: 10 из 33.

**Следствие.** Пусть  $G$  — произвольный предполный граф не вида  $G_{nr2}$ , а  $G^*$  — его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида  $G + G^*$  имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и оно может быть представлено в виде  $G^* + G^*$ , т. е. справедлива запись:  $(G + G^*)^* = G^* + G^*$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. C.25, №9. — P. 875–884.
- [2] Абросимов М. Б. Минимальные  $k$ -расширения предполных графов // Известия вузов. Математика. — 2003. — №6 (493). — С. 3–11.
- [3] Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения 4-, 5-, 6- и 7-вершинных графов. Саратов: СГУ, 2000. 26 с. Деп. в ВИНТИ 06.09.2000, № 2352 В00.
- [4] Абросимов М. Б. Минимальные расширения графов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 2001.

## О классах булевых функций, замкнутых относительно операции расширенной суперпозиции

Я. В. Акулов

smileyarik@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

В работе рассматривается задача о реализации булевых функций формулами специального вида. Вводится понятие пополнения систем булевых функций. Получено описание всех классов булевых функций, замкнутых относительно введенной операции.

Э. Пост получил полное описание семейства замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов функций двузначной логики [1, 2]. Как показал Пост, мощность этого множества является счетной. Напротив, известно [3], что множество всех замкнутых классов  $k$ -значной логики при  $k \geq 3$  имеет континуальную мощность. В связи с этим исследование множества замкнутых классов многозначной логики сопряжено со значительными трудностями. В ряде работ рассматриваются другие операции замыкания, позволяющие получить более просто устроенное множество замкнутых классов. Обзор некоторых результатов, полученных в этом направлении, см., например, в [4]. Данная работа относится к этому направлению исследований. Вводится понятие операции расширенной суперпозиции, и рассматриваются системы булевых функций, получаемые путем пополнения замкнутых классов с помощью этой операции. Необходимые определения можно найти в [5]. Обозначения для замкнутых классов взяты согласно работам [6, 7]. Более развернутое описание свойств расширенной суперпозиции можно найти в [8].

Пусть  $F$  — множество булевых функций, содержащее все селекторные функции и замкнутое относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Будем называть такие множества *инвариантными классами*. Равенство функций будем понимать с точностью до несущественных переменных. Поэтому операцию введения несущественных переменных в определении инвариантного класса можно опустить. Обозначим через  $\mathcal{F}$  семейство всех инвариантных классов

булевых функций. Очевидно, что всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от классов  $C$ ,  $C_0$  и  $C_1$ , является инвариантным.

Пусть  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\mathfrak{A} \subseteq P_2$ . Пару таких множеств  $(F, \mathfrak{A})$  будем называть *типом* булевых функций. Определим понятие *формулы над типом*  $U = (F, \mathfrak{A})$  индуктивно.

1. Выражение  $g(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ , где  $g \in F$ ;  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  — символы переменных,  $n \geq 1$ , является формулой над  $U$ . Такие формулы будем называть *тривиальными* формулами над  $U$ .
2. Пусть  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  — формулы над  $U$ ,  $n \geq 1$ , а  $f \in \mathfrak{A}$ . Выражение  $\Phi$  вида  $f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  является формулой над  $U$ . Будем называть  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  подформулами формулы  $\Phi$ . Формулу  $\Phi$  и все подформулы формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  будем также называть подформулами формулы  $\Phi$ .

Заметим, что всякая формула над типом  $(F, \mathfrak{A})$  является формулой над множеством  $F \cup \mathfrak{A}$  и поэтому реализует некоторую булеву функцию. Способ реализации булевых функций формулами указанного вида будем называть операцией расширенной суперпозиции.

Пусть  $\mathfrak{A} \subseteq P_2$ ,  $F \in \mathcal{F}$ . *Пополнением* системы  $\mathfrak{A}$  относительно класса  $F$  назовем множество всех булевых функций, реализуемых нетривиальными формулами над типом  $(F, \mathfrak{A})$  (обозначение  $[\mathfrak{A}]_F$ ). Отметим, что если  $F$  состоит только из селекторных функций, то  $[\mathfrak{A}]_F = [\mathfrak{A}]$ . Несложно доказать, что  $[\mathfrak{A}]_F = [[\mathfrak{A}]]_F$ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только пополнения замкнутых классов. Будем называть тип  $(F, A)$  *полным* (в  $P_2$ ), если  $[A]_F = P_2$ . В работе [8] получен критерий полноты для произвольного типа булевых функций.

Будем называть типы булевых функций  $(A, F')$  и  $(A, F'')$  эквивалентными, если  $[A]_{F'} = [A]_{F''}$ . Будем называть тип  $(A, F)$  булевых функций *замкнутым*, если  $[[A]_F]_F = [A]_F$ . Здесь  $A$  — замкнутый класс, а  $F$  — инвариантный класс булевых функций.

**Лемма.** Тип  $(A, F)$  замкнут тогда и только тогда, когда он эквивалентен типу  $(A, [F])$ .

Заметим, что, вообще говоря, пополнение  $[A]_F$  не всегда обладает свойствами замыкания. Пополнение  $[A]_F$  обладает свойствами замыкания тогда и только тогда, когда тип  $(A, F)$  замкнут. Из леммы следует, что всякий замкнутый тип булевых функций эквивалентен некоторому типу  $(A, F)$ , где  $A$  и  $F$  — замкнутые классы булевых

функций. Будем называть класс  $B$  булевых функций  $R$ -замкнутым, если существуют такие два замкнутых класса булевых функций  $A$  и  $F$ , что  $B = [A]_F$ . Данная работа посвящена описанию всех  $R$ -замкнутых классов булевых функций.

Обозначим через  $\overline{T}_{01}$  множество всех булевых функций, принимающих нулевое значение на единичном наборе и единичное значение на нулевом наборе. Пусть  $\overline{L}_{01} = L \cap \overline{T}_{01}$ . Обозначим через  $\mathfrak{T}$  множество, состоящее из классов булевых функций  $T_{01} \cup \overline{T}_{01}$ ,  $L_{01} \cup \overline{L}_{01}$ , а также классов, получающихся из них добавлением констант.

Пусть  $A$  — замкнутый класс булевых функций. Будем обозначать через  $l(A)$  множество всех булевых функций  $h(x_1, \dots, x_n)$ , таких, что существует функция  $g(x_1, \dots, x_n) \in A$ , такая, что  $h \leq g$ . Положим  $\mathfrak{S} = \{l(S), l(S_{01}), l(SM)\}$ .

Обозначим через  $AS$  множество всех функций, принимающих одинаковые значения на любых двух противоположных наборах. Положим  $AS_0 = AS \cap T_0$ ,  $AS_1 = AS \cap T_1$ . Положим  $\mathfrak{Z} = \{S \cup AS, S \cup AS_0, S \cup AS_1\}$ .

Пусть  $F$  — некоторый замкнутый класс булевых функций. Обозначим через  $G_F^m$  ( $m = 2, 3, \dots, \infty$ ) множество всех булевых функций  $g(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 1$ , удовлетворяющих следующему условию: для любых  $m$  наборов, на которых функция  $g(x_1, \dots, x_n)$  принимает нулевое значение, существует функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in F$ , также принимающая на этих наборах нулевое значение. Обозначим через  $\mathfrak{G}$  множество, состоящее из всевозможных классов вида  $G_F^m$ , классов, получающихся из них пересечением с классами  $[T_0]_F$ ,  $[M]_F$ , а также классов, двойственных перечисленным.

Пусть  $NK$  — множество всех булевых функций, состоящее из константы 0 и таких функций, что их можно представить в виде  $x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$ ,  $n \geq 1$ , где  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$ . Обозначим через  $\mathfrak{K}$  множество, состоящее из классов  $NK$ ,  $NK \cup \{1\}$ , а также двойственных к ним.

Пусть  $A$  — замкнутый класс. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — булева функция и она представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1, \dots, x_n) \& \dots \& g_k(x_1, \dots, x_n), \quad k \geq 1,$$

где  $g_i(x_1, \dots, x_n) \in A$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Обозначим через  $K(A)$  множество всех функций, представимых в таком виде. Обозначим через  $\mathfrak{L}$  множество, состоящее из классов  $K(L)$ ,  $K(L_0)$ ,  $K(L_1)$ ,  $K(L_{01})$ ,  $K(SL)$ ,

классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных к перечисленным.

Обозначим через  $\mathfrak{F}_2$  множество всех замкнутых классов булевых функций. Несложно показать, что множества  $\mathfrak{T}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{F}_2$  не пересекаются. Сформулируем основной результат работы.

**Теорема.** *Множество  $F$  булевых функций является  $R$ -замкнутым классом тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$F \in \mathfrak{T} \cup \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{K} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{F}_2.$$

Автор выражает благодарность профессору А.Б. Угольникову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, № 3. — P. 163–185.
- [2] *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton-London: Princeton Univ. Press, 1941. — V. 5. — P. 122.
- [3] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
- [4] *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. — 2004. — Вып. 13. — С. 59–112.
- [5] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.
- [6] *Угольников А. Б.* Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008.
- [7] *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Математика. — 1988. — № 7 (314). — С. 79–88.

- [8] Акулов Я. В. О полноте систем функций для классов расширенной суперпозиции // Вестник МГУ. Математика. Механика.— 2011.— № 1.

## О расстояниях от максимально-нелинейных булевых функций до почти аффинных функций

В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров

vbalekseev@rambler.ru, rustamomarov@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Булевы функции широко применяются в криптографии, в частности при построении различных систем шифрования. При атаках на эти системы часто пользуются «слабостями» этих функций. Одной из слабостей булевой функции является ее «близость» к классу аффинных функций. Мерой «удаленности» функции от этого класса является ее *нелинейность*. Обзор имеющихся результатов о нелинейности можно найти в книге [1].

Пусть  $n$  — произвольное натуральное число. Через  $V_n$  будем обозначать векторное пространство наборов длины  $n$  с компонентами из  $\{0, 1\}$  с операцией  $\oplus$  покомпонатного сложения векторов по модулю 2.

**Определение 1.** Пусть  $f$  — булева функция от  $n$  переменных, то есть  $f : V_n \rightarrow \{0, 1\}$ . *Весом*  $wt(f)$  булевой функции  $f$  называется количество наборов, на которых функция  $f$  равна 1.

**Определение 2.** Пусть  $f, g$  — булевы функции от  $n$  переменных. *Расстоянием* от булевой функции  $f$  до булевой функции  $g$  называется величина  $dist(f, g) = wt(f \oplus g)$ . *Расстоянием от  $f$  до множества  $M$  булевых функций от  $n$  переменных* называется величина  $dist(f, M) = \min_{g \in M} dist(f, g)$ .

**Определение 3.** Пусть  $x \in V_n, y \in V_n$ . Через  $\langle x, y \rangle$  будем обозначать *скалярное произведение*  $x$  и  $y$ :  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 \oplus \dots \oplus x_ny_n$  (здесь  $\oplus$  — это сложение по модулю 2).

**Определение 4.** Булева функция  $f$  от  $n$  переменных называется *аффинной*, если существуют  $a = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$  и  $c \in \{0, 1\}$ , такие, что  $f(x) = \langle a, x \rangle \oplus c = a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n \oplus c$ . Множество всех аффинных



булевых функций от  $n$  переменных будем обозначать  $A_n$ . Отметим, что для любой аффинной булевой функции  $f(x)$  от  $n$  переменных, отличной от константы,  $wt(f(x)) = 2^{n-1}$ .

**Определение 5.** Расстояние  $dist(f, A_n)$  от булевой функции  $f(x)$  от  $n$  переменных до множества  $A_n$  аффинных булевых функций называется *нелинейностью* функции  $f(x)$  и обозначается через  $N_f$ .

**Лемма 1** [1]. Для любой булевой функции  $f(x)$  от  $n$  переменных справедливо неравенство  $N_f \leq 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$ . Для четных  $n$  эта оценка достижима.

**Определение 6.** Булевы функции  $f(x)$  от  $2n$  переменных, для которых  $N_f = 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$ , называют *максимально-нелинейными* функциями (этот класс называют также классом *бент-функций*).

**Определение 7.** Через  $AE_n$  будем обозначать класс всех почти аффинных функций  $g(x)$  от  $n$  переменных, а именно функций вида  $g(x) = \langle a, x \rangle \oplus c \oplus x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$ , где  $a \in V_n$ ,  $c \in \{0, 1\}$  и  $\{i_1, \dots, i_k\}$  — произвольное подмножество (возможно, пустое) множества  $\{1, \dots, n\}$ .

**Определение 8.** Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Класс *Мэйорана–Мак–Фарланда* определяется как класс всех булевых функций  $f(x, y)$  от  $2n$  переменных вида  $f(x, y) = \langle \pi(y), x \rangle \oplus \Phi(y)$ , где  $\pi$  — произвольная подстановка на множестве  $V_n$ , а  $\Phi(y)$  — произвольная булева функция от  $n$  переменных.

Известно, что все функции из класса Мэйорана–Мак–Фарланда являются максимально-нелинейными [1]. В статье [2] доказана следующая теорема.

**Теорема 2** [2]. Для всех функций  $f(x, y)$  из класса Мэйорана–Мак–Фарланда от  $2n$  переменных при всех  $n \geq 2$  выполняются неравенства

$$2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \leq dist(f, AE_{2n}) \leq 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}, \quad (1)$$

причем обе границы достижимы. (При  $n = 1$   $dist(f, AE_{2n}) = 0$  для всех  $f$ .)

Оценка (1) сохраняется, если к классу приближающих функций  $AE_{2n}$  добавить все функции, аффинно эквивалентные им [3].

В данной работе мы будем рассматривать в качестве приближающего класс функций, у которых в полиноме Жегалкина присутствует не более двух нелинейных слагаемых произвольной степени.

**Определение 9.** Обозначим через  $AE_n^2$  класс функций от  $n$  переменных вида  $g(x) = \langle a, x \rangle \oplus c \oplus x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k} \oplus x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_m}$ , где  $a \in V_n$ ,  $c \in \{0, 1\}$ ,  $\{i_1, \dots, i_k\}$  и  $\{j_1, \dots, j_m\}$  — произвольные подмножества множества  $\{1, \dots, n\}$ .

**Теорема 3.** Расстояние от функций из класса Мэйорана–Мак–Фарланда от  $2n$  переменных до класса  $AE_{2n}^2$  не меньше чем

$$\text{dist}(f, AE_{2n}^2) \geq 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}.$$

*Доказательство.* Пусть  $f$  — некоторая функция из класса Мэйорана–Мак–Фарланда от  $2n$  переменных  $x_1, \dots, x_{2n}$ , а  $g(x) = \langle a, x \rangle \oplus c \oplus X_A \oplus X_B$  — произвольная функция из класса  $AE_{2n}^2$ , где  $X_A = x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$  и  $X_B = x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_m}$ ,  $A = \{i_1, \dots, i_k\}$  и  $B = \{j_1, \dots, j_m\}$ . Обозначим  $f'(x) = f(x) \oplus \langle a, x \rangle \oplus c$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{wt}(f(x) \oplus g(x)) &= \text{wt}(f'(x)) + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)}; \\ \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} &= \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1 \\ X_B = 0}} (-1)^{f'(x)} + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 0 \\ X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} = \\ &= \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1}} (-1)^{f'(x)} + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} - 2 \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_{A \cup B} = 1}} (-1)^{f'(x)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что  $\{x : x \in V_{2n}, X_A = 1\} = \{x \oplus \xi^A : x \in L_A\} = \xi^A + L_A$ , где  $L_A = \{x : x_i = 0, i \in A\}$ , а  $\xi^A \in V_{2n} : \xi_i^A = 1, i \in A, \xi_i^A = 0, i \notin A$ .

Тогда для некоторой функции  $\tilde{f}(y)$  [1, с. 240] верно

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1}} (-1)^{f'(x)} &= \sum_{x \in \xi^A + L_A} (-1)^{f'(x)} = \\ &= 2^{\dim L_A - n} \sum_{y \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^A, y \rangle} = \\ &= 2^{n-|A|} \sum_{y \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^A, y \rangle}. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем (2) с учетом (3)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \in V_{2^n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} &= \\
&= 2^{n-|A|} \sum_{y \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^A, y \rangle} + 2^{n-|B|} \sum_{y \in L_B^\perp} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^B, y \rangle} - \\
&- 2^{n-|A \cup B|+1} \sum_{y \in L_{A \cup B}^\perp} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^{A \cup B}, y \rangle}.
\end{aligned}$$

Заметим, что функция  $f(x)$  содержится в классе Мэйорана–Мак–Фарланда, следовательно,  $wt(f'(x)) \geq 2^{2n-1} - 2^{n-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
wt(f(x) \oplus g(x)) &\geq 2^{2n-1} - 2^{n-1} - 2^{n-|A|} \cdot 2^{|A|} - 2^{n-|B|} \cdot 2^{|B|} - \\
&- 2^{n-|A \cup B|+1} \cdot 2^{|A \cup B|} = 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора  $g(x)$  теперь получаем  $dist(f, AE_{2n}^2) \geq 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}$ .  $\blacksquare$

При более детальном разборе с рассмотрением многих случаев можно доказать следующую теорему.

**Теорема 4.** Минимальное расстояние от функций из класса Мэйорана–Мак–Фарланда от  $2n$  переменных до класса  $AE_{2n}^2$  равно

$$dist(f, AE_{2n}^2) = 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 6 \left( 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right) - 8$$

при  $n \geq 6$ . При  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  оно равно  $0, 0, 16, 88, 416$  соответственно.

При этом в классе Мэйорана–Мак–Фарланда существуют более устойчивые функции.

**Теорема 5.** Для функции  $f(x, y) = \langle x, y \rangle$  от  $2n$  переменных верно равенство

$$dist(\langle x, y \rangle, AE_{2n}^2) = 2^{2n-1} - 4 \cdot 2^{n-1}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Логачёв О. А., Сальников А. А., Яценко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. — М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

- [2] Алексеев В. Б., Омаров Р. Р. Исследование одного параметра булевых функций, близкого к нелинейности // Научные ведомости Белгородского государственного университета. — 2009. — Т. 15 (70), № 12/1. — С. 81–87.
- [3] Алексеев В. Б., Омаров Р. Р. О приближении одного класса максимально-нелинейных булевых функций почти линейными функциями // Тр. 8 Межд. Колмогоровских чтений. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. — С. 98–104.

## Полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве для некоторых классов графов

*В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова*

ave@uic.nnov.ru, DVZakh@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Через  $\mathbf{FT}_k$  обозначаем класс всех графов, не содержащих поддеревьев с  $k$  листьями. Одним из основных результатов настоящей работы является

**Теорема 1.** *При любом  $k$  задача о наибольшем независимом множестве для графов из класса  $\mathbf{FT}_k$  разрешима за полиномиальное время.*

Доказательство основано на следующем факте.

**Лемма.** *Если связный граф содержит не менее  $p$  вершин степени, большей 2, то в нем имеется поддерево с не менее чем  $\sqrt{\frac{p}{3}}$  листьями.*

*Доказательство.* Вершину степени, большей или равной трем, будем называть перекрестком. Пусть  $G$  — связный граф с  $p$  перекрестками. Выберем какую-нибудь вершину  $a$  степени, большей 1, и построим для графа  $G$  дерево кратчайших путей  $T$  с корнем в вершине  $a$ . Это дерево можно построить с помощью стандартной процедуры поиска в ширину, в нем расстояние  $d(x)$  от любой вершины  $x$  до корня равно расстоянию между этими вершинами в графе  $G$ . Допустим, дерево  $T$  имеет  $l$  листьев и  $l < \sqrt{\frac{p}{3}}$ . Тогда в дереве имеется  $l$  путей, соединяющих листья с корнем, эти пути покрывают все вершины графа. Среди них найдется путь  $P$ , содержащий не менее  $\frac{p}{l}$  перекрестков

графа. Каждый из этих перекрестков смежен хотя бы с одной вершиной вне пути  $P$ . Выберем для каждого перекрестка  $x$  на пути  $P$  одну из смежных с ним вершин  $f(x)$  вне пути  $P$ . Так как  $T$  — дерево кратчайших путей, то разность  $d(x) - d(f(x))$  может принимать только три значения:  $-1, 0, 1$ . Хотя бы одно из этих значений  $\sigma$  принимается не менее чем  $\frac{2}{3l}$  раз. Пусть  $M$  — множество тех перекрестков пути  $P$ , для которых  $d(x) - d(f(x)) = \sigma$ . На множестве  $M$  функция  $f$  инъективна. Поэтому путь  $P$  вместе с вершинами из  $M$  и ребрами графа, соединяющими их с вершинами пути, образуют дерево с не менее чем  $\frac{2}{3l} > \sqrt{\frac{2}{3}}$  листьями.  $\blacksquare$

Для класса графов  $\mathbf{X}$  его  $k$ -расширением назовем множество всех графов, из которых удалением не более  $k$  вершин можно получить графы из  $\mathbf{X}$ . Известно [1], что если задача о независимом множестве для графов из класса  $\mathbf{X}$  решается за полиномиальное время, то это верно и для его  $k$ -расширения при любом фиксированном  $k$ . Из леммы следует, что класс  $\mathbf{FT}_k$  содержится в  $3k^2$ -расширении класса всех графов, у которых степени вершин не превосходят 2. Для таких графов задача о независимом множестве решается, очевидно, за линейное время. Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Нам не удалось усилить теорему 1 до случая, когда запрещаются только порожденные деревья с большим числом листьев. Для промежуточного случая вписанных поддеревьев получены частные результаты, формулировки которых приводятся ниже.

Поддерево некоторого графа называется вписанным, если никакие три вершины этого поддерева не порождают треугольника в графе. Класс всех графов, не содержащих вписанных поддеревьев с  $k$  листьями, обозначаем через  $\mathbf{FT}_k^*$ .

**Теорема 2.** При любом  $k$  задача о наибольшем независимом множестве для графов из класса  $\mathbf{FT}_k^*$ , не содержащих треугольников, разрешима за полиномиальное время.

**Теорема 3.** При любом  $k$  задача о наибольшем независимом множестве для субкубических графов из класса  $\mathbf{FT}_k^*$  разрешима за полиномиальное время.

Заметим, что из существования полиномиального алгоритма, решающего задачу о независимом множестве для всего класса  $\mathbf{FT}_k^*$ , следовала бы справедливость одного из бинарных вариантов гипотезы Шевченко [2], утверждающей, что задача целочисленного ли-

нейного программирования разрешима за полиномиальное время, если абсолютные величины миноров (расширенной) матрицы задачи ограничены сверху константой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00357.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.* О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 34–40.
- [2] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Наука, 1995.

### О методах повышения надежности схем и неветвящихся программ

*М. А. Алехина, С. М. Грабовская*

ama@sur.ru, swetazin@mail.ru

Пензенский государственный университет

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов (ФЭ) рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon \in (0; 1/2)$  подвержены инверсным неисправностям на выходах. При этом в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию  $\varphi$ , а в неисправном — функцию  $\bar{\varphi}$ . Для повышения надежности исходных схем Дж. фон Нейман использовал дублирование исходной схемы (3 экземпляра) и схему, реализующую функцию голосования (медиану)  $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ . Позднее для повышения надежности использовались схемы, реализующие функции  $x_1^{a_1}x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1}x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2}x_3^{a_3}$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

В этой работе будем рассматривать реализацию булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе  $B$ . Неветвящиеся программы с оператором условной остановки [2] отличаются от схем из ФЭ наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выпол-

нении определенного условия. Считаем, что оператор условной остановки срабатывает, когда на его вход поступает единица.

**Замечание 1.** Нетрудно видеть, что схемы из ФЭ являются частным случаем неветвящихся программ с оператором условной остановки, точнее, схема из ФЭ является программой, в которой нет ни одного оператора условной остановки.

Предположим, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все функциональные операторы программы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  подвержены инверсным неисправностям на выходах элементов.

Далее покажем (теорема 2), что для повышения надежности исходных программ, так же как в случае схем из ФЭ, можно использовать программы, реализующие функции  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Ненадежностью  $N(Pr)$  программы  $Pr$  назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы  $Pr$  при всевозможных входных наборах.

**Теорема 1** [3]. В произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$ , ненадежность которой  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ .

**Теорема 2.** Допустим, что в полном конечном базисе  $B$  любую булеву функцию  $f$  можно реализовать программой  $R_f$  с ненадежностью  $N(R_f) \leq P(\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . Пусть программа  $Pr_g$  реализует некоторую функцию вида  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2} x_3^{a_3}$  ( $a_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ), а  $N(Pr_g)$  — ненадежность программы  $Pr_g$ . Тогда программа

$$\begin{aligned} Pr_f : \\ y_1 &= f^{a_1}[R_1] \\ y_2 &= f^{a_2}[R_2] \\ y_3 &= f^{a_3}[R_3] \\ Pr_g(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

реализует функцию  $f$  и при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  выполняются неравенства

$$N(Pr_f) \leq N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon), \quad (1)$$

$$N(Pr_f) \leq N(Pr_g) + 81\varepsilon^2. \quad (2)$$

*Доказательство.* Пусть  $B$  — полный конечный базис, а  $f$  — произвольная булева функция. Обозначим через  $f^a$  функцию  $f$ , если  $a = 1$ , и функцию  $\bar{f}$ , если  $a = 0$ . Согласно условию функцию  $f^{a_i}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) можно реализовать программой  $R_i$ , функционирующей с ненадежностью  $N(R_i) \leq P(\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . Пусть программа  $Pr_g$  реализует некоторую функцию  $g$  вида  $g = x_1^{a_1}x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1}x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2}x_3^{a_3}$  ( $a_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ). Используя по одному экземпляру программ  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  и подпрограмму  $Pr_g(x_1, x_2, x_3)$ , построим для функции  $f$  неветвящуюся программу  $Pr_f$ .

Пусть  $\tilde{\beta}$  — произвольный входной набор программы  $Pr_f$ , а  $P(R_i, \tilde{\beta})$  — вероятности ошибок на выходах программ  $R_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) соответственно при входном наборе  $\tilde{\beta}$ . Обозначим  $P_i = P(R_i, \tilde{\beta})$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ясно, что  $\max\{P_1, P_2, P_3\} \leq \max\{N(R_1), N(R_2), N(R_3)\} \leq P(\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . Оценим вероятность ошибки  $P(Pr_f, \tilde{\beta})$  программы  $Pr_f$  на наборе  $\tilde{\beta}$ :

$$\begin{aligned}
P(Pr_f, \tilde{\beta}) &\leq (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) \cdot N(Pr_g) + \\
&+ [P_1(1 - P_2)(1 - P_3) + (1 - P_1)P_2(1 - P_3) + (1 - P_1)(1 - P_2)P_3] \cdot N(Pr_g) + \\
&+ [P_1P_2(1 - P_3) + (1 - P_1)P_2P_3 + P_1(1 - P_2)P_3] \cdot 1 + P_1P_2P_3 \cdot 1 \leq \\
&\leq [(1 - P_1)(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2(1 - P_3) + (1 - P_1)(1 - P_2)P_3] \cdot N(Pr_g) + \\
&+ [P_1P_2 + (1 - P_1)P_2P_3 + P_1(1 - P_2)P_3] \leq \\
&\leq [(1 - P_3)(1 - P_1P_2) + (1 - P_1)(1 - P_2)P_3]N(Pr_g) + [P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_3] \leq \\
&\leq [1 - \underbrace{P_1P_2}_{<0} + P_3 \underbrace{(2P_1P_2 - P_1 - P_2)}_{<0}] \cdot N(Pr_g) + 3P^2 \leq N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Тогда  $N(Pr_f) = \max_{\tilde{\beta}} P(Pr_f, \tilde{\beta}) \leq \max_{\tilde{\beta}} (N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon)) = N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon)$ , т. е.  $N(Pr_f) \leq N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon)$ . Таким образом, неравенство (1) доказано.

По теореме 1 функцию  $f^{a_i}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) можно реализовать схемой  $A_i$  (см. замечание 1), которая при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  функционирует с ненадежностью  $N(A_i) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ . Пусть  $M = \max\{N(A_1), N(A_2), N(A_3)\}$ . Тогда  $M \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ . Подставляя эту оценку для  $M$  в соотношение (1) вместо  $P(\varepsilon)$  и учитывая условие  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , получим неравенство  $N(Pr_f) \leq N(Pr_g) + 81\varepsilon^2$ . ■



Таким образом, соотношение (1), доказанное ранее [4] для схем из ФЭ, выполняется для неветвящихся программ с оператором условной остановки. А для повышения надежности неветвящихся программ удобно использовать соотношение (2), которое следует из соотношения (1) и теоремы 1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies / Eds. C. Shannon, J. Mc. Carthy. — Princeton University Press, 1956 (Русский перевод: Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 68–139).
- [2] *Чайкин А. В.* О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.
- [3] *Алехина М. А., Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, кн. 5. — С. 25–35.
- [4] *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2006.

### Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \& x_2^b$

*М. А. Алехина, Д. М. Клянчина*

ama@sura.ru, davyda@bk.ru

Пензенский государственный университет

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе  $B$ , содержащем линейную функцию  $l(x_1, \dots, x_k)$  ( $k \geq 2$ ), существенно зависящую не менее чем от двух переменных, и некоторую функцию вида  $x_1^a \& x_2^b$   $a, b \in \{0, 1\}$ . Считаем, что схема реализует булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если при поступлении на входы схемы двоичного набора  $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение  $f(\tilde{a})$ . Допустим, что все элемен-

ты схемы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном – константу 0.

Пусть  $P_{\bar{f}(\bar{a})}(S, \bar{a})$  – вероятность появления  $\bar{f}(\bar{a})$  на выходе схемы  $S$ , реализующей булеву функцию  $f(\bar{x})$ , при входном наборе  $\bar{a}$ . Ненадежность  $P(S)$  схемы  $S$  определяется как максимальное из чисел  $P_{\bar{f}(\bar{a})}(S, \bar{a})$  при всевозможных входных наборах  $\bar{a}$ . Надежность схемы  $S$  равна  $1 - P(S)$ .

Пусть  $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$ , где  $S$  – схема, реализующая  $f(\bar{x})$ . Схему  $A$ , реализующую  $f$ , назовем *асимптотически оптимальной по надежности*, если  $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Далее докажем, что в рассматриваемых базисах  $B$  для почти всех булевых функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В работе [3] введено множество функций  $G_1$ , имеющих вид  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ ,  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Нетрудно проверить, что  $|G_1| = 8$ .

Обозначим через  $f^\sigma$  функцию  $f$ , если  $\sigma = 1$ , и функцию  $\bar{f}$ , если  $\sigma = 0$ , а схему, реализующую функцию  $f^\sigma$  ( $\sigma \in \{0, 1\}$ ), будем обозначать  $S^\sigma$ .

Пусть функция  $g \in G_1$  (т. е. функция  $g$  имеет вид  $g = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ ,  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ), а схема  $S_g$  реализует функцию  $g$ . Возьмем схемы  $S^{\sigma_i}$ , реализующие соответственно функции  $f^{\sigma_i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Соединим выход схемы  $S^{\sigma_i}$  с  $i$ -м входом схемы  $S_g$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), построенную схему обозначим  $\Phi(S^1, S^0)$ . Нетрудно проверить, что схема  $\Phi(S^1, S^0)$  реализует функцию  $f$ . Далее схему  $S^1$  будем обозначать  $S$ .

Операция  $\Phi$  по схемам  $S$  и  $S^0$ , реализующим булевы функции  $f$  и  $\bar{f}$  соответственно, строит схему  $\Phi(S, S^0)$ , реализующую функцию  $f$ . Результат  $n$ -кратного применения ( $n \in \mathbf{N}$ ) операции  $\Phi$  к схемам  $S$  и  $S^0$  будем обозначать  $\Phi^n(S, S^0)$ . Применение операции  $\Phi$  к некоторым схемам  $S$  и  $S^0$  при некоторых условиях на их ненадежности  $P(S)$  и  $P(S^0)$  приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема  $S$ . В том случае когда операция  $\Phi$  применяется только к схемам  $S$  (т. е. когда все числа  $\sigma_i = 1$ ), результат ее применения

будем обозначать  $\Phi(S)$ . Если же операция  $\Phi$  применяется только к схемам  $S^0$  (т. е. когда все числа  $\sigma_i = 0$ ), результат ее применения будем обозначать  $\Phi(S^0)$ .

В произвольном полном базисе справедливы леммы 1–3.

**Лемма 1** [1]. Допустим, что произвольную функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  с ненадежностью не больше  $p$  ( $p \leq 1/2$ ). Пусть  $S_g$  — схема, реализующая функцию  $g \in G_1$  с ненадежностью  $P(S_g)$  ( $P(S_g) \leq 1/2$ ), причем  $v_0$  и  $v_1$  — вероятности ошибок схемы  $S_g$  на наборах  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  и  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$  соответственно. Тогда схема  $\Phi(S, S^0)$  реализует функцию  $f$  с ненадежностью  $P(\Phi(S, S^0)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2$ .

**Лемма 2** [2]. Любую булеву функцию  $f$  можно реализовать такой схемой  $S$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  верно неравенство  $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ .

**Лемма 3** [3]. Пусть схема  $S_\varphi$  реализует функцию  $\varphi = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$ ,  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  с ненадежностью  $P(S_\varphi)$ , причем  $w_0, w_1$  — вероятности ошибок схемы  $S_\varphi$  на наборах  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0)$ ,  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1)$ . Тогда можно построить такую схему  $S_g$ , реализующую функцию  $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3)^{\sigma_3}$ , что  $P(S_g) \leq P(S_\varphi) + 2p_\oplus$  ( $p_\oplus = \max\{P(S_1), P(S_2)\}$ ,  $S_1$  — любая схема, реализующая функцию  $x_1 \oplus x_2$ ,  $S_2$  — любая схема, реализующая функцию  $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$  в рассматриваемом базисе), а для вероятностей ошибок  $v_1$  и  $v_0$  схемы  $S_g$  на наборах  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$  выполняются неравенства:  $v_1, v_0 \leq \max\{w_0, w_1\} + 2p_\oplus^2$ .

**Замечание.** Нетрудно проверить, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность не меньше  $\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ .

**Теорема.** Пусть полный конечный базис  $B$  содержит линейную функцию  $l(x_1, \dots, x_k)$  ( $k \geq 2$ ), существенно зависящую не менее чем от двух переменных, и некоторую функцию вида  $x_1^a \& x_2^b$ ,  $a, b \in \{0, 1\}$ . Тогда в базисе  $B$  любую функцию  $f$  можно реализовать такой схемой  $C$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  верно неравенство  $P(C) \leq \varepsilon + 100\varepsilon^2$ .

*Доказательство.* Поскольку базис  $B$  содержит линейную функцию  $l(x_1, \dots, x_k)$  ( $k \geq 2$ ), существенно зависящую не менее чем от двух переменных, подстановкой переменных из нее можно получить либо линейную функцию двух переменных  $l_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus c$ ,  $c \in$

$\{0, 1\}$ , либо линейную функцию трех переменных  $l_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c, c \in \{0, 1\}$ . Тогда, используя базисный элемент с функцией  $x_1^a x_2^b$  ( $a, b \in \{0, 1\}$ ), некоторую функцию вида  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \oplus x_3^{b_3}$  ( $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$ ) реализуем схемой  $S_\varphi$  из двух элементов. Покажем, как строится схема  $S_\varphi$ .

1. Допустим, что из функции  $l(x_1, \dots, x_k)$  ( $k \geq 2$ ) подстановкой переменных можно получить функцию вида  $l_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus c, c \in \{0, 1\}$ . Моделируя формулу  $l_2(x_1^a x_2^b, x_3)$ , строим схему  $S_\varphi$  из двух элементов. Нетрудно видеть, что  $l_2(x_1^a x_2^b, x_3) = x_1^a x_2^b \oplus x_3 \oplus c = x_1^a x_2^b \oplus x_3^{\bar{c}}$ , т. е.  $b_1 = a, b_2 = b, b_3 = \bar{c}$ . Вычислим вероятности ошибок  $w_0$  на наборе  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 1)$  и  $w_1$  на наборе  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 0)$  на выходе схемы  $S_\varphi$  и получим  $w_0 = \varepsilon$  и  $w_1 = 0$ .

2. Допустим, что из функции  $l(x_1, \dots, x_k)$  ( $k \geq 2$ ) подстановкой переменных можно получить функцию вида  $l_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c, c \in \{0, 1\}$ . Моделируя формулу  $l_3(x_1^a x_2^b, x_2, x_3)$ , строим схему  $S_\varphi$  из двух элементов. Нетрудно видеть, что  $l_3(x_1^a x_2^b, x_2, x_3) = x_1^a x_2^b \oplus x_3 \oplus (c \oplus \bar{b}) = x_1^a x_2^b \oplus x_3^{c \oplus \bar{b}}$ , т. е.  $b_1 = \bar{a}, b_2 = b, b_3 = c \oplus \bar{b}$ . Вычислим вероятности ошибок  $w_0$  на наборе  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 1)$  и  $w_1$  на наборе  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 0)$  на выходе схемы  $S_\varphi$  и получим  $w_0 = \varepsilon$  и  $w_1 = 0$ .

Таким образом, в каждом из двух случаев построена схема  $S_\varphi$ , для которой  $\max\{w_0, w_1\} = \varepsilon$ .

По условию  $B$  — полный базис, следовательно, функции  $(x_1 \oplus x_2)^{b_1}, (x_1 \oplus x_3)^{b_2} \in [B]$ . По лемме 2 реализуем их такими схемами  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, что  $P(S_1) \leq 5, 2\varepsilon$  и  $P(S_2) \leq 5, 2\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . Нетрудно видеть, что  $\varphi((x_1 \oplus x_2)^{b_1}, (x_1 \oplus x_3)^{b_2}, x_1) = (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3)^{b_3} = g \in G_1$ . Моделируя формулу  $\varphi((x_1 \oplus x_2)^{b_1}, (x_1 \oplus x_3)^{b_2}, x_1)$ , построим схему  $S_g$ , реализующую функцию  $g \in G_1$ . Нетрудно видеть, что  $P(S_g) \leq 2\varepsilon + 2 \cdot 5, 2\varepsilon = 12, 4\varepsilon$ . С помощью леммы 3 оценим вероятности ошибок  $v_0$  и  $v_1$  схемы  $S_g$  на наборах  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$  соответственно:  $v_0, v_1 \leq \max\{w_0, w_1\} + 2p_{\oplus}^2 \leq \varepsilon + 2(5, 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 54, 1\varepsilon^2$ .

По лемме 2 произвольную булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  с ненадежностью  $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ .

Если  $b_3 = 1$ , то возьмем три экземпляра схемы  $S$ , реализующей функцию  $f$ . Используя три экземпляра схемы  $S$  и схему  $S_g$ , построим схему  $\Phi(S)$ , которая реализует функцию  $f$ . Оценим ненадежность схемы  $\Phi(S)$ , используя лемму 1. Получим неравенство  $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leq \varepsilon + 54, 1\varepsilon^2 + 3(5, 2\varepsilon) \cdot 12, 4\varepsilon + 3(5, 2\varepsilon)^2 \leq$

$\varepsilon + 167\varepsilon^2 \leq 1,35\varepsilon$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . По схеме  $\Phi(S)$  построим схему  $\Phi^2(S)$ . По лемме 1 оценим ненадежность схемы  $\Phi^2(S)$ . Получим  $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 54, 1\varepsilon^2 + 3(1,35\varepsilon) \cdot 12, 4\varepsilon + 3(1,35\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 110\varepsilon^2 \leq 1,12\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . По схеме  $\Phi^2(S)$  построим схему  $\Phi^3(S)$ . По лемме 1 оценим ненадежность схемы  $\Phi^3(S)$ . Получим  $P(\Phi^3(S)) \leq \varepsilon + 54, 1\varepsilon^2 + 3(1,12\varepsilon) \cdot 12, 4\varepsilon + 3(1,12\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 100\varepsilon^2$ . Схема  $\Phi^3(S) = C$  — искомая.

Если  $b_3 = 0$ , то возьмем три экземпляра схемы  $S^0$ , реализующей функцию  $\bar{f}$ , и повторим рассуждения предыдущего абзаца. ■

Таким образом, из теоремы и замечания следует, что в рассматриваемых базисах все функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (кроме функций  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые можно реализовать абсолютно надежно, и, быть может, константы 0) можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. — Пенза: Информац.-издат. центр ПГУ, 2006.
- [2] Алехина М. А. О надежности схем в базисах, содержащих медиану // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — С. 13–17.
- [3] Алехина М. А., Васин А. В. О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия «Физико-математические науки». Казань: Изд-во Казанского университета. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 25–35.

## К проблеме оптимизации процесса управления в системах с переменной структурой

*О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов*

olga.antonovskaja@yandex.ru, pmk@unn.ac.ru

НИИ прикладной математики и кибернетики

Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Известно, что проблема выбора оптимальных значений параметров в таких нелинейных динамических системах, как синтезаторы частоты [1] при работе в заданном диапазоне частот, является центральной [2] и, в том числе, при синтезе комбинированного управления [3].

Настоящий доклад связан с практически важной прикладной задачей реализации надежной радиосвязи, в основе которой лежит использование управляемых синтезаторов частот (СЧ) [1], построенных на базе импульсных систем фазовой синхронизации. В таких системах используется широтно-импульсная модуляция (ШИМ) управляющего сигнала, и поэтому их математические модели (ММ) являются частным случаем систем с переменной структурой (СПС), порядок смены дифференциальных уравнений в которых определяется динамическими свойствами фазовых траекторий движения и реализуется в моменты переключения управляющих импульсов. Именно в силу этого обстоятельства изучение динамики ММ таких СЧ осуществляется на основе применения метода точечных отображений.

В настоящем докладе отмечаются основные моменты решения проблемы синтеза оптимального управления в системах управления указанного класса с помощью применения корневого критерия и метода функций Ляпунова. В отличие от обычного подхода к использованию корневого критерия и, в том числе, при выборе оптимальных значений параметров, в случае работы синтезатора в заданном (широком) диапазоне параметры характеристического уравнения, определяющего не только устойчивость, но и скорость переходных процессов, являются интервальными. Для исследования устойчивости при этом можно воспользоваться рекомендациями и приемами исследования робастных систем [4].

Анализ точечных отображений различных сечений подпространств, соответствующих постоянству величины управляющего

воздействия, в зависимости от параметров СЧ [5] показал, что в зависимости от параметров системы основному синхронному режиму соответствует устойчивая неподвижная точка одного из двух точечных отображений, для которых можно получить аналитические выражения функций последования. Но тогда, в общеметодологическом плане, исходное характеристическое уравнение принимает вид полинома

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^{n-k} \quad (\underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k), \quad (1)$$

в котором коэффициенты, вследствие зависимости от интервальных параметров, также интервальны. При замене  $p_{\text{нов}} = rp_{\text{ст}}$ ,

$$P_n(p) \rightarrow H(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^{n-k} \quad (\underline{b}_k \leq b_k \leq \bar{b}_k), \quad (2)$$

на плоскости корней при нахождении  $r = r_{\text{opt}}$  контур, относительно которого производится исследование (единичная окружность — для дискретных систем и мнимая ось — для непрерывных систем), не зависит от  $r$ , причем  $r$  выступает в роли параметра, по которому производится оптимизация, при этом

$$\underline{b}_k = \underline{a}_k r^{n-k}, \quad \bar{b}_k = \bar{a}_k r^{n-k}, \quad (3)$$

т. е. параметр  $r$  входит в коэффициенты  $H(p)$  существенно нелинейно, что и составляет основную сложность задачи [6].

Поскольку синтезатор частоты в современном физическом исполнении — дискретная система управления, то в общем случае при определении значения  $r = r_{\text{opt}}$  такого, что при  $r_{\text{opt}} \leq r \leq 1$   $H(p)$  устойчив, можно в соответствии с критерием Корсакова [6] ограничиться анализом условий невыхода в пространстве  $r, a_k$  за границы области устойчивости, если известно, что при  $r = 1$   $H(p)$  устойчив. В этом случае условие расположения в сторону устойчивости от границ  $N_+, N_-$  и  $N_\varphi$  соответствует выполнению неравенств  $H(+1) > 0$ ,  $(-1)^n H(-1) > 0$  и  $\det(A_k - B_k) > 0$ , где  $A_k$  и  $B_k$  — матрицы Корсакова полинома  $H(p)$  [7].

При рассмотрении выполнимости условия  $\det(A_k - B_k) > 0$  после замены в (3)  $b_k \rightarrow a_k r^{n-k}$  основная сложность состоит в нахождении выражения для  $\min_{a_k} \det(A_k - B_k) > 0$  и в общем случае сводится

к использованию приемов нелинейного программирования. В этой ситуации трудно переоценить примеры конкретного анализа определения  $r = r_{opt}$ , как это оказалось, в частности, в случае синтезатора частот с пропорционально-интегрирующим фильтром. В этом примере, несмотря на существенно нелинейное вхождение параметров в характеристическое уравнение, удалось получить аналитическое выражение не только для  $r = r_{opt}$ , но и для остальных выбираемых параметров, и, в том числе, для параметров фильтра. Последнее позволило получить фундаментальный результат, заключающийся в том, что в линейном приближении введение инерционности в цепи обратной связи, в отличие от безынтервального изменения параметров, может привести к ускорению переходных процессов. А в связи с тем, что увеличение диапазона интервальности приводит к расширению области фазового пространства, в которой реализуются переходные движения, принципиально существенной становится необходимость учета нелинейности исследуемой динамической системы.

В настоящем докладе предлагается использование для этой цели концепции применения функций Ляпунова к интервально-неопределенным системам [7]. Учет интервальности параметров с оценкой сверху размеров соответствующей области фазового пространства позволяет трансформировать постановку вопроса в задачу построения функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению [7]. Так, положительно определенная квадратичная форма будет функцией Ляпунова дискретной динамической системы в том и только том случае, когда

$$\max_{i=1, \dots, n} \{|z_i|^2 - 1\} \leq \max_{V=V_0} \frac{\Delta V}{V} < 0, \quad (4)$$

где  $z_i$  — корни характеристического уравнения, определяющего устойчивость системы  $|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ . При этом всегда существует такая квадратичная функция Ляпунова, для которой обеспечивается максимальный запас знакоотрицательности первой разности в силу уравнений системы [7]. Использование этой квадратичной функции Ляпунова позволило получить такие интервальные оценки параметров системы, при которых построенная функция является функцией Ляпунова системы с интервально изменяющимися коэффициентами. Оценки содержат абсолютные величины корней характеристического уравнения при одном конкретном значении па-



раметров системы из области устойчивости и зависят от элементов матрицы перехода к каноническим координатам.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин В. А., Малиновский В. И., Романов С. К. Синтезаторы частот с импульсно-фазовой автоподстройкой. — М.: Радио и связь, 1989.
- [2] Goryunov V. I. On the feedback parameter optimization for the robust stable frequency synthesizer // Progress of nonlinear science: Proceedings of International Conference, dedicated to the 100-th Anniversary of A.A. Andronov. V. 3. — Nizhny Novgorod, 2002. — P. 159–163.
- [3] Antonovskaya O. G., Goryunov V. I., Palochkin Yu. P. On the synthesis of combined control by nonlinear phenomena analysis for frequency synthesizer working in wide band // 2-nd IEEE International Conference on Circuits and Systems of Communications: Proceedings, — Moscow, 2004.
- [4] Джури Э. И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3–28.
- [5] Антоновская О. Г., Горюнов В. И. О влиянии диссипации энергии на динамику астатической системы с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала // Вестник ННГУ, Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. — № 4. — С. 141–145.
- [6] Корсаков Г. Ф. О количестве корней полинома вне круга // Математические заметки. — 1973. — Т. 13, № 1. — С. 3–12.
- [7] Антоновская О. Г., Горюнов В. И. К оптимизации алгоритма использования прямого метода Ляпунова при исследовании процессов в интервально-неопределенных системах // VIII Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»: Тезисы докладов. — М., 2004. — С. 12–13.

## Приближенный алгоритм решения многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой

*Л. Г. Афраимович*

levafraimovich@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматриваются вопросы решения многоиндексных задач (целочисленного) линейного программирования транспортного типа [1]. В качестве метода решения предлагается подход, основанный на сведимости многоиндексных транспортных задач к потоковым алгоритмам [2, 3, 4]. Для класса многоиндексных задач с декомпозиционной структурой строится схема сведения, позволяющая определить решение исходной многоиндексной задачи через циклическую декомпозицию потока минимальной стоимости вспомогательной потоковой задачи. На основании разработанного метода предлагается эвристический алгоритм поиска приближенного решения NP-трудных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

### Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [1]. Пусть  $s \in N$  и  $N(s) = \{1, 2, \dots, s\}$ . Каждому числу  $l$  поставим в соответствие параметр  $j_l$ , называемый индексом, который принимает значения из множества  $J_l = \{1, 2, \dots, n_l\}$ , где  $n_l \geq 2$ ,  $l \in N(s)$ . Пусть  $f = \{k_1, k_2, \dots, k_t\} \subseteq N(s)$ . Набор значений индексов  $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t})$  будем называть  $t$ -индексом, а множество всех  $t$ -индексов обозначим через  $E_f$ .

Пусть  $f' \subseteq f'' \subseteq N(s)$ , где  $f' = \{k'_1, k'_2, \dots, k'_{t'}\}$ ,  $f'' = \{k''_1, k''_2, \dots, k''_{t''}\}$ , тогда обозначим  $F_{f'} = (F_{f'})_{f'}$ , если  $F'_f = (j_{k'_1}, j_{k'_2}, \dots, j_{k'_{t'}})$ ,  $F''_f = (j_{k''_1}, j_{k''_2}, \dots, j_{k''_{t''}})$  и  $j'_{k'_i} = j''_{k''_i}$ ,  $i = \overline{1, t'}$ . Если  $F_{f'} \in E_{f'}$ ,  $F_{f''} \in E_{f''}$ , где  $f', f'' \subseteq N(s)$  и  $f' \cap f'' = \emptyset$ , то через  $F_{f'} F_{f''}$  обозначим такой набор, что  $F_{f'} F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$  и  $(F_{f'} F_{f''})_{f'} = F_{f'}$ ,  $(F_{f'} F_{f''})_{f''} = F_{f''}$ . Далее определим  $\bar{f} = N(s) \setminus f$ , тогда согласно введенному обозначению  $F_{N(s)} = F_f F_{\bar{f}}$ , если  $F_f = (F_{N(s)})_f$  и  $F_{\bar{f}} = (F_{N(s)})_{\bar{f}}$ .

Каждому набору  $F_f$  поставим в соответствие действительное число  $z_{F_f}$ ,  $F_f \in E_f$ . Данное отображение множества  $t$ -индексов  $E_f$  в множество действительных чисел является  $t$ -индексной матрицей и обозначается  $\{z_{F_f}\}$ .

Пусть  $M$  — заданное множество,  $M \subseteq 2^{N(s)}$ ;  $a_{F_{\bar{f}}}$ ,  $b_{F_{\bar{f}}}$  — заданные  $|\bar{f}|$ -индексные матрицы свободных коэффициентов,  $0 \leq a_{F_{\bar{f}}} \leq b_{F_{\bar{f}}}$ ,  $F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}$ ,  $f \in M$ ;  $\{c_{F_{N(s)}}\}$  — заданная  $s$ -индексная матрица коэффициентов целевой функции;  $\{x_{F_{N(s)}}\}$  —  $s$ -индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная транспортная задача линейного программирования формализуется как:

$$a_{F_{\bar{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\bar{f}}} \leq b_{F_{\bar{f}}}, \quad F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}, \quad f \in M; \quad (1)$$

$$x_{F_{N(s)}} \geq 0, \quad F_{N(s)} \in E_{N(s)}; \quad (2)$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Задачу (1)–(3) будем обозначать  $w(s; M; n_1, \dots, n_s; \{a_{F_{\bar{f}}}\}, \{b_{F_{\bar{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\})$ . Класс всех задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве  $M$  обозначим  $W(M)$ .

### Многоиндексные задачи с декомпозиционной структурой

Нас будет интересовать построение подклассов многоиндексных задач, которые могут быть сведены согласно концепции, введенной в [3], к потоковым задачам. Оказывается, что одним из таких подклассов является класс многоиндексных транспортных задач со специальной декомпозиционной структурой. Приведем формализацию данного класса.

**Определение 1.** Пусть  $M \subseteq 2^{N(s)}$  и  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ . Будем говорить, что  $M$  является  $f_1, f_2, \dots, f_k$ -декомпозиционным, если  $M \subseteq \{\bar{f}_i | i = \overline{1, k}\} \cup \{\bar{f}_i \cup \bar{f}_{i+1} | i = \overline{1, k-1}\}$ .

**Определение 2.** Пусть  $c_{F_{N(s)}}$  —  $s$ -индексная матрица и  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ . Будем говорить, что многоиндексная матрица  $\{c_{F_{N(s)}}\}$  является  $f_1, f_2, \dots, f_k$ -декомпозиционной, если найдутся такие многоиндексные матрицы  $\{d_{F_f}\}$ ,  $f \in B$ , что  $c_{F_{N(s)}} = \sum_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f}$ , где  $B = \{\bar{f}_i | i = \overline{1, k}\} \cup \{\bar{f}_i \cup \bar{f}_{i+1} | i = \overline{1, k-1}\}$ .

**Определение 3.** Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ , тогда через  $W^D(f_1, f_2, \dots, f_k)$  обозначим следующий класс многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой

$$\begin{aligned} W^D(f_1, f_2, \dots, f_k) = \\ = \{w(s; M; n_1, n_2, \dots, n_s; \{a_{F_j}\}, \{b_{F_j}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\}) \mid \\ M \text{ и } c_{F_{N(s)}} \text{ являются } f_1, f_2, \dots, f_k\text{-декомпозиционными}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ . Тогда существует алгоритм решения задач класса  $W^D(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , требующий  $O(|E_{N(s)}|^3 \log^2 |E_{N(s)}|)$  вычислительных операций.

Далее, если  $w$  — задача линейного программирования, то через  $w_Z$  обозначим соответствующую задачу целочисленного линейного программирования. Пусть  $W$  — произвольный класс задач линейного программирования. Соответствующий класс задач целочисленного линейного программирования определим как  $W_Z = \{w_Z \mid w \in W\}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ . Тогда класс  $W_Z^D(f_1, f_2, \dots, f_k)$  разрешим за полиномиальное время.

### Приближенное решение целочисленных многоиндексных задач

В общем случае многоиндексные задачи целочисленного линейного программирования являются NP-трудными [5]. Также известно, что в общем случае для многоиндексных задач целочисленного линейного программирования не существует полиномиальных  $\varepsilon$ -приближенных алгоритмов для любых  $\varepsilon \geq 0$ , иначе  $P=NP$  [6]. Более того, можно показать отсутствие эффективных приближенных алгоритмов даже в классе целочисленных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

**Теорема 3.** Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — разбиение множества  $N(s)$ . Тогда существует такое  $f_1, f_2, \dots, f_k$ -декомпозиционное множество  $M$ , что для задач класса  $W_Z(M)$  не существует полиномиального  $\varepsilon$ -приближенного алгоритма для любых  $\varepsilon \geq 0$ , иначе  $P=NP$ .

Для поиска приближенного решения NP-трудных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида предлагается следующий подход.

Будем искать многоиндексную матрицу стоимостей, обладающую требуемыми декомпозиционными свойствами и являющуюся наиболее «близкой» к матрице стоимостей общего вида исходной задачи. Далее находим решение вспомогательной задачи с исходной системой ограничений и найденной матрицей стоимостей. Для поиска решения вспомогательной задачи можно воспользоваться полиномиальным алгоритмом решения задач класса  $W_Z^D(f_1, f_2, \dots, f_k)$  (см. теорему 2). Найденное решение будет являться приближенным решением исходной многоиндексной задачи целочисленного линейного программирования. Полученное приближенное решение может быть использовано, например, как достижимая оценка при решении NP-трудных многоиндексных задач методом ветвей и границ.

Работе выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-3473.2010.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Многоиндексные задачи линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1982.
- [2] Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 2006. № 6. — С. 194–205.
- [3] Афраймович Л. Г. Циклическая сводимость многоиндексных систем линейных неравенств транспортного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. № 4. — С. 83–90.
- [4] Афраймович Л. Г. Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. — 2011. № 5 (принято к печати).
- [5] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
- [6] Crata Y., Spieksma F. C. R. Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // European Journal of Operational Research. — 1992. V. 60. — P. 273–279.

## Оценка скорости сходимости одной итеративной процедуры решения биматричной игры $2 \times 2$

*А. В. Баркалов, Н. В. Шестакова*

4nvsh@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Биматричная  $2 \times 2$  игра задается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

в которых строки соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы — стратегиям второго, а элементы матриц представляют собой выигрыши первого и второго игроков соответственно [1].

Пусть  $P = (p, 1 - p)$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ,  $Q = (q, 1 - q)$ ,  $0 \leq q \leq 1$ , — смешанные стратегии игроков в игре (1). Тогда решением игры (1) является решение  $(P^0, Q^0)$  системы неравенств (ситуация равновесия по Нэшу)

$$(\forall p \in [0, 1]) \quad E_1(P^0, Q^0) \geq E_1(P, Q^0),$$

$$(\forall q \in [0, 1]) \quad E_2(P^0, Q^0) \geq E_2(P^0, Q),$$

где символами  $E_1, E_2$  обозначены математические ожидания выигрышей первого и второго игроков соответственно. Введем для игры (1) стратегии

$$i \in \text{BR}(Q) = \text{Arg} \max_{1 \leq k \leq 2} E_1(k, Q), \quad j \in \text{BR}(P) = \text{Arg} \max_{1 \leq k \leq 2} E_2(P, k), \quad (2)$$

где

$$E_1(k, Q) = a_{k1}q + a_{k2}(1 - q), \quad E_2(P, k) = b_{1k}p + b_{2k}(1 - p).$$

Чистая стратегия  $i$  ( $j$ ) из (2) является наилучшим ответом первого (второго) игрока на известную смешанную стратегию партнера.

Для биматричной игры итеративный процесс Брауна можно определить следующим образом. Пусть игра (1) повторяется в дискретные моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ , причем в каждый момент

времени  $t > 0$  игроки выбирают текущие чистые стратегии в соответствии с (2), т. е.

$$i(t+1) \in \text{BR}(Q(t)), \quad j(t+1) \in \text{BR}(P(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $P(0), Q(0)$  — произвольные стратегии игроков,

$$P(t+1) = \frac{t}{t+1}P(t) + \frac{1}{t+1}P_{i(t+1)}, \quad Q(t+1) = \frac{t}{t+1}Q(t) + \frac{1}{t+1}Q_{j(t+1)} \quad (4)$$

$P_i, Q_j$  — смешанные стратегии, соответствующие чистым стратегиям  $i, j$  из (3).

Предельные точки последовательности  $\{(P(t), Q(t)), t = 1, 2, \dots\}$ , построенной по правилам (3), (4), являются ситуациями равновесия игры (1) (см., например, [2]).

Пусть в игре (1) имеется единственная вполне смешанная ситуация равновесия  $(P^0, Q^0)$  и  $a_{11} > a_{21}$ . Тогда множества  $\text{BR}$  из (2) будут определяться отношениями

$$\text{BR}(Q) = \begin{cases} 1, & q \geq q^0, \\ 2, & q < q^0, \end{cases} \quad \text{BR}(P) = \begin{cases} 2, & p \geq p^0, \\ 1, & p < p^0. \end{cases} \quad (5)$$

Примем, что в методе Брауна при выборе очередной чистой стратегии в моменты времени  $t > 1$  вместо (5) используются соотношения

$$\text{BR}(Q(t)) = \begin{cases} 1, & q(t) \geq q^0 + \delta(t), \\ 2, & q(t) \leq q^0 + \delta(t), \end{cases} \quad \text{BR}(P(t)) = \begin{cases} 2, & p(t) \geq p^0 + \varepsilon(t), \\ 1, & p(t) \leq p^0 + \varepsilon(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\delta(t) = \frac{q^0}{t} + \frac{j(t)-2}{t}$ , а  $\varepsilon(t) = \frac{p^0}{t} + \frac{i(t)-2}{t}$ .

Использование (6) для выбора чистой стратегии соответствует подстановке в (3) вместо точки  $(P(t), Q(t))$  той точки последовательности, которая получилась бы на следующем шаге итерационного процесса Брауна при сохранении текущей чистой стратегии — точки  $(\bar{P}(t+1), \bar{Q}(t+1))$ , которая получается из  $(P(t), Q(t))$  при  $\bar{i}(t+1) = i(t), \bar{j}(t+1) = j(t)$  («прогнозный шаг» [3]).

**Теорема.** В  $2 \times 2$  биматричной игре скорость сходимости к единственной ситуации равновесия итеративной процедуры (3), (4) с использованием соотношений (6) оценивается величиной  $O(t^{-1})$ , где  $t$  — количество шагов метода.

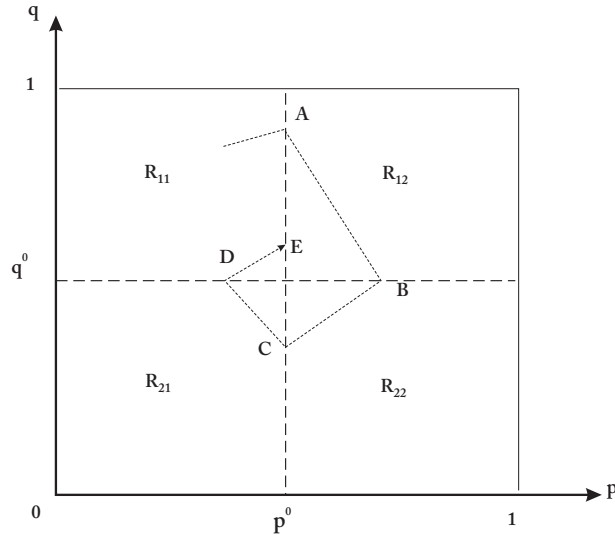


Рис. 1

*Доказательство.* Ограничимся случаем  $p^0 = \frac{1}{2}$ ,  $q^0 = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что в случае нестрогого выполнения неравенств в (6) сохраняется та чистая стратегия, которая выбиралась на предыдущем шаге.

Последовательность  $\{(P(t), Q(t)), t = 1, 2, \dots\}$ , порождаемая соотношениями (3), (4), может быть изображена в единичном квадрате  $0 \leq p \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$  [2].

Обозначим  $R_{21}$  прямоугольную область единичного квадрата  $p < p^0$ ,  $q < q^0$  и введем аналогичные обозначения для остальных прямоугольных областей единичного квадрата (рис. 1). Отметим, что в рассматриваемом случае точки последовательности  $\{(P(t), Q(t)), t = 1, 2, \dots\}$ , в которых происходит изменение направления движения, принадлежат внутренним границам областей  $R_{ij}$ . Отнесем к области  $R_{ij}$  ту границу, через которую траектория попадает в область. Тогда для точек  $(p, q)$  области  $R_{ij}$  выполняется  $i = \text{BR}(Q)$ ,  $j = \text{BR}(P)$ .





## О надежности и сложности сумматора порядка $n$

О. Ю. Барсукова

kuzya\_7@mail.ru

Пензенский государственный университет

Рассмотрим задачу синтеза асимптотически оптимального по надежности сумматора  $n$ -го порядка в предположении, что схема строится в базисе  $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ , а все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию  $\varphi$ , а в неисправном —  $\bar{\varphi}$ . Считаем, что схема реализует упорядоченную систему булевых функций (вектор-функцию)  $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ , если она реализует ее при отсутствии неисправностей. Ненадежностью такой схемы назовем максимальную вероятность ошибки на всех входных наборах схемы и на всех выходах схемы. Пусть  $P_\varepsilon(F) = \inf P(S)$ , где инфимум берется по всем схемам  $S$  из ненадежных элементов, реализующим вектор-функцию  $F(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}), \dots, f_m(\tilde{x}))$ , где  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Схему  $A$  из ненадежных элементов, реализующую вектор-функцию  $F(\tilde{x})$ , будем называть асимптотически оптимальной по надежности, если  $P(A) \sim P_\varepsilon(F)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Сложность  $L(S)$  схемы  $S$  есть число функциональных элементов в ней.

Задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем, имеющих один выход (и соответственно реализующих одну булеву функцию), для почти всех функций решена в работе [4]. Доказано, что любую функцию  $f \in K$ , где  $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$ ,  $K(n)$  — множество булевых функций  $f(x_1, \dots, x_n)$ , не представимых в виде  $(x_i^a \& g(\tilde{x}))^b$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 3$ ,  $a, b \in \{0, 1\}$ ),  $g(\tilde{x})$  — произвольная функция, можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности, которая функционирует с ненадежностью, асимптотически равной  $3\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , причем сложность этой схемы отличается от сложности минимальной схемы, построенной из абсолютно надежных элементов, асимптотически не более чем в  $3(1+b)$  раз, где  $b$  — любое сколь угодно малое положительное число.

Цель этой работы — построить асимптотически оптимальную по надежности схему, реализующую сложение двух чисел  $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$  и  $y = y_n y_{n-1} \dots y_1$ , заданных в двоичной системе счисления (т.е. построить асимптотически оптимальный по надежности  $n$ -разрядный сумматор).

Рассмотрим известный алгоритм сложения чисел  $x$  и  $y$  «столбиком»:

$$\begin{array}{rcccc} (q_{n+1} & q_n & \dots & q_1) \\ & x_n & \dots & x_1 \\ & + y_n & \dots & y_1 \\ \hline z_{n+1} & z_n & \dots & z_1 \end{array}$$

Числа  $q_{n+1}, q_n, \dots, q_1$  обозначают результаты переносов из предыдущих разрядов ( $q_1 = 0$ ). Используя тождество [1]

$$x_i + y_i + q_i = \overline{(x_i y_i \vee x_i q_i \vee y_i q_i)} \&(x_i \vee y_i \vee q_i) \vee x_i y_i q_i, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

построим схемы  $B_1$  (рис. 1) и  $B_i$  (рис. 2), реализующие соответствующие преобразования величин  $x_i, y_i, q_i$  в  $z_i, q_{i+1}$ . Тогда искомая схема  $\Sigma_n$  — сумматор  $n$ -го порядка — получается путем последовательного соединения блоков  $B_1$  и  $B_i$  (рис. 3). Здесь  $z_{n+1} = q_{n+1}$ , и блок  $B_1$  осуществляет преобразование  $z_1 = x_1 + y_1 = \overline{x_1 y_1}(x_1 \vee y_1), q_2 = x_1 y_1$ . Очевидно, что  $L(B_1) = 4$  и  $L(B_i) = 9$ . Таким образом, сложность и ненадежность сумматора  $n$ -го порядка удовлетворяют неравенствам  $L(\Sigma_n) \leq 9n - 5$ ,  $P(\Sigma_n) \leq (9n - 5)\varepsilon \leq 9n\varepsilon$ .

Докажем (теорема 1), что сумматор  $n$ -го порядка можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой со сложностью, превышающей сложность минимальной схемы из абсолютно надежных элементов, асимптотически не больше чем в 3,5 раза.

Для повышения надежности схем будем использовать схему  $S_g$  (рис. 4), реализующую функцию голосования  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ .

**Лемма 1** [3]. Вероятности ошибок на выходе схемы  $S_g$  (рис. 4) на наборах (000) и (111) равны соответственно  $v_1 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + \varepsilon^3$  и  $v_0 = \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + 4\varepsilon^4$ .

**Теорема 1.** Можно построить такую схему  $A$ , реализующую сложение двух  $n$ -разрядных чисел, что ее сложность  $L(A) \leq 31n - 11$ , а ненадежность  $P(A) \leq 3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5}$  при  $\varepsilon \leq 1/n^4$ .

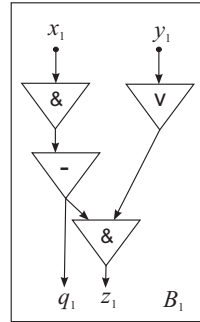


Рис.1

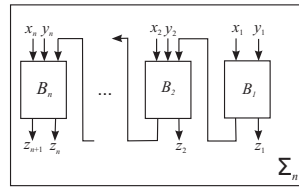


Рис.3

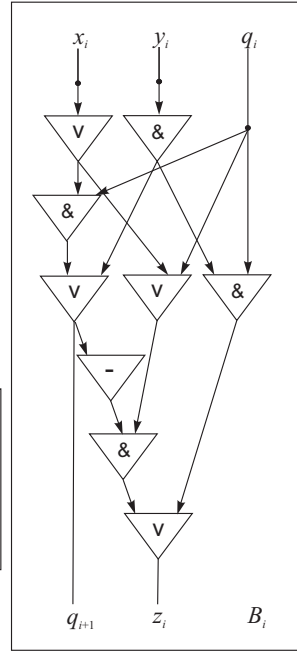


Рис.2

*Доказательство.* Используем схему  $\Sigma_n$  (рис. 3), реализующую сложение двух  $n$ -разрядных чисел  $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$  и  $y = y_n y_{n-1} \dots y_1$ , со сложностью  $L(\Sigma_n) \leq 9n - 5$  и ненадежностью  $P(\Sigma_n) \leq 9n\varepsilon$ . Возьмем три экземпляра схемы  $\Sigma_n$  (рис. 3) и  $(n + 1)$  экземпляр схемы  $S_g$  (рис. 4), соединим выходы схем  $\Sigma_n$  с входами схем  $S_g$ , реализующих функции  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ , как показано на рис. 5. Построенную таким образом схему обозначим  $\psi(\Sigma_n)$  (рис. 5). Оценим ненадежность схемы  $\psi(\Sigma_n)$ . Из леммы 1 имеем  $v_0 \leq 3\varepsilon$ ,  $v_1 \leq \varepsilon + 2\varepsilon^2$ . Известно [3], что  $P(\psi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 6P^2(S)$ . Тогда, применяя последнюю формулу, получим:  $P(\psi(\Sigma_n)) \leq 3\varepsilon + 6 \cdot 9^2 \varepsilon^2 n^2 \leq 3\varepsilon + 486\varepsilon^2 n^2$ . Поскольку  $\varepsilon \leq 1/n^4$ , получаем неравенство  $P(\psi(\Sigma_n)) \leq 3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5}$ .

При этом сложность построенной схемы равна  $L(\varphi(\Sigma_n)) \leq 3L(\Sigma_n) + (n + 1) \cdot L(S_g) \leq 27n - 15 + 4n + 4 = 31n - 11$ . Схема  $\varphi(\Sigma_n)$  — искомая схема А. ■

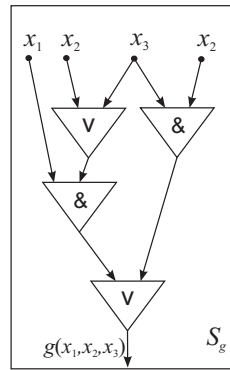


Рис.4

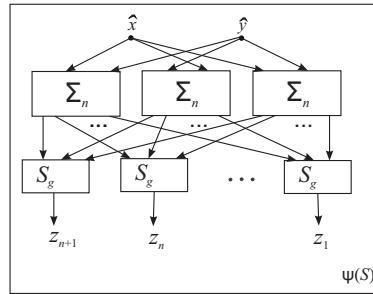


Рис.5

Отметим, что на выходах схемы  $A$  из теоремы 1 при всех  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  функции  $z_i \in K$ . Следовательно, для каждой из функций  $z_i$  построена асимптотически оптимальная по надежности схема, функционирующая с ненадежностью, асимптотически равной  $3\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \leq 1/n^4$ . Сложность этой схемы отличается от сложности схемы, построенной из абсолютно надежных элементов, асимптотически не больше чем в 3,5 раза. Заметим, что в отличие от работы [4] параметр  $\varepsilon$  зависит от  $n$  ( $\varepsilon \leq 1/n^4$ ), а в [4]  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  и от числа  $n$  разрядов двоичных чисел не зависит.

Следует отметить, что вероятность  $p$  появления на выходах построенной схемы набора  $(z'_{n+1}, z'_n, \dots, z'_1)$ , отличного от набора  $(z_{n+1}, z_n, \dots, z_1)$ , не больше  $(3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5})(n+1)$  при  $\varepsilon \leq 1/n^4$ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
- [2] Алехина М. А., Черепанова О. Ю. О сложности асимптотически оптимальных по надежности схем для некоторых классов булевых функций // Труды международного симпозиума «Надёжность и качество, 2010». Т. 1. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2010. — С. 232–235.
- [3] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006.
- [4] Васин А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  при инверсных неисправностях на выходах элементов // Из-

вестия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2008. — № 4. — С. 3–17.

## Полные проверяющие тесты для схем, реализующих дизъюнкцию

*С. Р. Беджанова*

azjunja@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

Рассматриваются схемы из функциональных элементов в произвольном функционально полном конечном базисе [1, 2], реализующие дизъюнкцию  $n$  переменных, где  $n \geq 3$ . В схемах допускаются инверсные неисправности произвольного количества элементов. Если элемент в исправном состоянии реализует функцию  $\varphi$ , то при его поломке на выходе элемента реализуется функция  $\bar{\varphi}$ . Среди всех схем, реализующих  $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$ , будем выделять те, которые допускают тесты наименьшей возможной длины.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называется функцией неисправности [3, 4]. Пусть  $g_1, \dots, g_k$  — все возможные попарно различные функции неисправности схемы  $S$ , отличные от функции  $f$ . Множество  $T$  наборов длины  $n$  называется полным проверяющим тестом схемы  $S$ , если для любой функции из множества  $\{g_1, \dots, g_k\}$  в нем найдется набор, на котором значение этой функции отличается от значения функции  $f$ .

**Теорема.** При любом натуральном  $n \geq 3$  функция  $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$  может быть реализована схемой, допускающей полный проверяющий тест длины  $n + 1$ .

Обозначим через  $\tilde{e}_i$  набор длины  $n$ , в котором в  $i$ -м разряде стоит единица, а во всех остальных разрядах — нули. Рассмотрим множество наборов  $T = \{\tilde{0}, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ . С использованием классификации базисов из [5] конструктивно доказано, что в любом базисе можно построить реализующую функцию  $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$  схему, для которой  $T$  является полным проверяющим тестом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН

«Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Луцанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.
- [3] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — 1998. — С. 5–25.
- [4] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [5] *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — 2003. — С. 217–230.

## Минимальные вершинные расширения цепей с вершинами двух типов

*П. П. Бондаренко*

PolinaBond@gmail.com

Саратовский государственный университет

### Введение

*Неориентированным графом* называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  — отношение смежности на множестве вершин  $V$ . Здесь и далее основные определения даются по работе [1].

Если  $(u, v) \in \alpha$ , то говорят, что вершины  $u$  и  $v$  смежны и эти вершины соединены ребром  $(u, v)$ . При этом  $(u, v)$  и  $(v, u)$  одно и то же ребро.

*Степенью вершины  $v$*  в неориентированном графе  $G$  будем называть количество вершин в  $G$ , смежных с данной.

Мы будем рассматривать неориентированные графы, в которых вершины имеют разные типы.

*Цепью  $P_n$*  называется граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , и  $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$ .

*Циклом*  $C_n$  называется граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , и  $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\} \cup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$ .

*Подграфом* графа  $G = (V, \alpha)$  называется пара  $G' = (V', \alpha')$ , где  $V' \subseteq V$  и  $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$ .

*Вложением* графа  $G_1 = (V_1, \alpha_1)$  в граф  $G_2 = (V_2, \alpha_2)$  называется такое взаимно однозначное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , что  $\forall u, v \in V_1$  выполняется следующее условие: если  $(u, v) \in \alpha_1$ , то  $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ , при этом считается, что сохраняются типы вершин.

Два графа  $G_1 = (V_1, \alpha_1)$  и  $G_2 = (V_2, \alpha_2)$  называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющее отношение смежности:  $(u, v) \in \alpha_1 \leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2, \forall u, v \in V_1$ , при этом считается, что сохраняются типы вершин.

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$  с вершинами  $p$ -типов*, если выполняются следующие условия:

- 1)  $G^*$  является  $k$ -расширением  $G$ , то есть граф  $G$  вложим в каждый подграф графа  $G^*$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин;
- 2)  $G^*$  содержит  $n + k * p$  вершин, то есть  $|V^*| = |V| + k * p$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Будем называть минимальное  $k$ -расширение графа при  $k = 1$  *минимальным расширением*.

*Отказоустойчивость* — способность системы противостоять ошибке и возможность продолжать работу в присутствии этой ошибки. Впервые определение отказоустойчивости ввел Хейз в работе [2]. Он рассматривал минимальные вершинные  $k$ -расширения цепей, циклов и деревьев с метками.

## Результаты

Будем рассматривать цепи с вершинами двух типов: одной вершиной одного типа, а остальными другого. Были сгенерированы и проанализированы все неизоморфные минимальные вершинные расширения таких цепей с количеством вершин до 8 и некоторых девятивершинных цепей.



Поставим в соответствие каждой  $n$ -вершинной цепи число в двоичном представлении. Вершины одного типа обозначим 0, а другого — 1.

**Теорема 1.** Для цепей  $P_n$  вида  $10\dots 00$  при  $n \geq 9$ , в минимальном вершинном расширении  $3k - 1$  ребер при  $n = 2k$  и  $3k + 1$  ребер при  $n = 2k + 1$ .

**Теорема 2.** Для циклов  $C_n$  с одной вершиной одного типа, а остальными другого, при  $n \geq 8$ , в минимальном вершинном расширении  $3k + 2$  ребер при  $n = 2k$  и  $3k + 5$  ребер при  $n = 2k + 1$ .

**Теорема 3.** Количество ребер в минимальных вершинных расширениях цепей с одной вершиной одного типа, а остальными другого, лежит в границах от  $3k - 1$  до  $3k + 2$  для  $n = 2k$  и от  $3k + 1$  до  $3k + 5$  для  $n = 2k + 1$ , где  $n$  — это количество вершин в цепи.

*Доказательство.* Верхняя оценка очевидна. Так как любая цепь  $P_n$  с одной вершиной одного типа, а остальными другого является подграфом цикла  $C_n$  с одной вершиной одного типа, а остальными другого, с тем же количеством вершин.

Рассмотрим произвольную цепь пусть вершины  $v_1\dots v_{k_1}$  типа 0,  $v_{k_1+1}$  типа 1 и вершины  $v_{k_1+2}\dots v_{k_1+k_2}$  типа 0. Т.е. сначала  $k_1$  вершин типа 0, потом вершина типа 1 и  $k_2$  вершин типа 0.

Будем рассматривать 2 цепи с количеством вершин  $k_1 + 1$  и  $k_2 + 1$ , каждая из которых цепь с одной вершиной типа 1, а остальными типа 0, причем вершина типа 1 имеет степень 1.

Возьмем минимальные вершинные расширения этих цепей и совместим вершины типа 1 так, чтобы в графе осталось только 2 вершины типа 1, вместо 4. Причем при удалении всех вершин типа 0 из минимального расширения одной из цепей должно остаться минимальное расширение другой.

Очевидно, что полученный граф является расширением исходной цепи, но в нем  $k_1 + k_2 + 4$  вершины, то есть на 1 больше, чем в минимальном вершинном расширении. Очевидно, что количество ребер в минимальном вершинном расширении будет никак не меньше, чем в данном графе.

Посчитаем количество ребер  $m$  в полученном графе. Это сумма количеств ребер в минимальных вершинных расширениях обеих цепей.

По предыдущей теореме:

$$k_1 = 2a \text{ и } k_2 = 2b, n = k_1 + k_2 + 1 = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1 = 2k + 1, \\ m = 3a + 1 + 3b + 1 = 3(a + b) + 2 = 3k + 2. \quad (1)$$

$$k_1 = 2a + 1 \text{ и } k_2 = 2b, n = k_1 + k_2 + 1 = 2a + 1 + 2b + 1 = 2(a + b + 1) = 2k, \\ m = 3(a + 1) - 1 + 3b + 1 = 3(a + b + 1) = 3k. \quad (2)$$

$$k_1 = 2a + 1 \text{ и } k_2 = 2b + 1, n = k_1 + k_2 + 1 = 2a + 1 + 2b + 1 + 1 = 2(a + b + 1) + 1 = 2k + 1, \\ m = 3(a + 1) - 1 + 3(b + 1) - 1 = 3(a + b + 1) + 1 = 3k + 1. \quad (3)$$

Из (1)–(3) следует, что нижняя оценка верна и достигается, если вершина типа 1 имеет степень 1. ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Абросимов М. Б.* Минимальные  $k$ -расширения предполных графов // Известия ВУЗов: Математика. — 2003. — № 6 (493). — С. 3–11.  
 [2] *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. 25, № 9. — P. 875–884.

### О связи между классом гиперграфов специального вида и свойствами вершин релаксаций разрезного многогранника

*В. А. Бондаренко, А. В. Николаев*

bond@bond.edu.yar.ru, awern@yandex.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Рассмотрим множество 3-однородных смешанных гиперграфов [1] вида  $G = (V, E, A)$ , где

1.  $V$  — множество вершин,  $V = N_n = \{1, \dots, n\}$ ;
2.  $E$  — множество неориентированных ребер,

$$E = \{(i, j, k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n;$$

3.  $A$  — множество ориентированных ребер,

$$A = \{((i, j), k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n,$$

где пара вершин  $(i, j)$  — начало ребра, вершина  $k$  — конец ребра.

Введем операцию *инвертирования  $i$ -й вершины* гиперграфа  $G$ , которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i, j, k) \rightarrow ((j, k), i), \quad ((j, k), i) \rightarrow (i, j, k), \quad ((i, j), k) \rightarrow ((i, k), j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф  $G' = \text{Inv}_i G = (V, E', A')$ .

Введем класс  $G_I$  гиперграфов  $G$ , для которых множество неориентированных ребер не пусто и остается непустым при всех возможных инверсиях.

Рассмотрим сужение задачи 3-выполнимость (3-SAT) — задачу *монотонная 3-выполнимость при различных литералах* (MNAE 3-SAT) [2], а именно: существует ли для набора трехместных дизъюнкций логических переменных такой выполняющий набор истинностных значений, что в каждой дизъюнкции найдется хотя бы один истинный и хотя бы один ложный литерал?

К этой задаче сводится [3] (см. также [2]) задача 3-SAT, следовательно, задача MNAE 3-SAT является NP-полной.

С индивидуальной задачей  $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$  свяжем гиперграф  $G(Z)$  рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом задачи  $Z$ , по следующим правилам:

1.  $|V| = |U| = n$ ;
2. Три вершины  $i, j, k$  гиперграфа  $G(Z)$  образуют неориентированное ребро  $(i, j, k) \in E$  тогда и только тогда, когда логические переменные  $u_i, u_j$  и  $u_k$  входят в общую дизъюнкцию;
3.  $A = \emptyset$ .

Легко проверяется, что индивидуальная задача  $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$  предполагает ответ «нет» тогда и только тогда, когда связанный с ней гиперграф  $G(Z)$  принадлежит классу  $G_I$ , поэтому справедлива

**Теорема 1.** *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф  $G$  не принадлежит классу  $G_I$ ?» — является NP-полной.*

Далее гиперграфы приведенного вида используются для описания свойств точек релаксаций разрезного многогранника.

В работе [4] определен класс многогранников  $M_n \subseteq R^{4n^2}$ ,  $n \in N$ , позже названных *корневыми полуметрическими* [5]. Задающие  $M_n$

линейные ограничения имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \quad (1)$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \quad (2)$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \quad (3)$$

$$x_{i,j} = x_{j,i}, \quad t_{i,j} = t_{j,i}, \quad y_{i,j} = z_{j,i}, \quad (4)$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \quad (5)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad y_{i,j} \geq 0, \quad z_{i,j} \geq 0, \quad t_{i,j} \geq 0, \quad (6)$$

где  $i, j, k, l$  независимо пробегает значения  $1, \dots, n$ .

Многогранники этого класса обладают рядом особенностей, обуславливающих значительный интерес к ним (см. [5, 6, 7]). В частности, в работе [8] установлена полиномиальная разрешимость задачи следующего вида: для заданной линейной целевой функции  $f$  требуется выяснить, достигается ли  $\max\{f(u) : u \in M_n\}$  в целой вершине многогранника  $M_n$  (задача распознавания целочисленности).

Многогранник  $M_n^Z$ , порождаемый целыми вершинами из  $M_n$ , называется разрезным многогранником, так как известная NP-полная задача о максимальном разрезе (как, впрочем, и ряд других) сводится к оптимизации линейной функции на  $M_n^Z$ . Поэтому  $M_n$  является релаксационным многогранником задачи о разрезе, или релаксацией разрезного многогранника.

Определим, следуя [5], релаксации более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное  $k$  ( $k < n$ ) и рассмотрим систему неравенств  $S$ , задающую многогранник  $M_k^Z$ ; обозначим через  $\Theta$  число этих неравенств. Для каждого  $k$ -элементного подмножества  $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$  множества  $N_n$  рассмотрим систему  $S_\nu$ , получающуюся из системы неравенств  $S$  заменой переменных  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ ,  $z_{i,j}$  и  $t_{i,j}$ , соответственно, на  $x_{\nu_i, \nu_j}$ ,  $y_{\nu_i, \nu_j}$ ,  $z_{\nu_i, \nu_j}$  и  $t_{\nu_i, \nu_j}$ . Дополним систему (1)–(6) совокупностью всех  $\Theta \cdot C_n^k$  указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через  $M_{n,k}$ .

Известно, что  $M_{n,3}$  — первая, отличная от  $M_n$ , релаксация разрезного многогранника.  $M_{n,3}$  задается системой (1)–(6) и дополнительными ограничениями:

$$x_{i,j} + t_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leq 2,$$

$$x_{i,j} + t_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leq 2,$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leq 2,$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leq 2$$

для каждой тройки  $i, j, k \in N_n$ , где  $i < j < k$  [7, 8].

Рассмотрим индивидуальную задачу  $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$  с  $n$  логическими переменными и  $p$  дизъюнкциями, а также многогранник  $M_{n,3}$ . Построим целевую функцию следующего вида:

$$\forall x \in R^{4n^2} : f(x) = \sum_{i,j,k} (y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k})$$

по всем тройкам  $i, j, k$ , для которых логические переменные  $u_i, u_j$  и  $u_k$  входят в общую дизъюнкцию.

Очевидно, что на многограннике  $M_{n,3} : \max\{f(x) : x \in M_{n,3}\} = 2p$ , и если этот максимум достигается в целой вершине  $M_{n,3}$ , то соответствующий задаче набор дизъюнкций выполним, в противном случае набор невыполним.

Таким образом, задача MNAE 3-SAT сводится к задаче распознавания целочисленности на  $M_{n,3}$ .

В основе упомянутого выше результата о полиномиальной разрешимости задачи распознавания целочисленности на  $M_n$  [8] лежит следующее

**Утверждение.** *Каждая точка многогранника  $M_{n,3}$  является выпуклой комбинацией вершин многогранника  $M_n$ , среди которых есть хотя бы одна целая.*

Ниже устанавливается, что ситуация оказывается принципиально иной при переходе к последующим релаксациям.

Отметим, что каждой точке  $u \in M_{n,3}$  можно также сопоставить 3-однородный смешанный гиперграф рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом точки  $G(u)$ , по следующим правилам:

1.  $|V| = n$ ;
2.  $(i, j, k) \in E(u) \Leftrightarrow y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2$ ;
3.  $((i, j), k) \in A(u) \Leftrightarrow y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2$ .

**Теорема 2.** *Если для некоторой точки  $u \in M_{n,3}$  ее гиперграф  $G(u)$  принадлежит классу  $G_I$ , то в любом разложении  $u$  в виде выпуклой комбинации вершин  $M_{n,3}$  нет ни одной целой вершины.*

**Теорема 3.** При любых  $n \geq 5$  и  $q \geq 195$  найдутся точки  $u$  из многогранника  $M_{n,4}$  и  $v$  из многогранника  $M_{q,5}$ , гиперграфы которых  $G(u)$  и  $G(v)$  принадлежат классу  $G_I$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
- [2] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
- [3] Schaefer T. J. The complexity of satisfiability problems // Proc. 10-th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. — New York: Association for Computing Machinery, 1978. — P. 216–226.
- [4] Бондаренко В. А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем. Сб. науч. тр. — Ярославл: Яросл. гос. ун-т, 1987. — С. 133–134.
- [5] Деца М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. — М.: МЦНМО, 2001. — 736 с.
- [6] Padberg M. V. The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. — 1989. — V. 45. — P. 139–172.
- [7] Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008.
- [8] Бондаренко В. А., Урываев Б. В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 6. — С. 18–23.

### Интерполяционные взаимно обратные соотношения и обобщение формулы Ворпицкого

*Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова*

bond@tl.ru, msharapova@list.ru

Пензенский государственный университет;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Механико-математический факультет

При получении комбинаторных тождеств важную роль играют взаимно обратные соотношения. Рассмотрим выражения  $B_n(t) = \sum_{k=0}^n A_n(k)X_{n,k}(t)$ ,  $A_n(z) = \sum_{j=0}^n B_n(j)Y_{n,j}(z)$ . Подстановка  $B_n(t)$

в формулу для  $A_n(z)$  дает равенство  $l_{n,j}(t) = \sum_{k=0}^n X_{n,k}(t)Y_{n,j}(k)$ , которое доопределим на узлах  $m = 0, 1, \dots, n$  соотношением ортогональности  $l_{n,j}(m) = \delta_{mj}$ , где  $\delta_{mj}$  — символ Кронекера. Аналогичный результат дает подстановка  $A_n(z)$  в  $B_n(t)$ .

Вводя в рассматриваемые функции параметр  $\alpha$ , положим

$$X_{n,k}(t; \alpha) = \alpha^{t-k} \binom{n+1/\alpha+t-k-1}{n+1/\alpha}, \quad Y_{n,j}(z; \alpha) = (-\alpha)^{z-j} \binom{n+1/\alpha}{z-j}, \quad (1)$$

где биномиальные коэффициенты в общем случае выражаются через гамма-функцию. Тогда равенство  $l_{n,j}(m; \alpha) = \delta_{mj}$  при  $m = 0, 1, \dots, n$  проверяется непосредственно, а  $l_{n,j}(t; 1)$  — фундаментальный интерполяционный многочлен Лагранжа. Поэтому назовем формулы для  $B_n(t; \alpha)$  и  $A_n(z; \alpha)$  интерполяционными взаимно обратными соотношениями.

**Теорема 1.** Пусть  $z = k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\alpha = r = 1, 2, \dots$ ,  $A_n(k; r) = A_{n,r,k}^*$ ,  $B_n(t; r) = t^n r^t \binom{t+1/r-1}{t}$  и  $t \geq 0$ . Тогда справедливы тождества

$$B_n(t; r) = \sum_{k=0}^n A_{n,r,k}^* X_{n,k}(t; r), \quad A_{n,r,k}^* = \sum_{j=0}^n B_n(j; r) Y_{n,j}(k; r). \quad (2)$$

*Доказательство.* Формулы (2) определяют коэффициенты связи между двумя полиномиальными базисами и вытекают из соотношения ортогональности для функций (1). При  $r = 1$  первое равенство в (2) — формула Ворпицкого [1], задающая числа Эйлера  $A_{n,k} = A_{n,1,k}^*$ , второе — ее обращение в смысле Мебиуса, а при  $r \rightarrow 0$  имеем  $S_{n,k} = A_{n,0,k}^*$  — числа Стирлинга второго рода. ■

**Теорема 2.** Пусть  $A_{n,r}^*(t) = \sum_{k=0}^n A_{n,r,k}^* t^k$  — производящий многочлен для чисел  $A_{n,r,k}^*$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , а  $D = d/dt$ . Тогда имеют место соотношения

$$A_{0,r,k}^* = \delta_{0k}, \quad A_{n,r,k}^* = k A_{n-1,r,k}^* + (r(n-k)+1) A_{n-1,r,k-1}^*, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 1; \quad (3)$$

$$A_{0,r}^*(t) = 1, \quad A_{n,r}^*(t) = (r(n-1)+1) t A_{n-1,r}^*(t) + t(1-rt) D A_{n-1,r}^*(t), \quad n \geq 1; \quad (4)$$

$$A_{n,r}^*(t) = (1-rt)^{n+1/r} (tD)^n (1-rt)^{-1/r}, \quad n \geq 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (1-rt)^{-1/r} = e^t. \quad (5)$$

*Доказательство.* Рекуррентная формула (3) проверяется с помощью (2) и равенства  $k(t+n-k+1/r)+(n-k+1/r)(t-k)=(n+1/r)t$ . Она влечет рекуррентное соотношение (4), а (5) находится с использованием (4). ■

**Теорема 3.** Производящие функции для  $\{A_{n,r}^*(t)\}_{n=0}^\infty$ ,  $r = 0, 1, \dots$  имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,r}^*(t) \frac{z^n}{n!} = \left( \frac{1-rt}{1-rte^{z(1-rt)}} \right)^{1/r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,r}^*(t) z^n = J_z[\varkappa_k, \lambda_k : (0, \infty)], \quad (6)$$

где правая часть первой формулы при  $r = 0$  понимается как предел,

$$\text{равный } e^{t(e^z-1)}, \text{ а } J_z[\varkappa_k, \lambda_k : (0, \infty)] = \frac{1}{1-\varkappa_0 z} - \frac{\lambda_0 z^2}{1-\varkappa_1 z} - \frac{\lambda_1 z^2}{1-\varkappa_2 z} - \dots$$

является  $J$ -дробью (непрерывной дробью Якоби), параметры которой определены равенствами  $\varkappa_k = (rk+1)t+k$ ,  $\lambda_k = (k+1)(rk+1)t$ .

*Доказательство.* Подстановка формулы (5) в экспоненциальную производящую функцию  $\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,r}^*(t) z^n / n!$ , а также применение разложения  $(1-rt)^{-1/r}$  в ряд по степеням  $t$  и тождества  $(tD)^n t^k = k^n t^k$  позволяют получить первое равенство (6). Это равенство и применение теоремы Стильтеса–Роджерса о  $J$ -дробях [2] приводит ко второму равенству (6). Отметим, что непосредственное разложение производящей функции  $\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,r}^*(t) z^n$  в  $J$ -дробь находится с помощью дифференциального уравнения Риккати, которое можно получить, используя соотношение (5) и ряд замен переменных. ■

**Следствие 1.** Переход к пределу при  $r \rightarrow t^{-1}$  в первой формуле (6) дает  $\sum_{n=0}^{\infty} t(t+1)\dots(t+n-1)z^n/n! = (1-z)^{-t}$ , т. е. в этом случае производящие функции (6) связаны с числами Стирлинга первого рода без знака.

**Следствие 2.** Замена  $t$  на  $t/r$  и  $z$  на  $rz$  в (6) приводит к многочленам  $A_{n,r}^{**}(t)$ , коэффициенты которых  $A_{n,r,k}^{**}$  удовлетворяют соотношению

$$A_{0,r,k}^{**} = \delta_{0k}, \quad A_{n,r,k}^{**} = rkA_{n-1,r,k}^{**} + (r(n-k)+1)A_{n-1,r,k-1}^{**}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Для комбинаторной интерпретации чисел  $A_{n,r,k}^{**}$ ,  $r \geq 1$ , введем множество  $GS_{n,r}$   $r$ -перестановок мультимножества  $\{1^r, \dots, n^r\}$ ,



обобщающее понятие множества 2-перестановок Гесселя–Стенли [1], и множество корневых помеченных  $r$ -угольных кактусов  $H_{n,r}$ .

**Определение 1.**  $r$ -перестановка  $\sigma \in GS_{n,r}$  — это слово  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{rn}$ , у которого все буквы, стоящие между любыми двумя вхождениями символа  $i \in \{1, \dots, n\}$ , не меньше этого  $i$  [3]. Рекурсивный алгоритм генерации  $GS_{n+1,r}$  основан на построении  $(rn + 1)$ -й перестановки из  $GS_{n+1,r}$  путем вставки слова  $(n + 1)^r$  в выбранное слово  $\pi \in GS_{n,r}$ , а  $|GS_{n+1,r}| = 1 \cdot (r + 1) \cdot \dots \cdot (rn + 1)$ .

**Определение 2.** Корневой помеченный  $r$ -угольный кактус  $\gamma \in H_{n,r}$  — связный граф с вершиной (корнем) с меткой 0, который состоит из помеченных различными числами  $1, \dots, n$   $r$ -угольников, не имеющих общих ребер. Рекурсивный алгоритм получения  $H_{n+1,r}$  основан на построении  $(rn + 1)$ -го кактуса из  $H_{n+1,r}$  путем соединения нижней вершины  $r$ -угольника с меткой  $n + 1$  (остальные его вершины считаются верхними) с каждой из  $(rn + 1)$ -й вершин (включая корень) выбранного кактуса  $\gamma \in H_{n,r}$ .

Добавим, что  $\sigma \in GS_{n,0}$  — разбиение множества  $\{1, \dots, n\}$ , а  $\gamma \in H_{n,0}$  — точечный граф (аналог слоистой диаграммы [2]). Считая, что в определениях 1, 2 вставка слова  $(n + 1)^r$  и соединение  $r$ -угольника с меткой  $n + 1$  проводятся последовательно слева направо и, соответственно, по часовой стрелке, находим биекцию  $\varphi : GS_{n,r} \rightarrow H_{n,r}$ , причем  $H_{n,1}$  — множество корневых деревьев с  $(n + 1)$ -й помеченной вершиной, а  $H_{n,2}$  — с  $n$  помеченными ребрами.

Если  $\text{rise}(\sigma)$  — число подъемов  $\sigma \in GS_{n,r}$ , то для  $\gamma \in H_{n,r}$   $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$  дает  $\text{rise}(\gamma) = \text{rise}(\sigma)$ . Коэффициенты  $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \text{rise}(\sigma) = k\}$   $r$ -многочлена Эйлера  $A_{n,r}(t)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению [3]

$$A_{0,r,k} = \delta_{0k}, \quad A_{n,r,k} = kA_{n-1,r,k} + (r(n-1) - k + 2)A_{n-1,r,k-1}, \quad (8)$$

$k \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 1$ .

**Теорема 4.** Пусть  $l(\gamma)$  — число листьев (свободных левых верхних вершин всех  $r$ -угольников) кактуса  $\gamma \in H_{n,r}$ . Тогда  $A_{n,r,k} = \#\{\gamma \in H_{n,r}, l(\gamma) = k\}$ .

*Доказательство.* При  $r = 1$  имеем  $l(\gamma) = n + 1 - \text{rise}(\gamma)$ ,  $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$  при  $r \geq 2$  дает  $l(\gamma) = l(\sigma) = \#\{\sigma_i : \sigma_i = \sigma_{i+1}, \sigma_i \neq \sigma_j, j < i, 1 \leq i \leq n - 1\}$ ,  $\sigma \in GS_{n,r}$ , а формула (8) проверяется с помощью математической индукции. ■

Удаление всех меток в множестве  $H_{n,r}$  приводит к разбиению его на классы эквивалентности (аналогично  $GS_{n,r}$  разбивается на классы эквивалентности соответствующей расстановкой скобок и отождествлением всех букв). Для полученных в результате фактормножеств при  $r \geq 2$  можно показать, что  $|\overline{H}_{n,r}| = |\overline{GS}_{n,r}| = \frac{1}{(r-1)n+1} \binom{rn}{n}$  — числа Фусса–Каталана [1].

Пусть  $h(\gamma) = n + 1 - l(\gamma)$  — высота кактуса  $\gamma \in H_{n,r}$ , а биекция  $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$  задает  $h(\sigma) = h(\gamma)$ ,  $\sigma \in GS_{n,r}$ . Тогда с помощью рекуррентного соотношения (7) и рекурсивного алгоритма генерации  $GS_{n,r}$  можно определить веса  $h(\sigma) \leq \text{cl}(\sigma) \leq n$ ,  $\sigma \in GS_{n,r}$  так, что  $A_{n,r,k}^{**} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \text{cl}(\sigma) = k\}$ . Отметим также, что нормированное распределение  $\{A_{n,r,k}^{**}/A_{n,r}^{**}(1)\}_{k=0}^n$  при всех  $r \geq 1$  является асимптотически нормальным с математическим ожиданием и дисперсией, асимптотически равными, соответственно,  $n/2$  и  $n/12$ .

В [4] на фактор-множестве  $\overline{H}_{n,2}$  рассматривается 12 весов  $w_i(n)$ , причем  $w_{11}(n) = A_{n,2}(1) = A_{n,2}^{**}(1) = |H_{n,2}| = (2n-1)!!$ ,  $w_{12}(n) = A_{n,2}^*(1)$ , а также используется аналог первой формулы (6) при  $r = 2$ .

Из второй формулы (6) следует, что  $A_{n,r}^*(t)$  — многочлены Якоби–Роджерса при определенных значениях  $\kappa_k$  и  $\lambda_k$ , связанные с перечислением взвешенных путей с  $n$  шагами, начало и конец которых находятся на высоте 0. Представления Франсона–Вьенно и Флажолле позволяют кодировать перестановки и, соответственно, разбиения множества  $\{1, \dots, n\}$  как пути указанного типа, а для получения этих представлений используются бинарные деревья и, соответственно, слоистые диаграммы [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.
- [2] Гильден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
- [3] Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л. Два типа  $r$ -перестановок и  $r$ -многочлены Эйлера // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во механико–математического факультета МГУ, 2010. — С. 217–220.
- [4] Klazar M. Twelve countings with rooted plane trees // European Journal of Combinatorics. — 1997. — V. 18, № 2. — P. 195–210.

## Синтез легкотестируемых схем для систем булевых функций из некоторых классов

*Ю. В. Бородина*

jborodina@inbox.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Пусть  $S$  — некоторая схема из функциональных элементов [1, 2], реализующая систему (упорядоченный набор) из  $m$  булевых функций  $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), \dots, f_m(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Функции, реализуемые на выходах схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называются функциями неисправности. Набор  $(g_1(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}))$  функций неисправности будем считать нетривиальным, если хотя бы одна какая-нибудь функция  $g_i(\tilde{x})$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , отлична от соответствующей ей функции  $f_i(\tilde{x})$ , т. е.  $g_i(\tilde{x}) \neq f_i(\tilde{x})$ . Множество  $T$  входных наборов схемы  $S$  называется полным проверяющим тестом для этой схемы, если для любого нетривиального набора функций неисправности  $(g_1(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}))$  в  $T$  найдется хотя бы один такой набор  $\tilde{\sigma}$ , что  $(f_1(\tilde{\sigma}), \dots, f_m(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \dots, g_m(\tilde{\sigma}))$  (здесь равенство булевых наборов, как обычно, покомпонентное, т. е.  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  означает  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$ ). Число наборов, составляющих этот тест, называется длиной теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все  $2^n$  наборов значений переменных булевой функции от  $n$  переменных [3].

В данной работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе  $\{\&, \vee, \bar{\phantom{x}}\}$  для систем булевых функций из некоторых классов. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа «1» на выходах элементов (при переходе в неисправное состояние элемент выдает единицу независимо от подаваемых на его входы значений).

Пусть  $\mathcal{F}_{n,m}$  — система из  $m$  булевых функций  $f_1(\tilde{x}), \dots, f_m(\tilde{x})$ , где  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; у функций из  $\mathcal{F}_{n,m}$  могут быть фиктивные переменные из числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{F}_{n,m}$  — система из  $m$  булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из  $l$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_l$ ,  $0 \leq l \leq n$ , и антимонотонна по каждой из  $n - l$  переменных  $x_{l+1}, \dots, x_n$ . Тогда систему  $\mathcal{F}_{n,m}$  можно реализо-

вать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{F}_{n,m}$  — система из  $m$  булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из  $l$  переменных  $x_2, x_3, \dots, x_{l+1}$ ,  $0 \leq l \leq n-1$ , и антимонотонна по каждой из  $n-l-1$  переменных  $x_{l+2}, \dots, x_n$ . Тогда систему  $\mathcal{F}_{n,m}$  можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

**Замечание 1.** Теоремы 1, 2 для систем, состоящих из одной функции, были доказаны в работе [4]. Кроме того, в условиях теоремы 1 легкотестируемые схемы с неточными оценками длин тестов строились в [5].

**Замечание 2.** В силу самодвойственности рассматриваемого базиса аналоги теорем 1, 2 справедливы и при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984.
- [2] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2002.
- [3] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: МГУ, 1992.
- [4] *Бородина Ю. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе  $\{\&, \vee, \bar{\phantom{x}}\}$  при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 2008. — Т. 17, № 1. — С. 129–140.
- [5] *Бородина Ю. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе  $\{\&, \vee, \bar{\phantom{x}}\}$  для систем функций из некоторых классов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2007. — № 4. — С. 68–72.

## Теория мультимножеств: операции, структура, вычислимость

Д. Б. Буй, Ю. А. Богатырёва

bui@unicyb.kiev.ua, jbogatyreva@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

Мультимножество — это совокупность элементов произвольной природы, которые могут дублироваться.

Несмотря на наличие обширной библиографии по теории мультимножеств и ее применениям в различных областях (см., например, [1]), говорить о наличии целостной теории мультимножеств пока еще рано. Настоящий доклад посвящен вопросам развития теории мультимножеств применительно к соотношениям между операциями, устройству семейства мультимножеств, упорядоченного естественным отношением включения, вычислимости на мультимножествах.

Формально говоря, *мультимножество*  $\alpha$  с *основой*  $U_\alpha$  — это функция вида  $\alpha: U_\alpha \rightarrow N^+$ , где  $U_\alpha$  — некоторое множество,  $N^+ = \{1, 2, \dots\}$  — множество натуральных чисел без нуля.

*Характеристической функцией мультимножества*  $\alpha$  называется функция вида  $\chi_\alpha: D \rightarrow N$ , значение которой задается следующей кусочной схемой:

$$\chi_\alpha(d) = \begin{cases} \alpha(d), & \text{если } d \in \text{dom } \alpha; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех  $d \in D$ , где  $D$  — универсум элементов основ мультимножеств [2].

Введем также понятие включения мультимножеств. *Мультимножество*  $\beta$  *включается в мультимножество*  $\alpha$  ( $\beta \preceq \alpha$ ), если

$$\beta \preceq \alpha \stackrel{\text{def}}{\iff} U_\beta \subseteq U_\alpha \ \& \ \forall d (d \in U_\beta \Rightarrow \beta(d) \leq \alpha(d)).$$

Непосредственно из определения следует, что бинарное отношение включения мультимножеств является отношением частичного порядка.

Для мультимножеств определены аналоги стандартных теоретико-множественных операций и операции, использующие специфику

мультимножеств и потому не применимые к абстрактным множествам.

В работе рассмотрены свойства введенных операций: характеристика отношения включения в терминах операций пересечения и объединения; идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы поглощения, аналоги законов двойного отрицания и де Моргана.

Дадим определения операциям объединения и пересечения. Операция  $\alpha \cup_{All} \beta$  (соответственно  $\alpha \cap_{All} \beta$ ) мультимножествам  $\alpha$  и  $\beta$  сопоставляет мультимножество, характеристическая функция которого на произвольном аргументе  $d$  равна

$$\max \{ \chi_\alpha(d), \chi_\beta(d) \} \quad (\text{соответственно } \min \{ \chi_\alpha(d), \chi_\beta(d) \}).$$

**Лемма 1.** Операции  $\cup_{All}$  и  $\cap_{All}$  идемпотентны, коммутативны, ассоциативны.

**Лемма 2.** Для произвольных мультимножеств  $\alpha$  и  $\beta$  выполняются законы поглощения:  $\alpha \cup_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = \alpha$ ,  $\alpha \cap_{All} (\alpha \cup_{All} \beta) = \alpha$ .

**Теорема 3.** Частично упорядоченное множество  $\langle M, \preceq \rangle$  является решеткой, причем  $\sup_{\preceq} \{ \alpha, \beta \} = \alpha \cup_{All} \beta$ ,  $\inf_{\preceq} \{ \alpha, \beta \} = \alpha \cap_{All} \beta$ .

Приведем более информативные результаты о структуре частично упорядоченного множества мультимножеств (ч.у.м.) [3].

**Утверждение 4.** Выполняются следующие утверждения:

- 1) пустое мультимножество  $\emptyset_m$  (характеристической функцией которого является константная функция, всегда равная нулю) — наименьший элемент в  $\langle M, \preceq \rangle$ ;
- 2)  $\inf \mu = \alpha$  для произвольного непустого множества мультимножеств  $\mu \subseteq M$ ; характеристическая функция точной нижней грани (инфимума)  $\alpha$  задается выражением  $\chi_\alpha(d) = \min_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$ ;
- 3) для произвольного, в частности пустого, семейства мультимножеств  $\mu$  точная верхняя грань (супремум)  $\mu$  существует тогда и только тогда, когда  $\mu$  ограничено сверху;
- 4)  $\sup \mu = \alpha$ , где  $\mu$  — произвольное семейство мультимножеств, имеющее точную верхнюю грань, а характеристическая функция мультимножества  $\alpha$  задается выражением  $\chi_\alpha(d) = \max_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$ .

**Теорема 5.** Ч.у.м.  $\langle M, \preceq \rangle$  является условно полным множеством и полной полурешеткой, при этом точные грани находятся по формулам утверждения 4.

Пополним частично упорядоченное множество  $\langle M, \preceq \rangle$  наибольшим элементом  $T$ . Полученное ч.у.м. обозначим как  $\langle M \cup \{T\}, \preceq \rangle$ .

**Следствие 1.** Ч.у.м.  $\langle M \cup \{T\}, \preceq \rangle$  является полной решеткой с наименьшим элементом  $\emptyset_m$  и наибольшим элементом  $T$ .

Ч.у.м.  $\langle M, \preceq \rangle$  можно вложить в другую полную решетку. Для этого расширим понятие мультимножества. С этой целью пополним множество  $N^+$  со стандартным порядком наибольшим элементом  $\infty$  и положим  $N_\infty^+ = N^+ \cup \{\infty\}$ . Под мультимножеством будем понимать функцию вида  $\alpha_\infty : U \rightarrow N_\infty^+$ . Семейство всех таких мультимножеств обозначим через  $M_\infty$ . Порядок на множестве  $N_\infty^+$  обозначим как  $\leq_\infty$ , тогда порядок на мультимножествах  $\preceq_\infty$  расширим таким образом:  $\alpha \preceq_\infty \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} U_\alpha \subseteq U_\beta \& \forall d (d \in U_\alpha \Rightarrow \alpha(d) \leq_\infty \beta(d))$ .

**Теорема 6.** Частично упорядоченное множество  $\langle M_\infty, \preceq_\infty \rangle$  является полной решеткой с наименьшим элементом  $\emptyset_m$  и наибольшим элементом  $T_\infty$ , где  $T_\infty : D \rightarrow \{\infty\}$ ,  $T_\infty(d) = \infty$  для всех  $d$ . Точные нижние грани находятся по формулам утверждения 4. Для точных верхних граней выполняется формула  $\sup \mu = \alpha$ , где характеристическая функция мультимножества  $\alpha$  имеет вид  $\chi_\alpha(d) = \sup_{\leq_\infty, \beta \in \mu} \chi_\beta(d)$ .

Рассмотрим вычислимость на конечных множествах и мультимножествах, которая вводится как нумерационная вычислимость. Аппаратом для задания класса вычислимых функций выступают примитивные программные алгебры (ППА), введенные В. Н. Редько в [4].

В работе [5] построены системы порождающих мультимножественной и множественной ППА.

В систему порождающих множественной ППА  $\Sigma$  входят предикат равенства  $X = Y$ , функции объединения  $X \cup Y$  множеств, сложения  $X \oplus Y$  и разности  $X \div Y$  конечных множеств натуральных чисел, селекторные функции  $I_m^n$ , константные функции  $\{1\}(X)$  и  $\emptyset(X)$ , фиксирующие синглетон  $\{1\}$  и пустое множество  $\emptyset$ :

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{X = Y, X \cup Y, X \oplus Y, X \div Y, I_m^n, \{1\}(X), \emptyset(X)\}_{i=1,2,\dots,n}^{n=1,2,\dots}$$

**Теорема 7.** Система  $\Sigma$  является системой порождающих множественной ППА.

Система порождающих мультимножественной ППА  $\Sigma_M$  состоит из предиката равенства  $\alpha = \beta$ , функций объединения  $\alpha \cup_{All} \beta$  мультимножеств, сложения  $\alpha \oplus \beta$  и разности  $\alpha \div \beta$  конечных мультимножеств (их основы — множества натуральных чисел), константных функций  $\{1^1\}(\alpha)$  и  $\varnothing_m(\alpha)$ , фиксирующих мультимножества вида  $\{1^1\}$  и  $\varnothing_m$ , специальной бинарной функции на мультимножествах  $\varphi(\alpha, \beta)$  и селекторных функций  $I_m^n$ :

$$\Sigma_M \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha = \beta, \alpha \cup_{All} \beta, \alpha \oplus \beta, \alpha \div \beta, \{1^1\}(\alpha), \varnothing_m(\alpha), \varphi(\alpha, \beta), I_m^n\}_{i=1,2,\dots,n},$$

где функция  $\varphi$  определяется как  $\{n_1^1\}, \{k_1^1\} \xrightarrow{\varphi} \{n_1^{k_1}\}$ . Положим, что для  $k_1 = 0$ ,  $\varphi(\{n_1^1\}, \{k_1^1\}) = \varnothing_m$ .

**Теорема 8.** Система  $\Sigma_M$  является системой порождающих мультимножественной ППА.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Буй Д. Б., Богатырёва Ю. А. Теория мультимножеств: библиография, применение в табличных базах данных // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2010. — № 7(48). — С. 56–62.
- [2] Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.
- [3] Buy D., Bogatyreva J. Structure of Partially Ordered Family of Multisets // Proc. CSE 2010 Int. Scientific Conf. on Computer Science and Engineering, September 20–22, 2010, Kosice – Stara Lubovna, Slovakia. — P. 40–43.
- [4] Редько В. Н. Универсальные программные логики и их применение // Труды Всесоюзного симпозиума по теоретическому и системному программированию. — Кишинев: Штиинца, 1983. — С. 310–326.
- [5] Богатырёва Ю. О. Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2010. — № 4. — С. 88–96.



## Обобщенная табличная алгебра, обобщенные исчисления строк и доменов и их эквивалентность

*Д. Б. Буй, И. Н. Глушко*

buy@unicyb.kiev.ua, glushkoim@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

В [1] была построена табличная алгебра, уточняющая хорошо известную реляционную алгебру Кодда. В данной работе строится обобщенная табличная алгебра путем явного внесения в определение таблицы схемы. Классическое исчисление строк (кортежей) и исчисление доменов пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами. Доказано, что при этом обогащении обобщенная табличная алгебра, исчисление строк и исчисление доменов являются одинаково выразительными.

### Основные понятия и определения

Пусть  $\mathbf{A}$  — множество атрибутов (имен), а  $\mathbf{D}$  — универсальный домен (множество денотатов). Произвольное (конечное) множество атрибутов  $R$  назовём схемой. Под строкой схемы  $R$  понимаем именованное множество на паре  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{D}$ , проекция которого за первой компонентой совпадает с  $R$ , т. е. строка схемы  $R$  — это функция вида  $s: R \rightarrow \mathbf{D}$ .

Под (обобщенной) таблицей понимаем пару  $\langle t, R \rangle$ , где  $t \in T(R)$  — таблица фиксированной схемы  $R$  (в смысле [1]). Тогда  $\mathbf{T}(R) = \{\langle t, R \rangle \mid t \in T(R)\}$  — множество всех (обобщенных) таблиц схемы  $R$ , а  $\mathbf{T} = \bigcup_R \mathbf{T}(R)$  — множество всех таблиц. Это определение таблицы отличается от определения таблицы в смысле [1] тем, что каждой таблице приписывается ее схема. По сути это влияет только на случай пустой таблицы  $t_\emptyset$ , поскольку по непустой таблице схема восстанавливается однозначно. Запись  $\langle t_\emptyset, R \rangle$  обозначает пустую таблицу схемы  $R$ .

### Обобщение табличной алгебры

Под (обобщенной) табличной алгеброй будем понимать алгебру  $\langle \mathbf{T}, \Omega_{P,\Xi} \rangle$ , где  $\mathbf{T}$  — множество всех таблиц,

$$\Omega_{P,\Xi} = \left\{ \bigcup_R, \bigcap_R, \setminus_R, \sigma_{p,R}, \pi_{X,R}, \bigotimes_{R_1,R_2}, \div_{R_2}^{R_1}, Rt_{\xi,R}, \sim_R \right\}$$

— сигнатура,  $p \in P$ ,  $\xi \in \Xi$ ,  $X, R, R_1, R_2 \subseteq \mathbf{A}$ ,  $P, \Xi$  — множества параметров. Операции сигнатуры  $\Omega_{P,\Xi}$  заданы в [2]. Выражением табличной алгебры называется любое выражение, построенное из таблиц множества  $\mathbf{T}$  при использовании операций множества  $\Omega_{P,\Xi}$ .

**Лемма.** *Произвольное выражение табличной алгебры можно заменить эквивалентным ему выражением, которое использует постоянные таблицы с одним атрибутом и одной строкой, операции селекции, соединения, проекции, объединения, разности и переименования.*

### Обобщенное исчисление строк и доменов

В основе большинства реляционных языков запросов лежит реляционное исчисление, поскольку, в отличие от реляционной алгебры, исчисление выражает лишь то, каким должен быть результат, и не предусматривает определение того, как его получить. Есть две формы реляционного исчисления: исчисление с переменными строками (по другой терминологии — кортежами) и исчисление с переменными на доменах. Эти формы предложены Е. Коддом (E. Codd) [3] и М. Лакруа (M. Lacroix) с А. Пиротте (A. Pirotte) [4] соответственно.

**Обобщенное исчисление строк.** В классическом исчислении строк обычно рассматривают лишь бинарные предикаты, а функциональная сигнатура вообще пуста [5, 6]. В представленной работе исчисление строк пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами. Определен синтаксис термов, атомов и формул исчисления строк; выделен класс разрешенных формул, используя понятие свободных и связанных переменных строк, введено понятие схемы  $scheme(\mathbf{x}, \mathbf{P})$  и множества атрибутов  $attr(\mathbf{x}, \mathbf{P})$ , с которыми переменная строка встречается в формулах.

Как известно, выражения исчисления строк строятся из строк. Областью интерпретации предметных переменных исчисления строк является множество всех строк.

Выражение исчисления строк имеет вид  $\{x(R) \mid P(x)\}$ , где

1. Формула  $P$  — разрешена;
2. Переменная  $x$  — единственная свободно входящая в формулу  $P$  переменная;
3. Если  $scheme(x, P)$  определена, то  $scheme(x, P) = R$ , иначе,  $attr(x, P) \subseteq R$ .

**Обобщенное исчисление на домене.** Исчисление на домене отличается от исчисления строк в том, что вместо переменных строк рассматриваются переменные значения из домена, которые представляют компоненты строки. Также исчисления на домене поддерживает условие принадлежности (membership condition) [6]:  $\langle t(\langle A_1, d_1 \rangle, \langle A_2, d_2 \rangle, \dots), R \rangle$ , где  $R$  — схема,  $A_i$  — атрибут таблицы  $t$ , а  $d_i$  — переменная домена или литерал (предметная константа). Это условие истинно тогда и только тогда, когда в таблице  $t$  существует строка, которая имеет указанные значения с универсального домена  $D$  для указанных атрибутов.

Классическое исчисление на домене также пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами на универсальном домене. Определен синтаксис термов, атомов и формул исчисления на домене; выделен класс разрешенных формул. Выражение исчисления с переменными на домене имеет вид  $\{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$ , где

1. Формула  $P$  — разрешена, а  $x_1, \dots, x_n$  — все свободные переменные (переменные из универсального домена  $D$ ), входящие в формулу  $P$ ;
2.  $R = \{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $R$  — схема, порядок атрибутов фиксированный;
3.  $scheme(x_i, P) = D$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### Эквивалентности обобщенной табличной алгебры, обобщенного исчисления строк и обобщенного исчисления на домене

**Теорема 1.** Для каждого выражения табличной алгебры можно эффективно построить эквивалентное ему выражение исчисления строк.

Теорема 1 устанавливает, что обобщенное исчисление строк не менее выразительно, чем обобщенная табличная алгебра (используя терминологию [5]).

Проведена редукция исчисления строк к исчислению на домене. Для этого задано отображение, которое каждому выражению исчисления строк ставит в соответствие эквивалентное выражение исчисления на домене. Следовательно, имеет место

**Теорема 2.** *Для каждого выражения исчисления строк можно эффективно построить эквивалентное ему выражение исчисления на домене.*

Таким образом, обобщенное исчисление на домене не менее выразительно, чем обобщенное исчисление строк.

Кроме того, доказано, что обобщенная табличная алгебра является не менее выразительной, чем исчисление на домене.

**Теорема 3.** *Для каждого выражения исчисления на домене можно эффективно построить эквивалентное ему выражение табличной алгебры.*

Учитывая представленные выше теоремы, можно сделать вывод, что обобщенная табличная алгебра, обобщенное исчисление строк и обобщенное исчисление на домене одинаково выразительны. Следовательно, установлен основной результат:

**Теорема 4.** *Обобщенная табличная алгебра, обобщенное исчисление строк и обобщенное исчисление на домене эквивалентны.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.
- [2] *Buy D., Glushko I.* Generalized table algebra, generalized tuple calculus and theirs equivalence // Proc. of the CSE'2010 International Scientific Conference on Computer Science and Engineering. — Kosice–Stara Lubovna, Slovakia, 2010. — P. 231–238.
- [3] *Codd E. F.* Relational Completeness of Data Base Sublanguages // Data Base Systems. — New York: Prentice–Hall, 1972. — P. 65–93.
- [4] *Lacroix M., Pirotte A.* Domain-oriented relational languages // Proc. 3rd Int. Conf. on Very Large Data Bases. — Tokyo, 1977. — P. 370–378.
- [5] *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. — М.: Мир, 1987.
- [6] *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.

## Формализация наследования в объектно-ориентированных базах данных. Простое и множественное наследование

*Д. Б. Буй, С. В. Компан*

bui@unicyb.kiev.ua, robin\_2005@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;  
Кировоградский государственный педагогический  
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается наследование классов как одно из основных свойств объектно-ориентированных баз данных. Выполнена формализация производных классов.

### Введение

Рассмотрим такое свойство объектно-ориентированного программирования (ООП), как наследование (inheritance) классов, которое может использоваться при создании объектов баз данных. Идея наследования состоит в том, что сначала создается базовая схема в пределах базового класса, которая определяет общие свойства производных классов. В производном классе базовая схема наследуется в пределах производного класса и расширяется за счет добавления новых атрибутов, которые уточняют производный класс. Схемы производного класса будем называть производными. Схема  $R'$ , которая наследуется с базовой, расширяет базовую схему, т. е.  $R \subset R'$ .

### Формализация наследования

Рассмотрим случай, когда производная схема  $R'$  наследует только одну базовую схему  $R$  и производный класс не имеет методов, имена которых совпадают с именами методов базового класса. Пусть имеем схему  $R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Обозначим через  $O_1^R$  объект класса  $K_1 = \langle R, G_R \rangle$ . Будем считать класс  $K_1$  базовым, а производным от него класс  $K_2 = \langle \bar{R}, G_{\bar{R}} \rangle$ . В классе  $K_2$  схема  $\bar{R} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  состоит из атрибутов, присущих только производному классу. Как правило  $R \cap \bar{R} = \emptyset$ , но это необязательно. Мы также требуем, что  $G_R \cap G_{\bar{R}} = \emptyset$ , где  $G_R$  и  $G_{\bar{R}}$  — множества методов. Объект производного класса  $K_2$  будет объектом вида  $O^{R \cup \bar{R}}$ , т. е. этот объект будет содержать атрибуты схем  $R$  и  $\bar{R}$  ( $R' = R \cup \bar{R}$ ). Функции  $f_i$  для инициализации

зации объекта  $O^{R \cup \bar{R}}$  имеют вид:  $\{f_1, \dots, f_s \mid f_i: R \cup \bar{R} \rightarrow D, i = \overline{1, s}\}$ . В результате ограничения объекта  $O^{R \cup \bar{R}}$  по схеме  $R$  получаем объект  $O_1^R$ . Формально это можно записать так:  $O^{R \cup \bar{R}} \mid R = O_1^R$ , где  $\mid$  — операция ограничения [1, 2].

Для уточнения наследования будем считать, что элементы  $G$  суть имена методов. Введем функцию интерпретации  $\alpha: G \rightarrow F$ , которая именам методов сопоставляет их семантику<sup>1</sup>. Тогда  $F$  есть множество конечноместных операций над состояниями объектов. Пусть  $K_1 = \langle R_1, G_1 \rangle$  родительский класс, а  $K_2 = \langle R_2, G_2 \rangle$  его производный класс. Обозначим  $\alpha: G_1 \rightarrow F$  — функцию для родительского класса, а  $\beta: G_2 \rightarrow F$  — функцию для производного класса, который наследует атрибуты и методы родительского класса. Тогда вид простого наследования, которое мы рассматриваем, будет описываться функцией  $\gamma: G_1 \cup G_2 \rightarrow F$ .

Рассмотрим случай, когда производный класс наследует только один родительский класс и производный класс имеет методы, имена (и параметры функций) которых совпадают с именами (и параметрами функций) методов родительского класса. В этом случае в производном классе методы, которые принадлежат ему, переопределяют (overriding) методы с такими же именами родительского класса. Для формализации такого наследования введем операцию наложения  $\nabla$ :  $\alpha \nabla \beta = \beta \cup \alpha \mid G_1 \setminus G_2 = \beta \cup \alpha \mid (dom \alpha \setminus dom \beta)$ , где, как и ранее,  $\mid$  — операция ограничения, а  $dom \alpha$  и  $dom \beta$  — области определения соответственно функций  $\alpha$  и  $\beta$ . Свойства операции наложения  $\nabla$ :

1.  $\alpha \nabla \alpha = \alpha \cup \alpha \mid (dom \alpha \setminus dom \alpha) = \alpha \cup \alpha \mid \emptyset = \alpha \cup f_\emptyset = \alpha$ , где  $f_\emptyset$  — всюду неопределенная функция (идемпотентность);
2.  $\alpha \nabla \beta \neq \beta \nabla \alpha$ ;
3.  $dom(\alpha \nabla \beta) = dom \alpha \cup dom \beta$ .

В следующей лемме  $\approx$  — отношение совместности:  $\alpha \approx \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha \mid X = \beta \mid X$ , где  $X = dom \alpha \cap dom \beta$ .

**Утверждение 1** (критерий коммутативности операции наложения).  
Для любых функций  $\alpha$  и  $\beta$  выполняются следующие утверждения:  
 $\alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha \iff \alpha \approx \beta$ .

<sup>1</sup>Семантика метода — конечноместная операция над состояниями объектов.

*Доказательство.* Необходимость.

$$\begin{aligned}\alpha \nabla \beta &= \beta \cup \alpha \mid \text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta = \\ &= \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \alpha) \cup \beta \mid (\text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta) \cup \alpha \mid \text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta. (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \nabla \alpha &= \alpha \cup \beta \mid \text{dom } \beta \setminus \text{dom } \alpha = \\ &= \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta) \cup \beta \mid \text{dom } \beta \setminus \text{dom } \alpha. (**)\end{aligned}$$

Необходимость следует из (\*), (\*\*) и общезначимой теоретико-множественной импликации:  $A \cup B = A' \cup B \Rightarrow A = A'$  при условии, что  $A \cap B = A' \cap B = \emptyset$ . Достаточность следует из (\*), (\*\*) и определения отношения совместности. ■

Рассмотрим наследование, при котором один производный класс наследует атрибуты и методы от нескольких родительских классов [3]. Напомним, такое наследование принято называть множественным (кратным, multiple inheritance). Может возникнуть ситуация, когда в двух и более родительских классах находятся методы с одинаковыми именами и параметрами. В результате, в производном классе такой метод будет наследоваться путем его переопределения. Возникает вопрос: какой именно метод должен наследоваться в конечном итоге в производном классе? Должно существовать правило, позволяющее однозначно ответить на вышеприведенный вопрос. Такое правило существует в постреляционной СУБД Cache [4, 5]. Правило: при наследовании в первую очередь наследуются ключевые слова, свойства, методы и параметры первого родительского класса (системного)<sup>2</sup> класса в списке. Потом для каждого последующего по списку родительского класса наследуются свойства, методы и параметры класса, при этом, если находятся ранее определенные элементы с таким же именем, они перекрываются новыми элементами. Ключевые слова наследуются исключительно из первого родительского класса и не переопределяются. Операция наложения дает возможность использовать left-to-right и right-to-left наследование. Формально такие виды наследования можно описать с помощью операции наложения  $\nabla$ :  $\overrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \alpha_3 \nabla \alpha_2 \nabla \alpha_1$  и

<sup>2</sup>Поскольку изменить семантику системных классов мы не можем, в дальнейшем их не рассматриваем.

$\overleftarrow{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \alpha_1 \nabla \alpha_2 \nabla \alpha_3$ . В последних выражениях мы не расставляли скобки, так как следующая лемма утверждает ассоциативность наложения.

**Утверждение 2** (ассоциативность операции наложения). *Для любых функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  выполняется следующее утверждение:  $(\alpha \nabla \beta) \nabla \gamma = \alpha \nabla (\beta \nabla \gamma)$ .*

*Доказательство.* На основании определения операции наложения и свойств ограничения [2] получаем такие равенства:  $(\alpha \nabla \beta) \nabla \gamma = (\beta \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta)) \nabla \gamma = \gamma \cup (\beta \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta)) \mid (\text{dom } \alpha \cup \text{dom } \beta) \setminus \text{dom } \gamma = \gamma \cup (\beta \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta)) \mid ((\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma)) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta) \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup (\alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta)) \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta) \cap (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \beta) \cap (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid \text{dom } \alpha \setminus (\text{dom } \beta \cup \text{dom } \gamma) \cup \emptyset = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus (\text{dom } \beta \cup \text{dom } \gamma)) \cup \beta \mid (\text{dom } \alpha \setminus \text{dom } \gamma) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus (\text{dom } \beta \cup \text{dom } \gamma)) \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus (\text{dom } \beta \cup \text{dom } \gamma))$ .

Перейдем к правой части равенства, которое доказывается:  $\alpha \nabla (\beta \nabla \gamma) = \alpha \nabla (\gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma)) = \gamma \cup \beta \mid (\text{dom } \beta \setminus \text{dom } \gamma) \cup \alpha \mid (\text{dom } \alpha \setminus (\text{dom } \beta \cup \text{dom } \gamma))$ . ■

## Выводы

С помощью операции наложения  $\nabla$  математически описано простое и множественное наследование. Приведены свойства операции наложения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.
- [2] Буй Д. Б., Кажута Н. Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету ім. Т. Г. Шевченка. — 2005. — Вып. 2. — С. 157–170.
- [3] Харрингтон Дж. Разработка баз данных: Пер. с англ. — М.: ДМК Пресс, 2005.
- [4] Кирстен В., Иррингер М. Постреляционная СУБД Cache 5. Объектно-ориентированная разработка приложений. — М.: Бином, 2008.



- [5] [http://docs.intersystems.com/cache20102/csp/docbook/DocBook.UI.Page.cls\?KEY=GOBJ\\_model#GOBJ\\_model\\_inheritance](http://docs.intersystems.com/cache20102/csp/docbook/DocBook.UI.Page.cls\?KEY=GOBJ_model#GOBJ_model_inheritance).

## Формализация объектов, классов, методов в объектно-ориентированных базах данных

*Д. Б. Буй, С. В. Компан*

buy@unicyb.kiev.ua, robin\_2005@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;  
Кировоградский государственный педагогический  
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается математическое описание объекта, класса, методов класса. Формально описывается жизненный цикл объекта.

**Введение.** Существуют различные реализации языка структурированных запросов табличных баз данных (БД) SQL (Structured Query Language). Создатели СУБД, как правило, учитывают одну из реализаций языка SQL, которая на данный момент является актуальной. В результате появилась необходимость построить формальную модель табличных (реляционных) структур, которая даст возможность поддерживать различные стандарты. На данном этапе развития объектно-ориентированных баз данных (ООБД) не существует адекватных формальных моделей объектно-ориентированных БД, идеология работы которых базируется на объектно-ориентированном подходе к программированию. По аналогии с языком SQL каждый создатель устанавливает свои подходы к разработке ООБД. Следует отметить, что общим для различных ООБД является использование объектно-ориентированных языков программирования, основными свойствами которых являются инкапсуляция, полиморфизм и наследование. Для табличных (реляционных) баз данных такая формализация была сделана с помощью теории табличных алгебр [1], которые существенно обобщают реляционные алгебры Кодда. Цель статьи — дать математическое описание основных элементов ООБД.

Существуют различные формы представления информации. Один из подходов состоит в том, что любую сущность реального

мира можно описать в виде объекта, который содержит в себе набор свойств (атрибутов), идентифицирующих эту сущность. Каждый объект характеризуется [2]:

- состоянием, которое определяется перечислением всех свойств объекта и текущими значениями каждого из этих свойств;
- поведением, которое описывает реакции объекта на действия извне.

В ООБД используется понятие класса, в котором описываются свойства объекта и методы, которые определяют поведение объекта. Описание такого класса, на самом деле, содержит в себе схему БД. Схема — это семантическая единица, которая описывает свойства объектов, с другой стороны, схема является шаблоном, на основании которого создаются объекты [3, с. 30]. Объект, созданный на основе такого шаблона, является экземпляром схемы.

**Формализация основных элементов ООБД.** В ООБД информация представляется в виде объектов. Формализуем это понятие. Для этого зафиксируем следующие три множества:  $A$ , элементы которого назовем атрибутами,  $D$  — универсальный домен (множество всех возможных значений атрибутов) и  $M = \{g_1, g_2, \dots\}$  — множество функций (методов). Множества  $A$  и  $D$  представляют собой множества имен и денотатов соответственно [1, с. 31]. По аналогии со схемой таблицы схемой  $R$  объекта будем называть конечное множество атрибутов  $R \subseteq A$ ,  $R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  [1, с. 31]. В дальнейшем нам придется расширять понятие схемы БД до класса, включая в нее методы. Объекты будем обозначать через  $O, O_1, O_2, \dots$ . Существуют разные классы атрибутов: простые (simple) и составные (composite) атрибуты (attributes), однозначные (single-valued) и многозначные (multivalued) атрибуты, базовые (stored) и производные (derived) атрибуты, ключи (keys). Простой атрибут состоит из одного компонента с независимым существованием. Составной атрибут состоит из нескольких компонентов, каждый из которых характеризуется независимым существованием. Будем рассматривать простые атрибуты [4, 5].

При создании объекта мы должны присвоить значения его атрибутам (инициализировать). В общем случае инициализацию объекта можно представить таким образом:

$$O = \{\langle A_1, d_1 \rangle, \langle A_2, d_2 \rangle, \dots, \langle A_n, d_n \rangle\} = f, \quad (1)$$

где  $f: R \rightarrow D$  и  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in D$ . Выражение (1) описывает строку таблицы, которая содержит значения соответствующих атрибутов объекта.

В общем виде объектов, имеющих одинаковую схему  $R$ , может существовать несколько, поэтому таблица, описывающая такую ситуацию, будет многомерной. Такую таблицу формально можно описать в виде

$$\{f_1, \dots, f_m\}, \quad f_i: R \rightarrow D, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где  $f_i$  — функция, в качестве аргументов которой выступают атрибуты схемы  $R$ , а значения берутся из универсального домена  $D$ . Данная функция определяет состояние объекта в определенный момент времени. Выражение (2) можно записать в таком виде:

$$\{\{\langle A_1, d_1^i \rangle, \dots, \langle A_n, d_n^i \rangle\} \mid i = \overline{1, m}\}.$$

В ООБД схема есть часть более широкого понятия, которое принято называть классом. Класс инкапсулирует в себе схему  $R$  и методы. Поэтому класс уместно описать парой  $K = \langle R, G \rangle$ , где  $R$  — схема,  $G$  — множество методов. В какой-то момент времени объект будет иметь состояние, при котором атрибуты объекта вообще не будут иметь значений (не будут инициализированными), поэтому можно считать, что в этот момент времени атрибуты будут иметь специальное, так называемое, неопределенное значение  $\Lambda$ . Выражение (2) будет иметь вид

$$\{f_1, \dots, f_m \mid f_i: R \rightarrow \overline{D}, i = \overline{1, m}\}, \quad \text{где } \overline{D} = D \cup \{\Lambda\}. \quad (3)$$

Случай, при котором все атрибуты инициализированного объекта  $O$  схемы  $R$  неопределены, описывается равенством:  $f(A_i) = \Lambda, i = \overline{1, n}$ . Конструктор можно формально представить функцией  $g: D^k \rightarrow OM$ , где  $OM$  — множество инициализированных объектов. Точнее, эту функцию можно записать равенством  $g(d_1, \dots, d_k) = O$ , где  $d_1, \dots, d_k$  — значения атрибутов, которым присвоены значения. Учитывая равенства (1) и (3), получим

$$g_{\langle A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \rangle}(d_1, \dots, d_k) = \{\langle A_{i_1}, d_1 \rangle, \dots, \langle A_{i_k}, d_k \rangle\}.$$

Таким образом, по функции вида  $g$  мы можем получить функции вида  $f: f(A_{i_s}) = d_s, s = 1, 2, \dots, k$ , и для любого атрибута  $A \in R \setminus \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$   $f(A) = \Lambda$ .

**Жизненный цикл объекта.** Каждый объект имеет свой жизненный цикл — последовательность состояний, которые сменяют друг друга от образования объекта и до его удаления или же до перехода объекта в состояние, при котором он не будет изменяться. Под формализацией жизненного цикла будем подразумевать построение множества состояний и определение логики переходов из одного состояния в другое. На протяжении жизненного цикла объект изменяет свое состояние с помощью такой характеристики, как поведение, которая определяется методами (функциями)  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ , описанными в классе  $K$ . Обозначим множество всех состояний объекта схемы  $R$  через  $F(R) = \{f \mid f: R \rightarrow \overline{D}\}$ . Метод (функция) класса является алгебраической операцией:  $f^m: \underbrace{F(R) \times \dots \times F(R)}_{m \text{ раз}} \rightarrow F(R)$ .

При действии метода на текущие состояния  $f_1, \dots, f_m$  объектов мы получаем новое состояние объекта:  $g(f_1, \dots, f_m) \in F(R)$  (исходя из того, что новое состояние объекта может зависеть от его предыдущего состояния и текущего состояния других объектов, с которыми он взаимодействует).

## Выводы

Формально описаны понятия объекта, схемы, класса и жизненного цикла объекта. В отличие от реляционных БД, где таблица определяется схемой, в ООБД каждый объект определяется классом, на основании которого он был построен. Объект БД можно представить в виде строки таблицы, в которой находятся значения соответствующих атрибутов объекта, а экземпляры класса — в виде множества строк такой же таблицы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академпериодика», 2001.
- [2] Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++. — СПб.: Бином: Невский Диалект, 1998. <http://www.helloworld.ru/texts/comp/other/oop/ch03.htm>
- [3] Харрингтон Дж. Разработка баз данных: Пер. с англ. — М.: ДМК Пресс, 2005.

- [4] Atkinson M., DeWitt D., Maier D., Dittrich K. The Object-Oriented Database System Manifesto. <http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/2003/Databases/oo-manifesto.pdf>
- [5] Грошев А. С. Основы работы с базами данных. <http://www.intuit.ru/department/database/basedbw/2/3.html>

## Полнота аксиоматики Армстронга

*Д. Б. Буй, А. В. Пузикова*

anna\_inf@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;  
Кировоградский государственный педагогический  
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается математическое доказательство полноты аксиоматики Армстронга теории функциональных зависимостей в реляционных базах данных.

Пусть  $A$  — множество атрибутов (имен),  $t$  — таблица,  $R$  — схема таблицы  $t$  (произвольное конечное множество атрибутов),  $X, Y, Z$  — подмножества схемы  $R$ ,  $s, s_1, s_2$  — строки таблицы  $t$ .

Скажем, что на таблице  $t$  выполняется *функциональная зависимость* (ФЗ) [1, с. 71]  $X \rightarrow Y$ , если для двух произвольных строк  $s_1, s_2$  таблицы  $t$ , которые принимают равные значения на множестве атрибутов  $X$ , имеет место их равенство на множестве атрибутов  $Y$ :

$$(X \rightarrow Y)(t) = \text{true} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall s_1, s_2 \in t (s_1 \upharpoonright X = s_2 \upharpoonright X \Rightarrow s_1 \upharpoonright Y = s_2 \upharpoonright Y).$$

Скажем, что таблица  $t$  схемы  $R$  является *моделью* множества функциональных зависимостей  $F$ , если каждая функциональная зависимость  $(X \rightarrow Y) \in F$  выполняется на таблице  $t$ :

$$t \text{ модель } F \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall (X \rightarrow Y) (X \rightarrow Y \in F \Rightarrow (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}).$$

**Семантическое следование.** Функциональная зависимость  $X \rightarrow Y$  *семантически выводится* ( $\models$ ) из множества функциональных зависимостей  $F$ , если на каждой таблице  $t(R)$ , которая является моделью множества ФЗ  $F$ , выполняется также функциональная зависимость  $X \rightarrow Y$ :

$$F \models X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall t(R) (t \text{ модель } F \Rightarrow (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}).$$

Формальные доказательства следующих лемм приводятся на основе свойств ограничения функций по множеству [2].

**Лемма 1** (*аксиома рефлексивности* по Вильяму Армстронгу).

$$\forall t (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}, Y \subseteq X.$$

**Следствие.**  $\emptyset \models X \rightarrow Y, \forall Y \subseteq X$  (такая функциональная зависимость называется *тривиальной*).

**Лемма 2** (*правило пополнения*).

$$(X \rightarrow Y)(t) = \text{true} \Rightarrow (X \cup Z \rightarrow Y \cup Z)(t) = \text{true}, \forall Z \subseteq R.$$

**Следствие.**  $F \models X \rightarrow Y \Rightarrow F \models X \cup Z \rightarrow Y \cup Z$ .

**Лемма 3** (*правило транзитивности*).

$$(X \rightarrow Y)(t) = \text{true} \wedge (Y \rightarrow Z)(t) = \text{true} \Rightarrow (X \rightarrow Z)(t) = \text{true}.$$

**Следствие.**  $F \models X \rightarrow Y \wedge F \models Y \rightarrow Z \Rightarrow F \models X \rightarrow Z$ .

**Синтаксическое следование.** Скажем, что функциональная зависимость *синтаксически выводится* из множества ФЗ  $F$  ( $\vdash$ ), если существует конечная последовательность  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$ , такая, что  $\varphi_m = X \rightarrow Y$  и  $\forall i = \overline{1, m-1}$  каждая  $\varphi_i$  либо является аксиомой рефлексивности, либо принадлежит  $F$ , либо получена по какому-нибудь правилу вывода из предыдущих в этой последовательности  $\varphi_j, \varphi_k, j, k < 1$  [4, с. 65].

Пусть задано произвольное множество функциональных зависимостей  $F$ . *Замыкание*  $[F]$  — это множество всех ФЗ, которые синтаксически выводятся из  $F$ :

$$[F] \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow Y \mid F \vdash X \rightarrow Y\}.$$

**Лемма 4.** *Выполняются соотношения (свойства замыкания множества ФЗ):*

- 1)  $F \subseteq [F]$ ;
- 2)  $[[F]] = [F]$  [3, с. 57].

**Следствие** [3, с. 56]. Замыкание  $[F]$  — это наименьшее содержащее  $F$  множество, такое, что при применении к нему аксиом Армстронга нельзя получить ни одной функциональной зависимости, которая не принадлежала бы  $[F]$ .

Из описанных выше аксиомы и правил вывода для упрощения практических вычислений замыкания  $[F]$  множества ФЗ  $F$  можно получить другие правила вывода.

**Лемма 5** (правило композиции) [5, с. 275].

$$\{X_1 \rightarrow Y_1, X_2 \rightarrow Y_2\} \vdash X_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup Y_2.$$

**Следствие.**  $\{X \rightarrow Y_1, X \rightarrow Y_2\} \vdash X \rightarrow Y_1 \cup Y_2$ .

**Лемма 6** (правило декомпозиции) [5, с. 275].

$$X \rightarrow Y_1 \cup Y_2 \vdash X \rightarrow Y_1 \wedge X \rightarrow Y_2 \vdash X \rightarrow Y_2.$$

Замыканием  $[X]$  множества атрибутов  $X$  называется объединение правых частей всех ФЗ вида  $X \rightarrow Y$ , которые выводятся (синтаксически) из множества  $F$ :

$$[X]_F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{X \rightarrow Y \in [F]} Y.$$

**Лемма 7.** Выполняются соотношения (свойства замыкания множества  $X$ ):

- 1)  $X \subseteq [X]$ ;
- 2)  $F \vdash X \rightarrow [X]$ ;
- 3)  $X \rightarrow Z \notin [F] \Rightarrow Z \notin [X] \subset R$ .

**Утверждение 8** (корректность аксиоматики). Если ФЗ  $X \rightarrow Y$  синтаксически выводится из множества ФЗ  $F$ , то ФЗ  $X \rightarrow Y$  выводится из  $F$  семантически:

$$F \vdash X \rightarrow Y \Rightarrow F \models X \rightarrow Y.$$

**Утверждение 9** (полнота аксиоматики). Если ФЗ  $X \rightarrow Y$  семантически выводится из множества ФЗ  $F$ , то ФЗ  $X \rightarrow Y$  выводится из  $F$  синтаксически:

$$F \models X \rightarrow Y \Rightarrow F \vdash X \rightarrow Y.$$

**Теорема.** *Отношения семантического и синтаксического следования совпадают  $F \vdash X \rightarrow Y \Leftrightarrow F \models X \rightarrow Y$ .*

**Следствие.** *Аксиоматика Армстронга является полной.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академпериодика», 2001.
- [2] *Буй Д. Б., Кахута Н. Д.* Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету ім. Т. Г. Шевченка. — 2005. — Вып. 2. — С. 157–170.
- [3] *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. — М.: Мир, 1987.
- [4] *Линдон Р.* Заметки по логике. — М.: Мир, 1968.
- [5] *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных. 8-е издание. — М.: Вильямс, 2005.

## Полиномиальные алгоритмы для распознавания сохранения некоторых множеств функциями, представленными полиномами

*А. В. Бухман*

antvbx@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

В данной заметке описаны полиномиальные алгоритмы для распознавания свойства функций многозначных логик сохранять некоторые множества; функции задаются в виде полиномов.

#### Основные определения

Пусть  $k \geq 2$  — натуральное число,  $E_k = \{0, \dots, k - 1\}$ .

**Определение 1.** *Функцией  $k$ -значной логики, зависящей от  $n$  переменных, будем называть любое отображение вида  $f : E_k^n \rightarrow E_k$ .*

Множество всех функций  $k$ -значной логики будем обозначать  $P_k$ . Множество всех функций  $k$ -значной логики, зависящих от  $n$  переменных, будем обозначать  $P_k^n$ .



Обычным образом [1] вводится операция суперпозиции над функциями из  $P_k$ .

**Определение 2.** Пусть  $Q \subset P_k$ . Множество  $Q$  называется *замкнутым классом*, если всякая функция, полученная в результате суперпозиции любых функций из  $Q$ , принадлежит  $Q$ .

**Определение 3.** Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  сохраняет множество  $\mathcal{E} \subseteq E_k$ , если для любых  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  будет верно  $f(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}$ .

**Теорема 1** [1]. *Множество всех функций, сохраняющих некоторое собственное подмножество  $E_k$ , есть замкнутый класс.*

В данной работе рассматривается задание функции в виде полиномов. Такой способ задания делает возможной для некоторых функций подачу на вход алгоритма достаточно короткой записи.

На вход алгоритма подаётся запись функции в виде полинома, причём слагаемые с нулевыми коэффициентами опускаются.

Исполнителем алгоритма будет машина Тьюринга.

### Некоторые свойства

**Теорема 2.** Пусть  $k$  — простое число,  $l \in E_k \setminus \{0\}$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $\mathcal{E} = E(lx^i)$  и  $\psi_{\mathcal{E}}(x)$  — некоторая функция, которая равна 0 на множестве  $\mathcal{E}$  и не равна нулю вне этого множества.

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  сохраняет множество  $\mathcal{E}$  тогда и только тогда, когда

$$\psi_{\mathcal{E}}(f(lx_1^i, \dots, lx_n^i)) \equiv 0. \quad (1)$$

**Теорема 3.** Пусть  $k$  — простое число,  $l \in E_k \setminus \{0\}$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $\mathcal{E} = E(lx^i) \setminus \{0\}$  и  $\psi_{\mathcal{E}}(x)$  — любая функция, такая, что она принимает значение 0 тогда и только тогда, когда  $x \in \mathcal{E}$ . Функция  $f \in P_k^n$  сохраняет множество  $\mathcal{E}$  тогда и только тогда, когда

$$\psi_{\mathcal{E}}(x_1^{k-1} \dots x_n^{k-1} f(lx_1^i, \dots, lx_n^i) + l - lx_1^{k-1} \dots x_n^{k-1}) \equiv 0. \quad (2)$$

### Алгоритмы распознавания

**Теорема 4.** Для любого простого числа  $k$ , любого  $l \in E_k \setminus \{0\}$  и любого  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  можно построить полиномиальный алгоритм, который по полиному функции  $f \in P_k$  распознает, сохраняет ли эта функция множество  $\mathcal{E} = E(lx^i)$ .

**Теорема 5.** Для любого простого числа  $k$ , для любого  $l \in E_k \setminus \{0\}$  и для любого  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  можно построить полиномиальный алгоритм, который по полиному функции  $f \in P_k$  распознаёт, сохраняет ли эта функция множество  $\mathcal{E} = E(lx^i) \setminus \{0\}$ .

**О количестве функций, которые можно распознать предложенными алгоритмами**

Количество собственных подмножеств в  $E_k$  равно  $2^k - 2$ . Оценим число множеств, сохранение которых можно распознать предложенными алгоритмами. Различных множеств вида  $E(lx^i)$ , где  $i, l = 1, \dots, k-1$ , ровно  $\sum_{d|k-1} d$ . Различных множеств вида  $E(lx^i) \setminus \{0\}$ ,

где  $i, l = 1, \dots, k-1$ , ровно  $\sum_{d|k-1} d$ . Заметим, что среди таких множеств содержатся  $\{0\}, \dots, \{k-1\}$ , они распознаются тривиально.

Для  $k = 3$  предложенными алгоритмами можно распознать сохранение 6 множеств (то есть всех).

**Теорема 6.** Пусть  $k \geq 3$  — простое число. Для каждого из множеств

$$\begin{aligned} & \{1, \dots, k-1\}, \\ & \{0, 1\}, \dots, \{0, k-1\}, \\ & \{0, -l, l\}, \{l, -l\}, l \in E_k, \\ & \{0, 1^2, 2^2, \dots, (\frac{k-1}{2})^2\}, \\ & \{1^2, 2^2, \dots, (\frac{k-1}{2})^2\} \end{aligned}$$

существует полиномиальный, относительно длины записи полинома функции  $f$ , алгоритм, который распознаёт по полиному функции сохранение функцией этого множества.

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} & \{1, \dots, k-1\} = E(x) \setminus \{0\}, \\ & \{0, 1\} = E(x^{k-1}), \dots, \{0, k-1\} = E((k-1)x^{k-1}), \\ & \{0, l, -l\} = E(lx^{(k-1)/2}), \quad \{l, -l\} = E(lx^{(k-1)/2}) \setminus \{0\}, \\ & \{0, 1^2, 2^2, \dots, (\frac{k-1}{2})^2\} = E(x^2), \\ & \{1^2, 2^2, \dots, (\frac{k-1}{2})^2\} = E(x^2) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Далее применяем теоремы 4, 5. ■

Работа поддержана РФФИ, грант № 10-01-00768-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

## О фасетах бимодулярного полиэдра

*С. И. Веселов*

veselov@vnmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Матрица с целыми элементами называется *бимодулярной*, если модуль ее любого базисного минора не превышает 2 (см., например, [1]).

Выпуклая оболочка всех целых точек, принадлежащих полиэдру  $P$ , обозначается символом  $P_{\mathbf{Z}}$ .

Бимодулярным называется полиэдр  $\{x : Ax \leq b\}_{\mathbf{Z}}$ , где  $A$  — бимодулярная матрица.

Пусть  $c \in \mathbf{Z}^n$  и гиперплоскость  $c^T x = c'$ , не содержащая точек из  $P_{\mathbf{Z}}$ , является опорной к полиэдру  $P$ . Неравенство  $c^T x \leq c''$  с целыми коэффициентами называется *отсечением* (ср. [2, 3]) для полиэдра  $P$ , если

$$c'' = \begin{cases} \lfloor c' \rfloor, & \text{если } c' \notin \mathbf{Z}; \\ c' - 1, & \text{если } c' \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

В докладе описывается подмножество фасет бимодулярного полиэдра  $P_{\mathbf{Z}}$ , которые являются отсечениями для  $P$ .

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00545-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Veselov S. I., Chirkov A. J. Integer program with bimodular matrix // Discrete Optimization. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 220–222.
- [2] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. — Т. 2. — М.: Мир, 1991.
- [3] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

## Суперпозиции ациклических программ

*В. Ю. Винник, Т. С. Парфирова*

vadim.vinnik@gmail.com, tetiana.parfirova@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

Для класса ациклических именных функций, введённых в предыдущих работах авторов, в дополнение к уже установленным свойствам замкнутости относительно композиций умножения и наложения, установлена замкнутость относительно суперпозиции ациклической функции на место базисной функции другой ациклической функции.

### Базовые определения

В формальном аппарате композиционного программирования [1, 2] данные моделируются именными множествами (ИМ), а программы — именными функциями (ИФ), их определения приведены ниже. Обозначим через  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{D}$  множество всех имен и денотатов соответственно.  $V$ -именным множеством называют конечное функциональное бинарное отношение  $\alpha \in \mathcal{D}^V$ ,  $V \subseteq \mathcal{V}$ . Через  $\mathcal{N}$  обозначим класс всех ИМ.

По определению, ИФ — это унарная частичная функция вида  $f : \mathcal{N} \rightrightarrows \mathcal{N}$ . ИФ называется  $V$ -арной, если  $\text{dom} f \subseteq \mathcal{D}^V$ , и  $(V, W)$ -арной, если помимо этого еще и  $\text{rang} f \subseteq \mathcal{D}^W$ . Функция, имеющая некоторую арность, называется полиарной. Везде далее рассматриваются только полиарные функции.

Бинарная операция наложения ИМ определяется следующим образом:

$$\alpha \nabla \beta = \beta \cup \{(u, d) \mid (u, d) \in \alpha, u \notin \text{pr}_1(\beta)\}.$$

Композиции рассматриваем как алгебраические операции над именными функциями. Композиции умножения и наложения функций определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\alpha) &\simeq g(f(\alpha)), \\ (f \nabla g)(\alpha) &\simeq f(\alpha) \nabla g(\alpha). \end{aligned}$$

Содержательно эти операции соответствуют последовательному и параллельному выполнению программ.

### Ациклические программы

Напомним определение ациклической функции [3]. Будем в данном контексте отождествлять программу и моделирующую её ИФ. Пусть программа состоит из  $n$  подпрограмм  $f_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Вход программы рассматривается как выход ее условной 0-й подпрограммы; дуальным образом, выход ациклической программы рассматривается как вход ее условной  $(n + 1)$ -й подпрограммы.

Допустим, что функции  $f_i$  (при  $i = \overline{1, n}$ ) имеют арность  $(U_i, V_i)$ . Пусть даны множества имен  $V$  и  $U$ , которые обозначим  $V_0$  и  $U_{n+1}$ . Пусть, далее, для всех  $i, j$ , где  $0 \leq i < j \leq n + 1$ , даны конечные отображения  $\xi_{i,j} : V \xrightarrow{\sim} V$ . Совокупность этих отображений можно рассматривать как треугольную матрицу  $\Xi$  с  $n + 1$  строками и столбцами, причем нумерация строк начинается с 0, а столбцов — с 1. Налагаются следующие ограничения:

$$V_i \subseteq \bigcup_{j=i+1}^{n+1} \text{pr}_2(\xi_{i,j}), \quad i = \overline{0, n},$$

$$U_j = \bigcup_{i=0}^{j-1} \text{pr}_1(\xi_{i,j}), \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Тогда, по определению, ациклическая ИФ в базисе  $\Phi$  — это  $(V, U)$ -арная ИФ  $f = \mathbb{T}_{V,U}^{\Xi}(f_1, \dots, f_n)$ , такая, что  $f_1, \dots, f_n \in \Phi$ , и для любого  $V$ -именного множества  $\alpha$  значение  $\beta = f(\alpha)$  определяется по следующим рекуррентным соотношениям, где  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\beta = \beta_{n+1}$ :

$$\beta_k = \bigvee_{i=0}^{k-1} (\xi_{i,k} \circ \alpha_i), \quad k = \overline{1, n+1},$$

$$\alpha_k = f_k(\beta_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Отметим, что, содержательно,  $\alpha_i$  (при  $0 \leq i \leq n$ ) и  $\beta_i$  (при  $1 \leq i \leq n + 1$ ) — это соответственно результат работы и данные на входе  $i$ -й подпрограммы.

Ранее были доказаны следующие свойства ациклических ИФ:

— ациклическость<sup>1</sup> в базисе  $\{f\}$  самой функции  $f$ ;

<sup>1</sup>Здесь и далее под ациклическостью какой-либо наперед заданной функции  $f$  понимается возможность представить её в виде  $f = \mathbb{T}_{V,U}^{\Xi}(f_1, \dots, f_n)$ , указав подходящую матрицу переименований  $\Xi$ .

- ацикличность в базисе  $\{f_1, \dots, f_n\}$  произведения  $f_1 \circ \dots \circ f_n$  и наложения  $f_1 \nabla \dots \nabla f_n$ ;
- ацикличность произведения и наложения двух ациклических ИФ (т. е. замкнутость класса ациклических функций относительно данных операций).

### Ацикличность суперпозиции ациклических функций

**Теорема.** Пусть  $f = T_{U,V}^{\Xi}(f_1, \dots, f_m)$  и  $g = T_{X,Y}^{\Psi}(g_1, \dots, g_n)$  — ациклические ИФ и  $k$  — такой номер, что  $1 \leq k \leq m$ . Тогда функция  $h$ , полученная подстановкой в  $f$  вместо базисной функции  $f_k$  функции  $g$ , то есть

$$\begin{aligned} h &= T_{U,V}^{\Xi}(f_1, \dots, f_m)[f_k \leftarrow T_{X,Y}^{\Psi}(g_1, \dots, g_n)] = \\ &= T_{U,V}^{\Xi}(f_1, \dots, f_{k-1}, T_{X,Y}^{\Psi}(g_1, \dots, g_n), f_{k+1}, \dots, f_m), \end{aligned}$$

может быть представлена в виде  $h = T_{U,V}^Z(h_1, \dots, h_r)$  для некоторых  $r$ , матрицы переименований  $Z[r+1 \times r+1]$ , функций  $h_i$  ( $0 \leq i \leq r$ ).

Можно предложить несколько способов такого сведения. Сначала приведем без доказательства прямой способ, при котором  $r = m + n - 1$ ,

$$h = T^Z(f_1, \dots, f_{k-1}, g_1, \dots, g_n, f_{k+1}, \dots, f_m),$$

а элементы матрицы переименований определяются по следующим правилам:

1. Если  $0 \leq j < i \leq k - 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i}$ .
2. Если  $k \leq i \leq k + n - 1$  и  $0 \leq j \leq k - 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \psi_{0,i-k+1} \circ \xi_{j,k}$ .
3. Если  $k \leq j < i \leq k + n - 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \psi_{j-k+1,i-k+1}$ .
4. Если  $k + n \leq i \leq m + n$  и  $0 \leq j \leq k - 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i-n+1} \nabla \xi_{k,i-n+1} \circ \psi_{0,n+1} \xi_{j,k}$ .
5. Если  $k + n \leq i \leq m + n$  и  $k \leq j \leq k + n - 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{k,i-n+1} \circ \psi_{j-k+1,n+1}$ .
6. Если  $k + n \leq j < i \leq m + n$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j-n+1,i-n+1}$ .

При втором способе достигается гораздо более простой вид матрицы переименований  $Z$ , однако для этого требуется расширить базис двумя вспомогательными функциями — тождественными ИФ соответствующей арности. Обозначим  $U$ -арную тождественную ИФ через  $\text{id}_U$ . Тогда  $r = m + n + 1$  и

$$h = T^Z(f_1, \dots, f_{k-1}, \text{id}_X, g_1, \dots, g_n, \text{id}_Y, f_{k+1}, \dots, f_m),$$

где элементы матрицы  $Z$  определяются по следующим правилам:

1. Если  $0 \leq j < i \leq k$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i}$ .
2. Если  $k \leq j < i \leq k + n + 1$ , то  $\zeta_{j,i} = \psi_{j-k,i-k}$ .
3. Если  $k + 1 \leq j < i \leq m + n + 2$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j-n-1,i-n-1}$ .
4. Если  $0 \leq j \leq k - 1$  и  $k + n + 2 \leq i \leq m + n + 2$ , то  $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i-n-1}$ .
5. Во всех остальных случаях  $\zeta_{j,i} = \emptyset$ .

Иными словами, если матрицу  $\Xi$  представить в блочной форме

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{0,1} & \Xi_{0,2} \\ & \Xi_{1,2} \end{bmatrix},$$

где матрицы  $\Xi_{0,1}$  и  $\Xi_{0,2}$  верхнетреугольные, а  $\Xi_{1,2}$  — прямоугольная, причём  $\Xi_{0,1}$  содержит  $k$  строк и столбцов, то матрица  $Z$  имеет вид

$$Z = \begin{bmatrix} \Xi_{0,1} & \emptyset & \Xi_{0,2} \\ & \Psi & \emptyset \\ & & \Xi_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, класс ациклических ИФ замкнут относительно суперпозиции. Примечательно, что из этого следуют ранее установленные свойства замкнутости данного класса относительно умножения и наложения. В самом деле, если  $h'$  и  $h''$  — две ациклические ИФ, то для приведения их произведения  $h' \circ h''$  и наложения  $h' \nabla h''$  к ациклическому виду достаточно привести к ациклическому в базисе  $\{f_1, f_2\}$  виду функции  $f_1 \circ f_2$  и  $f_1 \nabla f_2$ , а затем рассмотреть суперпозицию  $h'$  вместо  $f_1$  и  $h''$  вместо  $f_2$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Редько В. Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. — 1978. — № 5. — С. 3–24.
- [2] Редько В. Н. Композиционная структура программологии // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 4. — С. 47–66.
- [3] Парфирова Т. С. Ациклическі композиційні програми та їх властивості // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2010. — № 2. — С. 148–155.

## О сложности мультиплексорной функции в классе формул

*Н. В. Власов*

nikita.v.vlasov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается задача оптимальной по сложности реализации мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) в классе формул в стандартном базисе (см., например, [1, 2]).

Мультиплексорной ФАЛ (мультиплексором)  $\mu_n$  порядка  $n$  называется ФАЛ от  $n + 2^n$  булевых переменных (БП), где первые  $n$  переменных называются адресными, оставшиеся  $2^n$  — информационными, а значение функции равно значению той её информационной БП, номер которой задаётся значениями адресных БП.

Задача синтеза решается в классе формул в стандартном базисе  $B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ . Сложность  $L(F)$  формулы  $F$  определяется как число функциональных элементов (ФЭ) «&», « $\vee$ » и « $\neg$ » в ней.

Сложность мультиплексорной ФАЛ изучалась в ряде работ. Известно (см., например, [3]), что сложность реализации ФАЛ  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , как схемами из функциональных элементов (СФЭ), так и формулами в стандартном базисе  $B_0$ , асимптотически равна  $2^{n+1}$ . В работе [4] получена нижняя оценка вида  $2^{n+1} + c_1 \cdot 2^{n/2} - O(2^{n/4})$  и верхняя оценка вида  $2^{n+1} + c_2 \cdot 2^{n/2} + O(2^{n/4})$ , где  $c_1, c_2 = const$ , для сложности реализации мультиплексора порядка  $n$  в классе СФЭ над базисом  $B_0$ . Кроме того, в [3] была установлена асимптотика сложности ФАЛ  $\mu_n$  в классе СФЭ в базисе  $\{x \& y, x \oplus y, \bar{x}\}$ , а в [5] были получены асимптотические оценки высокой степени точности вида<sup>1</sup>  $2^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2n} \pm O\left(\frac{1}{n \log n}\right)\right)$  для сложности её реализации в классе  $\pi$ -схем.

В работе [6] доказано, что значение глубины мультиплексорной ФАЛ порядка  $n$  в стандартном базисе в случае, если ФЭ «&» и « $\vee$ » имеют единичную глубину, а ФЭ « $\neg$ » — нулевую, равно 2, если  $n = 2$ , и равно  $n + 2$ , если  $1 < n \leq 5$  или  $n \geq 20$ . Для случая  $5 < n < 20$  устанавливаются нижняя оценка  $(n + 2)$  и верхняя оценка  $(n + 3)$

<sup>1</sup>Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.



глубины ФАЛ  $\mu_n$ . Аналогичные результаты справедливы также для базиса, состоящего из всех элементарных конъюнкций и дизъюнкций от двух переменных.

**Теорема.** Для мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  справедливы неравенства

$$2^{n+1} \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq L^{\Phi}(\mu_n) \leq 2^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right) \right).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00817-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Луцанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.
- [3] *Коровин В. В.* О сложности реализации универсальной функции схемами из функциональных элементов // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7, № 2. — С. 95–102.
- [4] *Румянцев П. В.* О сложности реализации мультиплексорной функции схемами из функциональных элементов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2005. — С. 133.
- [5] *Ложкин С. А., Власов Н. В.* О сложности мультиплексорной функции в классе  $\pi$ -схем // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 98–106.
- [6] *Ложкин С. А., Власов Н. В.* О глубине мультиплексорной функции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2011. — № 2. — С. 40–46.

## Об эволюционных параметрах конечных динамических систем, ассоциированных с графами

А. В. Власова

VAnastasiyaV@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующую конструкцию, получившую и самостоятельное значение в теории графов, — бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [1]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [2, 3]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса.

Под *конечной динамической системой* понимается пара  $(S, \delta)$ , где  $S$  — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*,  $\delta: S \rightarrow S$  — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — граф с множеством вершин  $S$  и дугами, проведенными из каждой вершины  $s \in S$  в вершину  $\delta(s)$ . Этот граф является функциональным, т.е. из каждой вершины выходит точно одна дуга.

Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её бассейнами. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур называется предельным циклом, или *аттрактором*. Одними из основных характеристик конечной динамической системы являются вид аттрактора и *индекс* состояния — расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние. Программа [4] предназначена для исследования эволюционных параметров состояний (индекс, недостижимость, ветвление) в динамических системах, состояниями ко-

торых являются двоичные векторы, представленные такими графами, как цепи, циклы и пальмы. В настоящей работе описываются аттракторы и индексы динамической системы двоичных векторов, порожденных такими графами, как цепи (см. [5, 6, 7]).

Пусть  $B = \bigcup_{n=2}^{\infty} B^n$ , где через  $B^n$ ,  $n > 1$ , обозначим множество всех двоичных векторов размерности  $n$ . Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор  $v \in B$ . Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии  $\delta(v)$ , описываемом следующими правилами: I. Если первой компонентой в  $v$  является 0, то первой компонентой в  $\delta(v)$  будет 1; II. Если в составе  $v$  имеются диграммы (две соседние компоненты) вида 10, то в  $\delta(v)$  каждая из них заменяется на 01; III. Если последней компонентой в  $v$  является 1, то последней компонентой в  $\delta(v)$  будет 0; IV. Других отличий между  $v$  и  $\delta(v)$  нет. Вышеперечисленные правила применяются одновременно.

Каждое состояние размерности  $n$  при динамике переходит в состояние также размерности  $n$ . Таким образом, система  $B$  в зависимости от  $n$  разбивается на подсистемы  $(B^n, \delta)$ . Эта динамика для системы  $(B^n, \delta)$  определена в [2].

Через  $p(v)$  обозначается *плотность* вектора  $v$ , т.е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем. Например,  $p(111111) = 5$ ,  $p(\delta(111011)) = p(110110) = 2$ . Очевидно, что для  $v \in B^n$  будет  $0 \leq p(v) \leq n - 1$ .

Аттракторы динамической системы  $(B, \delta)$  были описаны в работе [5], где доказываются следующие три теоремы.

**Теорема 1.** Для системы  $(B, \delta)$  при любом  $v$  справедливо неравенство  $p(\delta(v)) \leq p(v)$ .

**Теорема 2.** Для системы  $(B, \delta)$  верно

$$(\forall v)(p(v) \neq 0 \Rightarrow (\exists k)(p(\delta^k(v)) < p(v))).$$

**Теорема 3.** При любом  $n \geq 2$  система  $(B^n, \delta)$  имеет единственный бассейн и аттрактор, представляющий собой двухэлементный цикл, образуемый состояниями  $(01)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 0$  и  $(10)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 1$  при нечётном  $n$  и состояниями  $(01)^{\frac{n}{2}}$  и  $(10)^{\frac{n}{2}}$  при чётном  $n$ .

*Блок* — это подряд стоящие нули (0-блоки) или единицы (1-блоки) в количестве  $\geq 2$ . *Длина блока* — число нулей (единиц), уменьшенное на 1.

Введем обозначения:  $r$  — порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока;  $i$  — индекс рассматриваемого состояния;  $s$  — порядковый номер первой компоненты первого 0-блока;  $p_0, p_1$  — суммы длин рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков, соответственно; УНГ — указатель начала группы; УРС — указатель рассмотрения состояния.

#### Алгоритм вычисления индекса состояния системы $(B, \delta)$

Индекс состояния системы  $(B, \delta)$  высчитывается исходя из его вида как вектора.

I. Если вектор  $v$  содержит в себе блоки и все они состоят из 1, то  $i(v) = r - 1$ ;

II. Если вектор  $v$  содержит в себе блоки и все они состоят из 0, то  $i(v) = n - s$ ;

III. Если вектор  $v$  содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то  $i(v) = n - s$  при  $r - 1 < n - s$ , иначе  $i(v) = r - 1$ ;

IV. Если вектор  $v$  содержит в себе 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то  $i(v) = r - 1$  при  $p_0 < p_1$ ,  $i(v) = (r - s + 1)/2 - 1$  при  $p_0 = p_1$ ,  $i(v) = n - s$  при  $p_0 > p_1$ ;

V. Если вектор  $v$  содержит в себе 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке, отличном от описанных в пунктах I – IV алгоритма, то, просматривая его слева направо, выполняем следующие действия:

1. УНГ и УРС ставятся в начале вектора. Если до первого 0-блока есть 1-блоки, то первой группой будет являться отрезок вектора от начальной компоненты до последней компоненты того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, включительно; и УНГ, и УРС ставятся между последней компонентой того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, и следующей компонентой.

2. Если вектор уже полностью разбит на группы или если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте вектора и переходим в пункт 6, иначе  $p_0 := 0, p_1 := 0$ .

3.  $p_0 := p_0 +$  сумма длин 0-блоков до первого (следующего) 1-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 0-блоков и следующей компонентой.

4.  $p_1 := p_1 +$  сумма длин 1-блоков до первого (следующего) 0-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 1-блоков и следующей компонентой.

5. Если  $p_0 \leq p_1$ , то группа заканчивается на последней компоненте того 1-блока, который стоит перед УРС, и идём в пункт 2, УНГ ставится между последней компонентой этой группы и следующей компонентой; а если 0-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния и идём в пункт 6. Если  $p_0 > p_1$  и ещё остались 1-блоки, то идём в пункт 3, а если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния и идём в пункт 6.

6. В каждой группе подсчитываем их  $p_0$  и  $p_1$  и помечаем группы знаками «-», «=», «+», если в них  $p_0 > p_1, p_0 = p_1, p_0 < p_1$ , соответственно. Объединяем рядом стоящие группы с одинаковыми пометками «-» или «+» в одну, при этом если между «+»-группами встречаются «=-»-группы, то их также объединяем в «+»-группу. Пусть  $h$  — общее количество групп. Считаем групповые индексы  $i_j, 1 \leq j \leq h$ , согласно следующим правилам: в «-»-группе  $i_j = n - s_j$ , в «=-»-группе  $i_j = (r_j - s_j + 1)/2 - 1$ , в «+»-группе  $i_j = r_j - 1$ . Тогда  $i(v) = \max_{1 \leq j \leq h} i_j$ .

**Теорема 4.** Алгоритм вычисления индекса состояния системы  $(B, \delta)$  корректен.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. — London: Chapman & Hall / CRC, 2001.
- [2] *Самый В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. — 2005. — № 14. — С. 23–26.
- [3] *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. — 2004. — V. 8. — P. 425–439.
- [4] *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство Роспатента № 2009614409, зарегистрировано 20 авг. 2009.
- [5] *Власова А. В.* Аттракторы в динамических системах двоичных векторов // Саратов. гос. ун-т. — Саратов, 2010. — 19 с.: ил. — Библиогр.: 5 назв. — Рус. — Деп. в ВИНТИ 23.06.2010 № 392-В2010.
- [6] *Власова А. В.* Ветвления в динамической системе  $n$ -мерных двоичных векторов // Инновационные технологии XXI века в управлении, ин-

форматике и образовании. — Нальчик: Издательство М. и В. Котляровых, 2008. — С. 109–112.

- [7] Власова А. В. Об одной динамической системе // Саратов. гос. ун-т. — Саратов, 2007. — 17 с. — Библиогр.: 2 назв. — Рус. — Деп. в ВИНТИ 17.12.07 № 1181–В2007.

## Аналог формулы Моллоуса–Риордана для помеченных эйлеровых графов

*В. А. Воблый*

vitvobl@yandex.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Пусть  $C_n$  — число помеченных связных графов с  $n$  вершинами. Риордан и Моллоус получили формулу [1, с. 19; 2]:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{n-k}$$

как следствие тождества для функции, перечисляющей деревья с помощью числа инверсий. Дадим альтернативное доказательство этой формулы.

Обозначим через  $G_n$  число помеченных графов с  $n$  вершинами. Известно [1, с. 14], что  $G_n = 2^{n(n-1)/2}$ , положим  $G_0 = 1$ ,  $C_0 = 0$  и введем производящие функции

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{x^n}{n!}, \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда соотношение Риддела [1, с. 19] запишется в виде  $C(x) = \ln G(x)$ . Дифференцируя  $G(x)$ , получим

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n+1)/2} \frac{x^n}{n!} = G(2x).$$

Дифференцируя  $C(x)$  дважды, найдем

$$C'(x) = \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{G(2x)}{G(x)} = e^{C(2x)-C(x)},$$

$$C''(x) = C'(x)(2C'(2x) - C'(x)) .$$

Таким образом, имеем

$$C'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{x^n}{n!} ,$$

$$C''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \frac{x^n}{n!} ,$$

$$2C'(2x) - C'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (2^{n+1} - 1) \frac{x^n}{n!} .$$

Перемножая ряды, окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \frac{x^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (2^{n+1} - 1) \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{x^n}{n!} \right) ,$$

$$C_{n+2} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (2^{s+1} - 1) C_{s+1} C_{n-s+1} ,$$

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n-2}{s} (2^{s+1} - 1) C_{s+1} C_{n-s-1} ,$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{n-k} .$$

Доказательство закончено.

Обозначим через  $W_n$  число помеченных четных графов с  $n$  вершинами, а через  $E_n$  — число помеченных эйлеровых графов с  $n$  вершинами.

**Теорема.** При  $n \geq 3$  верна формула

$$E_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (C_k - E_k) E_{n-k} .$$

*Доказательство.* Известно [1, с. 22; 3], что  $W_n = 2^{(n-1)(n-2)/2}$ , положим  $W_0 = 1$ ,  $E_0 = 0$  и введем производящие функции

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{x^n}{n!}, \quad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

Эти производящие функции связаны соотношением Риддела [1, с. 23]  $E(x) = \ln W(x)$ . Дифференцируя  $W(x)$ , получим

$$W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n-1)(n-2)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} = G(x).$$

Дифференцируя  $E(x)$  дважды, найдем

$$E'(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} = G(x)e^{-C(x)} = e^{C(x)-E(x)},$$

$$E''(x) = E'(x)(C'(x) - E'(x)).$$

Перемножая ряды, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} E_{m+2} \frac{x^m}{m!} = \left( \sum_{m=0}^{\infty} (C_{m+1} - E_{m+1}) \frac{x^m}{m!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} E_{m+1} \frac{x^m}{m!} \right),$$

$$E_{m+2} = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (C_{s+1} - E_{s+1}) E_{m-s+1}.$$

После замен переменных  $n = m + 2$ ,  $k = s + 1$  получим

$$E_n = \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n-2}{s} (C_{s+1} - E_{s+1}) E_{n-s-1},$$

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (C_k - E_k) E_{n-k}.$$

Учитывая, что  $C_1 = E_1 = 1$ , завершим доказательство теоремы. ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.



- [2] *Mallows C. L., Riordan J.* The inversion enumerator for labeled trees // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — V. 74. — P. 92–94.
- [3] *Read R. C.* Euler graphs on labelled nodes // Canad. J. Math. — 1962. — V. 14. — P. 482–486.

## Расшифровка неповторных функций запросами тождественности

*А. А. Вороненко, Д. В. Чистиков*

dm6@cs.msu.ru, dd1email@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается следующая задача расшифровки неповторных функций. Требуется установить, какая именно неповторная в заранее фиксированном базисе функция находится в черном ящике, при этом разрешается использовать только *запросы тождественности*, которые определяются следующим образом. Вход (параметр) запроса тождественности — произвольный подкуб булева куба, или, что то же самое, произвольная подфункция неизвестной неповторной функции. В случае ненулевой размерности запрашиваемого подкуба ответом на запрос является 1, если соответствующая подфункция тождественно равна постоянной, и 0, если это не так. В случае нулевой размерности ответом является значение неизвестной функции в запрашиваемой точке.

В работе [1] доказано, что в случае конечного базиса достаточным условием полиномиальной разрешимости данной задачи является полиномиальная разрешимость задачи тестирования относительно неповторной альтернативы [2] в том же базисе. В настоящей работе показывается, что предположение о конечности базиса является существенным. Более точно, доказывается следующая теорема:

**Теорема 1.** *Задача расшифровки неизвестной неповторной функции в базисе всевозможных монотонных пороговых функций требует в худшем случае экспоненциального (относительно числа переменных) числа запросов тождественности, однако эта же задача для произвольного конечного подмножества этого базиса допускает решение полиномиальным числом запросов.*

*Доказательство теоремы.* Рассмотрим для каждого натурального  $n \geq 2$  и произвольного вещественного  $s$  следующую монотонную пороговую функцию:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n \geq s.$$

Зафиксируем  $k = \lfloor n/2 \rfloor$  и  $s = k + 1$ . Увеличивая  $k$  коэффициентов на  $\frac{1}{2k}$  и выбирая новое  $s = k + \frac{1}{2}$ , будем получать новые монотонные пороговые функции, каждая из которых отличается от  $f$  на единственном наборе, содержащем ровно  $k$  единиц. Обозначим символом  $\mathcal{C}_n$  множество из всех  $\binom{n}{k}$  таких функций и  $f$  и докажем вспомогательную лемму.

**Лемма 2.** *Задача расшифровки неизвестной функции из множества  $\mathcal{C}_n$  не может быть решена менее чем  $\binom{n}{k}$  запросами тождественности в худшем случае.*

*Доказательство.* Заметим, что осмысленными в данном случае являются лишь запросы, обращающиеся к тем подкубам, в которых число наборов с  $k$  единицами и  $n - k$  нулями равно 1. В самом деле, всякий иной подкуб либо вовсе не содержит таких наборов и, следовательно, целиком лежит строго выше или строго ниже  $k$ -го слоя  $n$ -мерного куба, либо содержит хотя бы два набора с ровно  $k - 1$  и  $k + 1$  единицами соответственно. В первом случае запрос тождественности всегда возвращает 1, во втором — 0, вне зависимости от того, какая именно функция из  $\mathcal{C}_n$  находится в черном ящике. Это означает, что всякий содержательный запрос (ответ на который заранее не известен) может обнаружить значение неизвестной функции лишь на одном наборе из числа имеющих ровно  $k$  единиц. Следовательно, если в черном ящике находится функция  $f$ , то в любой момент, когда выполнено менее  $\binom{n}{k}$  запросов, найдется хотя бы одна функция, совпадающая с  $f$  на всех запрошенных подкубах. ■

Так как  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim 2^n / \sqrt{\pi n/2}$ , то сложность расшифровки неизвестной монотонной пороговой функции  $n$  переменных запросами тождественности не менее  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  в худшем случае. Поскольку всякая базисная функция по определению неповторна, нижняя оценка теоремы 1 доказана.

**Лемма 3.** *Все пороговые функции обладают следующим свойством: для любого собственного подмножества  $X'$  множества  $X$  их перемен-*

ных найдется подстановка констант на места всех переменных  $X'$ , не нарушающая существенности переменных  $X \setminus X'$ .

*Доказательство.* Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим монотонную пороговую функцию  $g(x_1, \dots, x_n)$ . Пусть

$$g(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow G(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

где  $G(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha_0$  для некоторых неотрицательных вещественных чисел  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Достаточно показать, что если переменная  $x_i$  фиктивна для  $g$ , то фиктивны также все переменные  $x_j$  с  $\alpha_j \leq \alpha_i$ . В самом деле, из этого следует, что если все остаточные подфункции монотонной пороговой функции  $g$  переменных  $X$ , получаемые подстановками констант на места переменных множества  $X' \subseteq X$ , имеют хотя бы по одной фиктивной переменной, то они имеют и общую фиктивную переменную, которая, следовательно, является фиктивной и для  $g$ .

Итак, предположим, что переменная  $x_i$  фиктивна и  $\alpha_j \leq \alpha_i$ . Будем для удобства полагать, что  $i = n - 1$  и  $j = n$ . Тогда, в силу вида функции  $G$  и соотношения  $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n-1}$ , для любого набора  $\tilde{x}' = (x_1, \dots, x_{n-2}) \in \{0, 1\}^{n-2}$  справедливо двойное неравенство

$$G(\tilde{x}', 0, 0) \leq G(\tilde{x}', 0, 1) \leq G(\tilde{x}', 1, 0).$$

Поскольку  $x_{n-1}$  фиктивна, левая и правая части этого неравенства либо обе отрицательны, либо обе неотрицательны, поэтому соответственно отрицательным либо неотрицательным является и выражение в центре. Те же рассуждения справедливы и для неравенства

$$G(\tilde{x}', 0, 1) \leq G(\tilde{x}', 1, 0) \leq G(\tilde{x}', 1, 1).$$

Это означает, что  $g(\tilde{x}', x_{n-1}, 0)$  всегда совпадает с  $g(\tilde{x}', x_{n-1}, 1)$ , вне зависимости от значений  $x_{n-1} \in \{0, 1\}$  и  $x_1, \dots, x_{n-2} \in \{0, 1\}$ . Таким образом, переменная  $x_n$  фиктивна, что и требовалось доказать. ■

Из утверждения последней леммы и результатов работы [3] вытекает, что задача тестирования относительно бесповторной альтернативы (проверки) в произвольном конечном базисе, состоящем из монотонных пороговых функций, имеет полиномиальное решение. Как отмечено выше, это условие является достаточным для полиномиальной разрешимости задачи расшифровки (диагностического

тестирования) неповторных функций в том же базисе запросами тождественности. Теорема доказана.  $\blacksquare$

Заметим, что установленную экспоненциальную оценку нельзя получить из мощностных соображений. Пусть  $\mathcal{R}_n$  — рассматриваемое множество всевозможных функций  $n$  переменных, неповторных в бесконечном базисе всех монотонных пороговых функций. Справедлива следующая верхняя оценка:

**Утверждение 4.**  $\log_2 |\mathcal{R}_n| = O(n^3)$ .

*Доказательство.* Как известно (см., например, [4]), асимптотика логарифма числа  $|T_n|$  пороговых функций  $n$  переменных равна  $n^2$ . Пусть  $\log_2 |T_n| \leq An^2$  для всех  $n \geq 1$ . Докажем существование такого  $C > 0$ , что  $\log_2 |\mathcal{R}_n| \leq Cn^3$  при  $n \geq 1$ . Пусть  $\log_2 |\mathcal{R}_k| \leq Ck^3$  для  $k \leq n-1$ , тогда

$$|\mathcal{R}_n| \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot |T_k| \cdot |\mathcal{R}_{n-k+1}| \leq n \cdot 2^{n+An^2+C(n-1)^3},$$

поэтому, как нетрудно убедиться, искомое неравенство заведомо выполняется при

$$C > \frac{4}{3} \cdot \left( A + \max \frac{\log_2 n + n}{n^2} \right).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-757.2011.9 и грантов РФФИ № 09-01-00701 и № 09-01-00817.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чистиков Д. В. О связи задач диагностического и проверяющего тестирования неповторных функций // Дискретная математика. — Т. 23, № 1. — 2011. В печати.
- [2] Вороненко А. А. О проверяющих тестах для неповторных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 163–176.
- [3] Вороненко А. А. Распознавание неповторности в произвольном базисе // Прикладная математика и информатика. Вып. 23. — 2006. С. 67–84.
- [4] Зуев Ю. А. Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика. — Т. 3, № 2. — 1991. — С. 47–57.

## О сложности задач регулярной реализуемости

М. Н. Вялый, С. П. Тарасов

vyalyi@gmail.com, serge99meister@gmail.com

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Задача регулярной реализуемости состоит в проверке непустоты пересечения регулярного языка с некоторым фиксированным языком (фильтром).

Задачи регулярной реализуемости оказываются тесно связанными с моделями обобщенного недетерминизма [1, 2]. Из результатов [1, 2] следует, что полные задачи регулярной реализуемости существуют для таких классов сложности, как L, NL, NP, PSPACE, EXP, а также для класса перечислимых языков.

В работе [3] обнаружена связь между задачами регулярной реализуемости и известной проблемой Сколема о нулях в линейных рекуррентных последовательностях, алгоритмическая разрешимость которой до сих пор остается открытой. Построена задача регулярной реализуемости (для так называемого перестановочного фильтра), к которой сводится проблема Сколема и которая эквивалентна некоторому естественному обобщению проблемы Сколема на случай произвольных орбит линейных отображений. В работе [4] построены модификации перестановочного фильтра с разрешимыми и неразрешимыми задачами регулярной реализуемости.

Здесь мы рассматриваем зависимость сложности задачи регулярной реализуемости от способа задания регулярного языка.

### Определения и постановка задачи

Пусть  $L$  — язык в конечном алфавите  $\Sigma$ , который будем называть *фильтром*. *Задача регулярной  $L$ -реализуемости* — это следующая массовая алгоритмическая задача. Дано описание некоторого регулярного языка  $R$  в алфавите  $\Sigma$  и требуется проверить, что  $L \cap R \neq \emptyset$ .

Для завершения определения нужно указать способ задания регулярного языка. В стандартной формулировке задачи регулярной  $L$ -реализуемости предполагается, что входом задачи является описание конечного детерминированного автомата (КДА)  $A$  и необходимо проверить  $L \cap L(A) \neq \emptyset$ , где  $L(A)$  — язык, принимаемый автоматом  $A$ .

Через  $RR(L)$  обозначаем язык, состоящий из описаний тех регулярных языков, которые пересекаются с языком  $L$ , а также саму задачу  $L$ -реализуемости.

Аналогично можно определить задачу проверки непустоты пересечения фильтра и регулярного языка, в которой регулярный язык задается описанием конечного недетерминированного автомата (КНА)  $N$ , принимающего этот язык. Будем называть такую алгоритмическую задачу *расширенной задачей регулярной  $L$ -реализуемости* и обозначать соответствующий язык через  $RR^n(L)$ .

Хотя разрешимости обычной и расширенной задач регулярной реализуемости для одного и того же фильтра равносильны, алгоритмические сложности этих задач могут значительно различаться. Как известно, количество состояний КДА, принимающего тот же регулярный язык, что и заданный КНА, может быть экспоненциально больше. Поэтому естественная сводимость обобщенной задачи регулярной реализуемости к стандартной требует экспоненциального времени.

В данной работе мы рассматриваем связь между сложностью стандартной и обобщенной задач регулярной реализуемости.

### Примеры

Начнем с двух примеров.

Рассмотрим в качестве фильтра язык всех слов  $\Sigma^*$ . Как следует из [2], задача  $RR(\Sigma^*)$  является NL-полной, где NL — класс языков, распознаваемых недетерминированными машинами Тьюринга на логарифмической памяти. Однако обобщенная задача  $RR^n(\Sigma^*)$  также принадлежит NL, поскольку она сводится к задаче существования пути между двумя вершинами в ориентированном графе.

Если же в качестве фильтра рассмотреть язык  $0^* = \{0^n : n \geq 0\}$ , то стандартная задача  $RR(0^*)$  уже принадлежит классу L языков, распознаваемых детерминированными машинами Тьюринга на логарифмической памяти, что опять-таки следует из результатов [2]. Однако  $RR^n(\Sigma^*)$  по-прежнему остается NL-полной.

Заметим, что в настоящее время неизвестно точное соотношение между классами L и NL. Вопрос о связи сложности стандартной и обобщенной задач регулярной реализуемости не проще этой открытой проблемы.

### Сводимости между задачами регулярной реализуемости

В этом разделе мы опишем преобразование фильтров, которое отвечает изменению формата входных данных (замене КДА на КНА).

Для этого нам потребуются две операции с языками.

*Повторение.* Для языка  $L \subseteq \Sigma^*$  языком повторений  $\text{Rep}(L)$  назовем множество всех слов вида

$$\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n \text{ раз}} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{n \text{ раз}} \dots \underbrace{a_k \dots a_k}_{n \text{ раз}}, \quad a_1 a_2 \dots a_k \in L, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Склейка.* Рассмотрим два конечных алфавита  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . Для слов в алфавите  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  есть две естественные проекции  $(\Sigma_1 \times \Sigma_2)^*$  в  $\Sigma_1^*$  и в  $\Sigma_2^*$ :

$$\begin{aligned} \pi_1 &: (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n) \mapsto a_1 a_2 \dots a_n, \\ \pi_2 &: (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n) \mapsto b_1 b_2 \dots b_n. \end{aligned}$$

*Склейкой*  $L_1 \| L_2$  языков  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  и  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  назовем язык в алфавите  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ , состоящий из всех таких слов  $w$ , что  $\pi_1 w \in L_1$ ,  $\pi_2 w \in L_2$ .

**Теорема.** Для любого фильтра  $L$  выполняются соотношения

$$\text{RR}(L) \leq_p \text{RR}^n(L) \leq_p \text{RR}(\{0, 1\}^* \| \text{Rep}(L)) \leq_{\text{нр}} \text{RR}^n(L),$$

где  $\leq_p$  обозначает полиномиальную сводимость,  $\leq_{\text{нр}}$  — недетерминированную полиномиальную сводимость.

Под недетерминированной полиномиальной сводимостью  $L_1 \leq_{\text{нр}} L_2$  мы понимаем вычислимое за полиномиальное время отображение  $f : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ , для которого  $w \in L_1$  равносильно тому, что  $f(w, y) \in L_2$  при некотором  $y$ , длина которого полиномиально ограничена длиной  $w$ .

*Идея доказательства теоремы.* Первая сводимость в формулировке теоремы очевидна, так как КДА является частным случаем КНА.

Для построения второй сводимости нужно закодировать недетерминированные ходы КНА двоичными словами и построить автомат, который ожидает слово из  $\{0, 1\}^* \| \text{Rep}(L)$  в следующем формате: каждый символ из слова, принадлежащего  $L$ , повторяется во втором слое склейки такое количество раз, чтобы в первом слое склейки поместилось описание ходов КНА, принимающего данное слово.

Наконец, в третьей сводимости нужно использовать то обстоятельство, что поведение автомата на достаточно длинных словах в однобуквенном алфавите становится периодическим. Поэтому недетерминированная сводимость состоит в том, что «угадывается» подходящая длина слова и по ней строится описание соответствующего КНА для языка  $L$ . ■

Отметим, что недетерминированные сводимости сохраняют достаточно высокие классы сложности, скажем NP, PSPACE. Поэтому для достаточно «трудных» задач регулярной реализуемости обобщенная задача  $L$ -реализуемости оказывается равносильной по сложности стандартной задаче  $(\{0, 1\}^* \parallel \text{Rep}(L))$ -реализуемости.

Таким образом, вопрос о соотношении сложности стандартной и обобщенной задач реализуемости сводится во многих случаях к вопросу о соотношении сложности стандартных задач регулярной реализуемости для языка и склейки его повторения с языком всех слов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00398-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Vyalıy M. N.* On models of a nondeterministic computation // Proc. of CSR 2009. Lecture Notes in Computer Science. V. 5675. — Berlin: Springer, 2009. — P. 334–345.
- [2] *Вялый М. Н.* О моделях недетерминизма для двусторонних автоматов // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: МаксПресс, 2009. — С. 54–60.
- [3] *Вялый М. Н., Тарасов С. П.* Орбиты линейных отображений и свойства регулярных языков // Дискр. анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 20–49.
- [4] *Tarasov S., Vyalıy M.* Orbits of linear maps and regular languages. El. preprint. <http://arxiv.org/abs/1011.1842>



## О минимальных эйлеровых реконструкциях ориентированных графов

*А. В. Гавриков*

`gavrikovav@mail.ru`

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Пусть  $K$  — некоторый класс графов, а  $G$  — граф, не принадлежащий  $K$ . Требуется произвести те или иные изменения в структуре графа  $G$ , чтобы полученный граф  $G'$  оказался  $K$ -графом (см. [3]). В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие:

1. Отождествление некоторых вершин графа;
2. Ориентация ребер данного неориентированного графа;
3. Переориентация некоторых дуг;
4. Добавление новых дуг (ребер);
5. Удаление некоторых дуг (ребер).

Ориентированный граф (орграф) называется эйлеровым, если в нем существует циклический путь, содержащий все дуги. Орграф называется квазиэйлеровым, если каждая его компонента связности является эйлеровым орграфом.

Автором была решена задача об оптимальной переориентации дуг орграфа, приводящей к эйлерову орграфу [1]. Составлена программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов [2]. В настоящем сообщении приводятся решения следующих задач об оптимальных эйлеровых реконструкциях заданного орграфа: произвольный орграф реконструируется к эйлерову орграфу путем добавления минимального числа дуг и к квазиэйлерову орграфу путем удаления минимального числа дуг. Для решения этих задач используются методы теории транспортных сетей и потоковые алгоритмы. Асимптотическая сложность всех предложенных алгоритмов является полиномиальной и составляет  $O(n^4)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Гавриков А. В.* Оптимальная переориентация дуг орграфа, приводящая к эйлерову орграфу // Наука и образование: проблемы и перспективы: Материалы 11-й региональной научно-практической конфе-

- ренции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 15–16 мая 2009 г.). Часть 2. — Бийск: БПГУ им. В. М. Шукшина, 2009. — С. 271–273.
- [2] *Гавриков А. В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов. Программа для ЭВМ. Свидетельство Роспатента РФ о регистрации № 2010616499 от 30.09.2010.
- [3] *Салый В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. — С. 59–65.

## О сложности монотонных вычислений действительных многочленов

*С. Б. Гашков, И. С. Сергеев*

sbgashkov@gmail.com, isserg@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

Рассматриваются многочлены из полукольца  $\mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$  и вычисление их схемами, состоящими из элементов сложения, умножения и положительных действительных констант. Для любого такого многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$  обозначим через  $L_+(f)$  наименьшее число сложений (аддитивная монотонная сложность многочлена  $f$ ), а через  $L_\times(f)$  — наименьшее число не скалярных умножений (мультипликативная монотонная сложность), необходимое для его вычисления. Изучается задача эффективного построения многочленов, имеющих высокую монотонную сложность.

Обозначим через  $P(N^n)$  полукольцо конечных подмножеств множества  $N^n$  (где  $N = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) относительно операции дизъюнкции  $\vee$  и умножения  $\times$ : если  $A, B \in P(N^n)$ , то  $A, B \subset N^n$ ,  $A \vee B = A \cup B$ ,  $A \times B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

Через  $\text{mon}$  обозначим гомоморфизм полукольца  $\mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$  в полукольцо  $P(N^n)$ , определяемый условием  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \text{mon } f$  тогда и только тогда, когда многочлен  $f$  содержит моном  $c_n x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ .

Пусть  $k \leq l$ . Подмножество  $H$  коммутативной полугруппы  $(G, +)$  назовем  $(k, l)$ -редким, если оно не содержит подмножеств вида  $A +$

$B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ , где  $|A| = k$  и  $|B| = l$  (здесь и далее мощность конечного множества  $M$  обозначается через  $|M|$ ).

Обозначим через  $\alpha(k)$  наибольшее количество различных булевых  $(k-1)$ -мерных векторов, ни один из которых не равен дизъюнкции двух других. Известно, что  $\alpha(2) = 2$ ,  $\alpha(3) = 3$ ,  $\alpha(4) = 5$ ,  $\alpha(k) \sim C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ .

Метод [1] основан на наблюдении: если для многочлена  $f$  множество  $\text{mon } f$  является  $(k, l)$ -редким в  $(P(N^n), \vee)$  (при не очень больших  $k$  и  $l$ ), то  $f$  имеет высокую монотонную сложность. Эта связь между редкостью и сложностью описывается следующей теоремой, доказанной в [1] в случае  $k = l$ .

**Теорема 1.** Пусть  $k > 1$  и  $\text{mon } f$  —  $(k, l)$ -редкое подмножество множества  $(N^n, +)$ . Положим  $h = \max\{(k-1)^3, (l-1)^2\}$  и  $H = h^{-1}|\text{mon } f|$ . Тогда справедливы неравенства:

- (i)  $L_+(f) \geq H - 1$ ;
- (ii)  $L_\times(f) \geq 2\sqrt{H} - n - 2$ ;
- (iii) Если  $H > (2\alpha(k) - 3)^{2\alpha(k)-1}(\alpha(l) - \alpha(k) + 1)^{\frac{2}{\alpha(k)} - 2}$ , то  $L_\times(f) \geq 2C \left( H - C^{2 - \frac{2}{\alpha(k)}}(\alpha(k) - 1)H^{\frac{2\alpha(k)-2}{2\alpha(k)-1}} - C(\alpha(k) - 2)H^{\frac{\alpha(k)}{2\alpha(k)-1}} \right)^{\frac{\alpha(k)}{2\alpha(k)-1}} - n - 2$ , где  $C = (\alpha(l) - \alpha(k) + 1)^{\frac{-1}{2\alpha(k)-1}}$ .

Заметим, что оценки теоремы 1 существенно улучшить, вообще говоря, нельзя. Действительно, для любого многочлена  $f$  справедливо  $L_+(f) \leq |\text{mon } f| - 1$ , поэтому при небольших  $k$  и  $l$  оценка (i) является точной по порядку, а в случае  $k = l = 2$  — просто точной. Оценки (ii) и (iii) также близки к наилучшим возможным, что вытекает из следующей теоремы из работы [1].

**Теорема 2.** Пусть  $E_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Для любого  $n$  при  $k = 2$  и любого  $n > 1$  при  $k > 2$  существует  $(k, k)$ -редкое множество  $\text{mon } f \subset E_m^n$ , такое, что  $|\text{mon } f| \geq m^{c_k n^{\log_2 3 - 1}}$  и

$$L_\times(\text{mon } f) \lesssim \begin{cases} \Theta \left( |\text{mon } f|^{\frac{k+1}{2k}} \right), & k > 3 \\ 3|\text{mon } f|^{3/5}, & k = 3 \\ 3|\text{mon } f|^{2/3}, & k = 2 \end{cases}.$$

Используя теорему 1 и конструкцию редкого множества из работы [2], можно установить следующий результат:

**Теорема 3.**

(i) Пусть  $p$  — простое число. Тогда можно эффективно указать монотонный многочлен  $f$  от  $n$  переменных степени не выше  $p - 1$  по каждой из переменных, такой, что при  $n \rightarrow \infty$ :

$$L_+(f) = \Omega\left(p^{n-o(n)}\right), \quad L_\times(f) = \Omega\left(p^{0,5n-o(n)}\right).$$

(ii) При любом  $\varepsilon > 0$  существует  $m_\varepsilon$ , такое, что для любого  $m > m_\varepsilon$  можно эффективно указать монотонный многочлен  $f$  от  $n$  переменных степени не выше  $m - 1$  по каждой из переменных, такой, что при  $n \rightarrow \infty$ :

$$L_+(f) = \Omega_\varepsilon\left(m^{n(1-\varepsilon)}\right), \quad L_\times(f) = \Omega_\varepsilon\left(m^{0,5n(1-\varepsilon)}\right).$$

Известно, что если степень многочлена  $f$  по каждой из переменных не превосходит  $m - 1$ , то  $L_+(f) < m^n$  и  $L_\times(f) \leq \Theta(m^{n/2})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, оценки теоремы 2 в том виде, в котором они приведены, являются неупрощаемыми.

В важном частном случае  $p = 2$  теорема 3 дает пример мультилинейного (линейного по каждой переменной) многочлена  $n$  переменных с коэффициентами 0 и 1, имеющего аддитивную монотонную сложность  $2^{(1-o(1))n}$  и мультипликативную монотонную сложность  $2^{(0,5-o(1))n}$ .

Ранее мультилинейный многочлен с коэффициентами 0 и 1, имеющий монотонную аддитивную сложность  $2^{\lceil n/2 \rceil} - 1$ , был построен О. М. Касим-Заде [3] (первая эффективная экспоненциальная нижняя оценка). В работе [1] был построен мультилинейный многочлен с коэффициентами 0 и 1 с аддитивной монотонной сложностью, по порядку не меньшей  $2^{2n/3}$ , и с мультипликативной монотонной сложностью, по порядку не меньшей  $2^{cn}$ , где  $c > 1/3$ .

Несколько модифицировав конструкцию из теоремы 3, можно получить пример многочлена с высоким отношением монотонной сложности и сложности вычисления в полном арифметическом базисе, включающем дополнительно отрицательные действительные константы.

**Теорема 4.** Можно эффективно указать мультилинейный многочлен  $n$  переменных, для которого отношение сложности реализации в монотонном базисе  $\{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}_+$  к сложности реализации в полном базисе  $\{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$  не меньше, чем  $2^{(0,5-o(1))n}$ .

Ранее Вэльянт [4] для подобного отношения получил оценку  $2^{\Omega(\sqrt{n})}$  (используя всего один элемент умножения на отрицательную константу).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 08-01-00863, 08-01-00632, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Гашиков С. Б.* Об одном методе получения нижних оценок сложности монотонных вычислений многочленов // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1987. — № 5. — С. 7–13.
- [2] *Kóllar J., Rónyai L., Szabó T.* Norm-graphs and bipartite Turán numbers // *Combinatorica*. — 1996. — V. 16, № 3. — P. 399–406.
- [3] *Касим-Заде О. М.* Об арифметической сложности монотонных многочленов // Тезисы Всесоюзной конференции 1983 г. «Теоретические проблемы кибернетики». Ч. 1. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. — С. 68–69.
- [4] *Valiant L. G.* Negation can be exponentially powerful // *Th. Comput. Sci.* — 1980. — V. 12. — P. 303–314.

### Учет ограничений в триангуляционных методах многоэкстремальной оптимизации

*С. Ю. Городецкий*

gorosyu@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Предложен метод решения многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями для класса функций с липшицевыми производными по направлениям. Применена адаптивная триангуляция области поиска нерегулярными симплексами [1, 2]. Метод редуцирует задачу с ограничениями к задаче на гиперинтервале с перестраиваемой целевой функцией. Получены условия сходимости процесса редуцирования. Приведены иллюстративные примеры.

**Класс задач и общая структура SMP-методов.** Задача многомерной глобальной оптимизации рассматривается в виде:

$$f_0(x) \rightarrow \min, x \in X, \quad (1)$$

$$X = \{x \in D : f_i(x) \leq 0 (i = \overline{1, m})\}, D = \{x \in R^n : a \leq x \leq b\}. \quad (2)$$

Предполагается, что функции  $f_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ) обладают липшицевыми производными по направлениям с константами Липшица  $M_i$ . В точках испытаний  $x^k$  вычисляются значения всех функций  $f_0^k, f_1^k, \dots, f_m^k$ , где  $f_i^k = f_i(x^k)$ .

Для построения рассматриваемого SMP-метода (симплексного метода параболоидов) применен компонентный подход [3, 4] с использованием предложенной в [1] нетрадиционной структуры разбиения области поиска на компоненты-симплексы (позднее симплексы применялись в [5]). В рамках триангуляционного подхода исходный гиперинтервал  $D$  последовательно адаптивно разбивается на многогранники-симплексы  $S$  с  $n + 1$  вершинами, размещаемыми в точках проведенных испытаний. Начальные испытания включают измерения  $f_i(x)$  в вершинах гиперинтервала  $D$ .

Доказано, что при известных значениях  $M_i$  для  $x \in S$ , с учетом результатов измерений функций в вершинах  $S$ , поточечные нижние оценки для  $f_i(x)$  имеют вид параболоидов  $f_i^-(x, M_i) = 0.5 M_i \|x - y^i\|^2 + c_i$ , где  $y^i$  однозначно находятся из линейных систем порядка  $n$ , после чего вычисляются  $c_i$ .

Точка следующего испытания  $x^{k+1}$  размещается в центре наибольшего ребра  $d^*$  «лучшего» симплекса  $S^*$ , который определяется на основе приоритетов симплексов  $H(S)$  по правилу  $H(S^*) = \min \{H(S) : S \in \{S\}\}$ . Если  $\text{diam}(S^*) < \varepsilon$ , происходит останов. Функция  $H(S)$  должна оценивать наименьшие значения целевой функции  $f_0$ , возможные в симплексе  $S$  с учетом прогнозов о выполнении ограничений (2) на основе минорант  $f_i^-(x, M_i)$ . Вычисление  $H(S)$  сводится к решению вспомогательных экстремальных задач, допускающих конечные методы решения.

**Редукция к задаче безусловной оптимизации.** В [3] рассмотрен способ учета ограничений в SMP-методах, используемый при достаточно большой относительной мере допустимого множества  $Y$  в  $D$ . В данной работе исследуется более общий подход, применимый для задач с относительно малым или пустым допустимым

множеством. В последнем случае в качестве решения определяется минимум невязки  $G(x) = \max \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ .

Редуцированная задача с перестраиваемой целевой функцией имеет вид:

$$P_{\eta(k)}(x) \rightarrow \min, \quad x \in D, \quad P_{\eta(k)}(x) = \{f_0(x) - \eta(k); G(x)\}, \quad (3)$$

где  $\eta(k) = +\infty$ , если среди  $x^1, \dots, x^k$  нет допустимых точек, в противном случае  $\eta(k) = \min \{f_0(x^s) : \forall j = \overline{1, m} : f_j(x^s) \leq 0 \ (s = \overline{1, k})\}$ . Если в (2) допустимое множество  $X = \emptyset$ , всегда  $P_{\eta(k)}(x) = G(x)$ , что при решении (3) приводит к поиску минимума невязки в ограничениях.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости процесса редуцирования при  $X \neq \emptyset$ . Основные требования фактически накладываются на процедуру, порождающую выбор новых точек испытаний  $x^{k+1}$ .

**Теорема 1.** Пусть для задачи (1), (2) при  $Y \neq \emptyset$   $\text{cov}(\text{int } X) = X$  и  $\forall x \in \text{int } X : G(x) < 0$ , функции  $f_0(x)$  и  $G(x)$  непрерывны, а выбор  $x^{k+1}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$P_{\eta(k)}(x^{k+1}) < P_{\eta(k)}(x^k), \quad P_{\eta(k)}(x^{k+1}) \leq \min \{P_{\eta(k)}(x) : x \in D\} + \varepsilon_k,$$

при  $\varepsilon_k > 0$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\eta(k+1) = f(x^{k+1})$ . Тогда предельными точками последовательности  $x^k$  будут являться только точки глобальных минимумов  $x^* \in X^*$  задачи (1), (2).

Заметим, что в формулировке для более компактной записи использован иной способ нумерации испытаний, чем в предыдущем тексте. Нумеруются только моменты строгого улучшения оценки решения.

**Задача вычисления приоритетов и метод ее решения.** Реализация триангуляционного метода, основанного на правиле выбора  $S^*$ , требует определения видов приоритетов симплексов  $S$  применительно к редуцированной задаче (3). С использованием вида минорант и с учетом структуры целевой функции в (3) предложена следующая функция приоритета:

$$H(S) = \min \left\{ \max \left\{ f_0^-(x, \widetilde{M}_0) - \eta(k); f_j^-(x, \widetilde{M}_j) \ (j = \overline{1, m}) \right\} : x \in S \right\}. \quad (4)$$

Вычисление  $H(S)$  в (4) с использованием искусственной переменной  $Z \in R^1$  сводится к решению задачи сепарабельного программирования вида:

$$H(S) = \min \left\{ Z : f_0^-(x, \widetilde{M}_0) - \eta(k) \leq Z; \right. \\ \left. f_j^-(x, \widetilde{M}_j) \leq Z (j = \overline{1, m}); x \in S \right\}. \quad (5)$$

Для вычисления  $H(S)$  квадратичные функции в (5) заменяются их кусочно-линейными аппроксимациями по сеткам из  $N^n$  точек, покрывающих  $S$ . После этого вычисление в (5) сводится к решению задачи линейного программирования в канонической форме с вектором переменных размерности  $nN + m + n + 4$  и количеством ограничений-равенств, равным  $m + 2n + 2$ . Во вспомогательных задачах (5) вместо неизвестных значений  $M_i$  используются их локализованные оценки  $\widetilde{M}_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ), получаемые смешиванием завышенных с коэффициентом надежности  $\gamma > 1$  общих (глобальных) оценок для всей области и локальных оценок, вычисляемых для каждого симплекса [3].

Точка нового испытания разбивает симплекс  $S^*$  на два новых по большему ребру  $d^*$ . Вместе с ним делятся все симплексы-соседи, содержащие это ребро. Поиск «соседей» организован без полного перебора симплексов. Реализация метода основана на динамических структурах данных типа левосторонних куч [6]. Они обеспечивают непосредственный доступ к «лучшему» симплексу и быструю реорганизацию данных при изменениях приоритетов симплексов.

**Вычислительные иллюстрации.** На рис. 1 приведены пример размещения испытаний и возникшая триангуляция при использовании построенного SMP-метода применительно к известной тестовой задаче при  $\gamma = 1.8$  и точности  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Допустимая область выделена серым. Заданная точность достигнута, выполнено 247 испытаний, образовано 469 симплексов.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 02.740.11.5018.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Городецкий С. Ю. Многоэкстремальная оптимизация на основе триангуляции области // Математическое моделирование и оптимальное



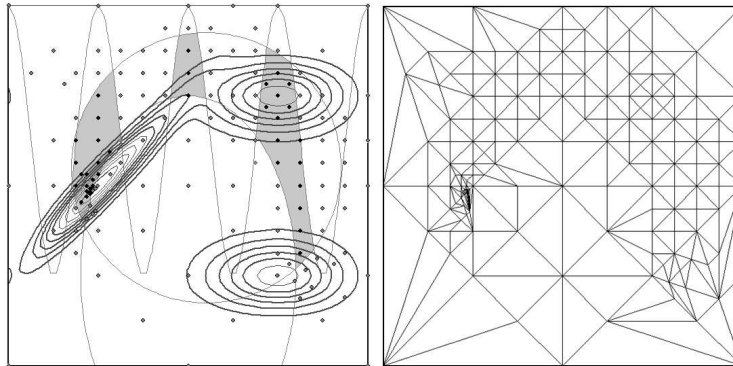


Рис. 1

- управление. Вестник ННГУ. Вып. 2 (21). — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. — С. 249–269.
- [2] *Городецкий С. Ю.* Методы многоэкстремальной оптимизации на основе триангуляции области поиска // Первая Всероссийская научно-практическая конференция по вопросам решения научно-практических задач в промышленности ОПТИМ-2001. Сборник докладов. — СПб.: ЦНИИТС, 2001. — С. 191–196.
- [3] *Городецкий С. Ю., Гришагин В. А.* Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
- [4] *Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. — М.: Физматлит, 2008.
- [5] *Clausen J., Zilinskas A.* Subdivision, Sampling, and Initialization Strategies for Simplicial Branch and Bound in Global Optimization // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — № 44. — P. 957–967.
- [6] *Алексеев В. Е., Таланов В. А.* Графы. Модели вычислений. Структуры данных. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2005.

## О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих нелинейную функцию двух переменных

*С. М. Грабовская*

swetazin@mail.ru

Пензенский государственный университет

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в полном конечном базисе  $B$ , содержащем некоторую функцию вида  $(x_1^a \& x_2^b)^c$ , где  $a, b, c \in \{0, 1\}$ .

Программы с оператором условной остановки [1] характеризуются наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Предполагается, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все функциональные операторы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  подвержены инверсным неисправностям на выходах элементов. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надежен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему функцию  $\varphi$ , а в неисправном — функцию  $\bar{\varphi}$ .

Заметим, что схема из функциональных элементов является частным случаем неветвящихся программ.

Ненадежностью  $N(Pr)$  программы  $Pr$  назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы  $Pr$  при всевозможных входных наборах.

Обозначим  $N_\varepsilon(f) = \inf N(Pr)$ , где инфимум берется по всем программам  $Pr$ , реализующим булеву функцию  $f(\tilde{x})$ . Программа  $A$ , реализующая функцию  $f$ , называется асимптотически оптимальной по надежности, если  $N_\varepsilon(A) \sim N_\varepsilon(f)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_\varepsilon(f)}{N_\varepsilon(A)} = 1$ .

Известно [2], что в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$ , ненадежность которой  $N(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . Константа 5 в оценке ненадежности в некоторых базисах, например  $B = \{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$  и  $B = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ , не может быть понижена [3].

**Теорема 1.** В базисе  $B$  любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой с ненадежностью не больше  $\varepsilon + 81\varepsilon^2$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ .

Пусть  $f$  — произвольная булева функция, а  $S$  — схема, которая ее реализует. Обозначим  $S'$  схему, реализующую функцию  $\bar{f}$ .

Для доказательства теоремы 1 необходимо построить, используя схемы  $S$  и  $S'$ , неветвящиеся программы, реализующие произвольную булеву функцию  $f$ , в базисах, содержащих функцию вида  $(x_1^a \& x_2^b)^c$  при различных значениях параметров  $a, b, c$ , и оценить их ненадежность. Затем из полученных значений для ненадежности нужно выбрать максимальное.

Рассмотрим два случая:

1. Полный конечный базис  $B$  содержит функцию вида  $x_1^a \vee x_2^b$ , где  $a, b \in \{0, 1\}$ .
2. Полный конечный базис  $B$  содержит функцию вида  $x_1^a \& x_2^b$ , где  $a, b \in \{0, 1\}$ .

$Pr_f^* :$	$Pr_f^{**} :$	$Pr_f^{***} :$
$y_1 = f[S]$	$y_1 = \bar{f}[S']$	$y_1 = \bar{f}[S']$
$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S]$
$y_3 = f[S]$	$y_3 = f[S]$	$y_3 = \bar{f}[S']$
$z = y_2 \vee y_3$	$z = \bar{y}_1 \vee y_3$	$z = \bar{y}_1 \vee \bar{y}_3$
stop( $y_1$ )	stop( $y_2$ )	stop( $y_2$ )
$z = y_2$	$z = y_2$	$z = y_2$
stop( $y_3$ )	stop( $y_1$ )	stop( $y_1$ )
$z = y_3$	$z = y_3$	$z = \bar{y}_3 \vee \bar{y}_3$
а)	б)	в)

Рис. 1

Для определенности положим, что базис  $B$  содержит функцию  $x_1 \vee x_2$ .

Как известно, произвольную булеву функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \in N$ , можно реализовать схемой  $S$ , которая при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  функционирует с ненадежностью  $N(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ . Используя 3 экземпляра схемы  $S$ , построим для  $f$  неветвящуюся программу  $Pr_f^*$  с абсолютно надежными операторами условной остановки (рис. 1, а).

$Pr'_f :$ $y_1 = f[S]$ $y_2 = f[S]$ $z = y_1 \& y_2$ $\text{stop}(z)$ $y_3 = f[S]$ $y_4 = f[S]$ $z = y_3$ $\text{stop}(y_4)$ $z = y_4$ а)	$Pr''_f :$ $y_1 = \bar{f}[S']$ $y_2 = f[S]$ $z = \bar{y}_1 \& y_2$ $\text{stop}(z)$ $y_3 = \bar{f}[S']$ $\text{stop}(y_3)$ $y_4 = f[S]$ $z = y_4$ б)	$Pr'''_f :$ $y_1 = \bar{f}[S']$ $y_2 = \bar{f}[S']$ $z = \bar{y}_1 \& \bar{y}_2$ $\text{stop}(z)$ $y_3 = \bar{f}[S']$ $\text{stop}(y_3)$ $y_4 = \bar{f}[S']$ $z = \bar{y}_4 \& \bar{y}_4$ в)
---	---	---

Рис. 2

Далее вычислим и оценим вероятности ошибок программы  $Pr_f^*$  при различных входных наборах. В первом случае набор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  такой, что  $f(\alpha) = 0$ , а во втором — набор  $\alpha$  такой, что  $f(\alpha) = 1$ .

Из полученных значений вероятности ошибок следует выбрать максимальное.

Отметим, что произвольную булеву функцию  $f$  в базисе  $B$ , содержащем функцию  $\bar{x}_1 \vee x_2$  или  $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ , можно реализовать неветвящимися программами  $Pr_f^{**}$  и  $Pr_f^{***}$  соответственно (рис. 1, б, в). Произвольную булеву функцию  $f$  в базисе  $B$ , содержащем функцию  $x_1 \& x_2$ ,  $\bar{x}_1 \& x_2$  или  $\bar{x}_1 \& \bar{x}_2$ , можно реализовать неветвящимися программами  $Pr'_f$ ,  $Pr''_f$  и  $Pr'''_f$  соответственно (рис. 2).

Далее в каждом из этих случаев действуем аналогично, т. е. вычисляем и оцениваем вероятности ошибок построенных программ при различных входных наборах и выбираем среди них максимальное значение.

Так будут получены оценки ненадежности неветвящихся программ, реализующих произвольную булеву функцию  $f$ , в базисах, содержащих функцию вида  $(x_1^a \& x_2^b)^c$ , при различных значениях параметров  $a, b, c$ .

Таким образом, в полном конечном базисе, содержащем нелинейную функцию двух переменных, любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой с ненадежностью не больше

$\varepsilon + 81\varepsilon^2$  при всех  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ . В то время как в различных полных базисах из двухвходовых элементов [4] почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами из функциональных элементов с ненадежностью, асимптотически равной  $k_B \cdot \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Константа  $k_B$  зависит от базиса и  $k_B \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Например,  $k_B = 5$  в базисе  $B = \{\bar{x}_1 \& x_2, 1\}$ ,  $k_B = 4$  в базисе  $B = \{\bar{x}_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ ,  $k_B = 3$  в базисе  $B = \{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2\}$ ,  $k_B = 2$  в базисе  $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чашкин А. В. О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.
- [2] Алехина М. А., Васин А. В. О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, кн. 5. — С. 25–35.
- [3] Васин А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$  // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 12–22.
- [4] Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. — Пенза, 2010.

## О разбиении множества всех триангуляций точечных конфигураций на 64 подкласса

*Д. В. Груздев*

gruzdevdv@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Изучается шесть классов триангуляций точечных конфигураций (в т. ч. классы регулярных, слаборегулярных [2], разворачиваемых, симплицально политопиальных [1] триангуляций), по отношению принадлежности/непринадлежности к которым множество всех триангуляций точечных конфигураций разбивается на 64 попарно не пересекающихся подкласса. Установлено, что из них в точности 24 подкласса являются непустыми, и для каждого из 24 непустых под-

классов показано, что множество комбинаторных типов его триангуляций является счётным.

Рассмотрим  $d$ -мерный выпуклый многогранник  $M \subset \mathbb{R}^d$ , который будем называть также  $d$ -мерным *политопом*, и обозначим через  $\Gamma_i(M)$  множество его  $i$ -мерных граней,  $i = -1, \dots, d$ . При этом  $\Gamma_{-1}(M) = \{\emptyset\}$  и  $\Gamma_d(M) = \{M\}$ . Положим  $\dim(M) = d$ ,  $\Gamma(M) = \bigcup_{i=-1}^d \Gamma_i(M)$  и  $\Gamma^\partial(M) = \bigcup_{i=-1}^{d-1} \Gamma_i(M)$ . Через  $\partial(M)$  обозначим границу политопы  $M$ . Если  $|\Gamma_0(M)| = d + 1$ , то политоп  $M$  называется  $d$ -мерным *симплексом*. Политоп  $M$  называется *симплициальным*, если все его  $(d-1)$ -мерные грани являются  $(d-1)$ -мерными симплексами. Выпуклую оболочку множества точек  $A'$  обозначим через  $[A']$ .

Конечное множество точек  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , выпуклая оболочка  $[A]$  которого есть  $d$ -мерный политоп, называется  $d$ -мерной *точечной конфигурацией*. *Триангуляцией*  $d$ -мерной точечной конфигурации  $A$  называется такое множество  $T = \{S_1, \dots, S_t\}$   $d$ -мерных симплексов  $S_1, \dots, S_t$  с вершинами из  $A$ , что их объединение есть политоп  $[A]$  и пересечение любых двух симплексов из  $T$  является их общей гранью (возможно, пустой). Политоп  $M(T) = \bigcup_{j=1}^t S_j = [A]$  назовём *многогранником триангуляции*  $T$ . Положим  $\Gamma(T) = \bigcup_{j=1}^t \Gamma(S_j)$  и  $\Gamma^\partial(T) = \{F \in \Gamma(T) : F \subset \partial([A])\}$ ,  $\Gamma_i(T) = \bigcup_{j=1}^t \Gamma_i(S_j)$ ,  $\Gamma_i^\partial(T) = \Gamma_i(T) \cap \Gamma^\partial(T)$ ,  $\Gamma_i^{int}(T) = \Gamma_i(T) \setminus \Gamma_i^\partial(T)$  при  $i = -1, \dots, d$ . Через  $\mathcal{T}'_d$  обозначим множество триангуляций  $d$ -мерных точечных конфигураций и положим  $\mathcal{T}' = \bigcup_{d=0}^{+\infty} \mathcal{T}'_d$ .

Симплициальные комплексы называются *изоморфными*, если между ними можно установить биекцию, сохраняющую отношение включения. Триангуляция  $T \in \mathcal{T}'$  называется *слаборегулярной* (weakly regular, [2]), если существует такая регулярная (regular, правильная, см., например, [2]) триангуляция  $T' \in \mathcal{T}'$ , что симплициальные комплексы  $\Gamma(T)$  и  $\Gamma(T')$  изоморфны.

Триангуляция  $T$  называется *разворачиваемой* (shellable), если существует такая последовательность её симплексов  $(S_1, \dots, S_t)$ , что  $T = \{S_1, \dots, S_t\}$  и при  $l = 2, \dots, t$  множество  $\Gamma(S_l) \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} \Gamma(S_i)$  имеет единственный минимальный по включению элемент.

Триангуляцию  $T \in \mathcal{T}'$  назовём *симплициально политопиальной* [1], если для неё существует такой симплициальный политоп  $P$ , что симплициальные комплексы  $\Gamma^\partial(T)$  и  $\Gamma^\partial(P)$  изоморфны.

Через  $\mathcal{T}^R$ ,  $\mathcal{T}^{WR}$ ,  $\mathcal{T}^{Sh}$  и  $\mathcal{T}^{SP}$  обозначим соответственно множества регулярных, слаборегулярных, разворачиваемых и симплицально политопиальных триангуляций из  $\mathcal{T}'$ . Положим  $\mathcal{T}^{int} = \{T \in \mathcal{T}' : \Gamma_0^{int}(T) \neq \emptyset\}$  и  $\mathcal{T}^{i\partial} = \{T \in \mathcal{T}' : \Gamma_0^\partial(T) \setminus \Gamma_0(M(T)) \neq \emptyset\}$ . Таким образом, исследуются шесть классов триангуляций:  $\mathcal{T}^R$ ,  $\mathcal{T}^{WR}$ ,  $\mathcal{T}^{Sh}$ ,  $\mathcal{T}^{SP}$ ,  $\mathcal{T}^{int}$  и  $\mathcal{T}^{i\partial}$ . При  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$  положим  $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$ . Тогда  $\mathcal{T}'$  разбивается на 64 попарно не пересекающихся подкласса  $\mathcal{T}_{i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} = (\mathcal{T}^R)^{i_0} \cap (\mathcal{T}^{WR})^{i_1} \cap (\mathcal{T}^{Sh})^{i_2} \cap (\mathcal{T}^{SP})^{i_3} \cap (\mathcal{T}^{int})^{i_4} \cap (\mathcal{T}^{i\partial})^{i_5}$ , где  $i_0, \dots, i_5 \in \{0, 1\}$ .

Для  $T \in \mathcal{T}'_d$  положим  $s(T) = |\Gamma_{d-1}^\partial(T) \cap \Gamma_{d-1}(M(T))|$ .

Положим  $T_0 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$  и заметим, что  $T_0 \in \mathcal{T}_{1,1,1,1,0,0}$  и  $s(T) = 3$ . Известно [2], что  $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh}$ . В [2] приведена триангуляция из  $\mathcal{T}_{0,1,1,1,0,0}$ , которую обозначим через  $T_1$ , и построена триангуляция из  $\mathcal{T}_{0,0,1,1,0,0}$ , которую обозначим через  $T_2$ . Из [3] следует существование триангуляции из  $\mathcal{T}_{0,0,0,1,0,0}$ , обозначаемой здесь через  $T_3$  и являющейся модификацией известного примера М. Е. Rudin триангуляции из  $\mathcal{T}_{0,0,0,1,0,1}$ , причём  $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}'_3$ ,  $s(T_1) = 4$ ,  $s(T_2) = 10$ ,  $s(T_3) = 24$ ,  $|\Gamma_2^\partial(T_1)| = |\Gamma_2^\partial(T_2)| = 10$  и  $|\Gamma_2^\partial(T_3)| = 24$ . Таким образом,  $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh} \subset \mathcal{T}'$ .

**Лемма 1.**  $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh} \cap \mathcal{T}^{SP}$ .

Для  $w = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{R}^d$  положим  $\psi(w) = (w_1, \dots, w_d, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , а для  $M \subset \mathbb{R}^d$  положим  $\psi(M) = \{\psi(w) : w \in M\}$ . Для триангуляции  $T \in \mathcal{T}'_d$  положим  $\eta(T) = \{[\psi(S), e_{d+1}] : S \in T\}$ , где  $e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , и заметим, что  $\eta(T) \in \mathcal{T}'_{d+1}$ .

**Лемма 2.** Если  $i_0, i_2, \dots, i_5 \in \{0, 1\}$  и  $T \in \mathcal{T}_{i_0, 0, i_2, i_3, i_4, i_5}$ , то  $i_0 = 0$ ,  $\eta(T) \in \mathcal{T}_{0, 0, i_2, 0, 0, \max\{i_4, i_5\}}$  и  $s(\eta(T)) \geq s(T)$ .

**Лемма 3.** Если  $i_0, i_2, \dots, i_5 \in \{0, 1\}$  и  $T \in \mathcal{T}_{i_0, 1, i_2, i_3, i_4, i_5}$ , то  $i_2 = 1$ ,  $i_3 = 1$ ,  $\eta(T) \in \mathcal{T}_{i_0, 1, 1, 1, 0, \max\{i_4, i_5\}}$  и  $s(\eta(T)) \geq s(T)$ .

Теперь рассмотрим такую триангуляцию  $T \in \mathcal{T}'$ , что  $s(T) \geq 1$  и  $d = \dim(M(T)) \geq 2$ . Тогда существуют точки  $v_0, v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ , такие, что грань  $F = [v_1, \dots, v_d] \in \Gamma_{d-1}^\partial(T) \cap \Gamma_{d-1}(M(T))$  и точка  $v_0$  расположена над  $F$  и под всеми остальными  $(d-1)$ -мерными гранями политопа  $M(T)$  и не принадлежит аффинной оболочке ни одной  $(d-1)$ -мерной грани политопа  $M(T)$ .

Пусть  $p_1 = \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^d v_k$ ,  $p_2 = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} v_k$ ,  $T_{0,0} = \{[v_0, \dots, v_d]\}$ ,

$T_{0,1} = \{ \{v_0, \dots, v_d, p_2\} \setminus \{v_k\} : k = 0, \dots, d-1 \}$ ,  $T_{1,0} = \{ \{p_1, v_0, \dots, v_d\} \setminus \{v_k\} : k = 0, \dots, d \}$ ,  $T_{1,1} = \{ \{p_1, v_0, \dots, v_d\} \setminus \{v_k\} : k = 0, \dots, d-1 \} \cup \{ \{p_1, v_0, \dots, v_{d-1}, p_2\} \setminus \{v_k\} : k = 0, \dots, d-1 \}$ . Положим  $\mu_{i_4, i_5}(T) = T \cup T_{i_4, i_5}$  при  $i_4, i_5 \in \{0, 1\}$ . Также положим  $\mu_{i_4, i_5}^0(T) = T$  и  $\mu_{i_4, i_5}^j(T) = \mu_{i_4, i_5}(\mu_{i_4, i_5}^{j-1}(T))$  при  $i_4, i_5 \in \{0, 1\}$  и натуральном  $j$ .

**Лемма 4.** Если  $i_0, \dots, i_5, k_4, k_5 \in \{0, 1\}$ ,  $T \in \mathcal{T}_{i_0, i_1, i_2, i_3, k_4, k_5}$ ,  $\dim(M(T)) \geq 2$  и  $s(T) \geq 1$ , то  $\mu_{i_4, i_5}(T) \in \mathcal{T}_{i_0, i_1, i_2, i_3, \max\{i_4, k_4\}, \max\{i_5, k_5\}}$  и  $s(\mu_{i_4, i_5}(T)) \geq s(T)$ .

**Теорема 1.** Для  $i_4, i_5 \in \{0, 1\}$  и целого неотрицательного  $j$  выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(\eta(T_3))) &\in \mathcal{T}_{0,0,0,0,i_4,i_5}, \quad \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(T_3)) \in \mathcal{T}_{0,0,0,1,i_4,i_5}, \\ \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(\eta(T_2))) &\in \mathcal{T}_{0,0,1,0,i_4,i_5}, \quad \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(T_2)) \in \mathcal{T}_{0,0,1,1,i_4,i_5}, \\ \mathcal{T}_{0,1,0,0,i_4,i_5} &= \emptyset, \quad \mathcal{T}_{0,1,0,1,i_4,i_5} = \emptyset, \quad \mathcal{T}_{0,1,1,0,i_4,i_5} = \emptyset, \\ \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(T_1)) &\in \mathcal{T}_{0,1,1,1,i_4,i_5}, \quad \mu_{i_4, i_5}(\mu_{0,0}^j(T_0)) \in \mathcal{T}_{1,1,1,1,i_4,i_5}, \\ \mathcal{T}_{1,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} &= \emptyset \text{ при } (i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3 \setminus \{(1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Триангуляции  $T_1 \in \mathcal{T}'$  и  $T_2 \in \mathcal{T}'$  называются *комбинаторно-эквивалентными*, если симплициальные комплексы  $\Gamma(T_1)$  и  $\Gamma(T_2)$  изоморфны. Множеством *комбинаторных типов* триангуляций из  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$  назовём такое множество триангуляций  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}'$ , что любые две триангуляции из  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$  являются комбинаторно-неэквивалентными, для каждой триангуляции из  $\mathcal{T}$  существует комбинаторно-эквивалентная ей триангуляция из  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$  и для каждой триангуляции из  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$  существует комбинаторно-эквивалентная ей триангуляция из  $\mathcal{T}$ .

**Теорема 2.** Для каждого из 24 подклассов ( $\mathcal{T}_{0,0,i_2,i_3,i_4,i_5}$ ,  $\mathcal{T}_{i_0,1,1,1,i_4,i_5}$ , где  $i_0, i_2, \dots, i_5 \in \{0, 1\}$ ) множество комбинаторных типов триангуляций данного подкласса является счётным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00545-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Груздев Д. В. О классах триангуляций точечных конфигураций // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 478–481.



- [2] *Lee C. W.* Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 4. — P. 443–456.
- [3] *Connelly R., Henderson D. W.* A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1980. — V. 88. — P. 299–306.

## Автоматное распознавание отмеченных орграфов

*В. И. Грунская, М. Ю. Тихончев*

veragrunska@yandex.ru, tikhonchev@sv.ulsu.ru

Ульяновский государственный университет

В работе рассматривается задача распознавания детерминированных автоматных графов с отмеченными дугами блуждающим по ним конечным автоматом. Для заданного графа  $G$  предлагается алгоритм синтеза конечного инициального автомата, который, перемещаясь по дугам произвольного исследуемого детерминированного графа  $H$  и оставляя в его вершинах отметки, за конечное число тактов делает заключение о изоморфизме-неизоморфизме графов  $G$  и  $H$ . Схожие задачи рассматривались ранее для ориентированных и неориентированных графов (см., например, работы [1, 2]).

Все неопределяемые понятия взяты из [3].

Пусть  $G = (G, E_G, \mathbf{L}, v)$  — конечный ориентированный граф, где  $G$  и  $E_G$  — множества вершин и дуг соответственно,  $\mathbf{L}$  — заданный алфавит отметок дуг, причем множество  $\mathbf{L}$  упорядочено,  $v : E_G \rightarrow \mathbf{L}$  — функция разметки дуг.

Граф называется детерминированным, если для каждой его вершины отметки всех исходящих дуг попарно различны. Будем рассматривать только детерминированные односторонне связные графы и обозначим их класс через  $\mathbf{K}_d$ . Граф называется инициальным, если в нем выделена инициальная вершина  $g_0$ , и обозначается  $G_{g_0}$ . Обозначим класс инициальных детерминированных графов через  $\mathbf{K}_d^i$ .

Отметкой маршрута в графе  $G$  назовем слово, составленное из отметок дуг этого маршрута, выписанных в порядке их прохождения. Языком вершины графа  $G$  назовем множество отметок всех

маршрутов, начинающихся в этой вершине. Вершины  $g$  графа  $G$  и  $h$  графа  $H$  называются отличимыми, если их языки различны. Граф называется приведенным, если любая пара его вершин отличима.

Графы из множества  $\mathbf{K}_d(\mathbf{K}_d^i)$  будем называть изоморфными, если между их множествами вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность, отметки дуг (и инициальную вершину).

Рассмотрим обход инициально связного графа  $G_{g_0} \in \mathbf{K}_d^i$  методом поиска в глубину с расстановкой отметок вершин из множества  $\mathbf{M} = \{1, \dots, |G|\}$  по следующим правилам (при этом полагаем, что по графу можно перемещаться как по направлению, так и против направления дуг). Полагаем, что в начальный момент всем вершинам графа  $G_{g_0}$  приписана отметка 0.

1. Объявляем инициальную вершину графа  $G_{g_0}$  текущей.

2. Если для текущей вершины  $g$  найдется вершина  $g'$ , такая, что  $\mu(g') = 0$ ,  $(g, g') \in E_G$ , перейдем в эту вершину (если таких вершин несколько, выбираем ту, в которую ведет дуга с наименьшей по порядку отметкой). Если для текущей вершины  $g$  таких вершин  $g'$  нет, переходим в вершину, из которой был выполнен переход в вершину  $g$ . Перед уходом из текущей вершины, если  $\mu(g) = 0$ , припишем ей отметку  $(i + 1)$ , где  $i$  — максимальная из уже приписанных отметок.

3. Обход завершен, когда для текущей вершины  $g$  нет вершин  $g'$ , таких, что  $\mu(g') = 0$ ,  $(g, g') \in E_G$ , и  $\mu(g) = 1$ .

Для каждого  $j$ -го шага обхода,  $j = 0, \dots, 2|G| - 2$ , определим  $\Theta_j^G = (\mu_j, O_j, \mu'_j)$ , где  $\mu_j$  — отметка текущей вершины  $g$  при входе в эту вершину,  $\mu'_j$  — ее отметка при выходе из нее;  $O_j = \{(\alpha, \beta)_i\}$  — множество всех таких пар, что для каждого  $(\alpha, \beta) \in O_j \exists g' \in G$ ,  $(g, g') \in E_G$ ,  $\alpha = v(g, g')$ ,  $\beta = \mu(g')$ . Назовем упорядоченное множество  $\mathbf{X}(G_{g_0}) = \{\Theta_0, \dots, \Theta_{2|G|-2}\}$  лабиринтной характеристикой графа  $G_{g_0}$ . Согласно алгоритму, построение  $\mathbf{X}(G_{g_0})$  требует  $O(|G|)$  тактов времени.

**Теорема 1.** *Инициально связные графы  $G_{g_0}, H_{h_0} \in \mathbf{K}_d^i$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\mathbf{X}(G_{g_0}) = \mathbf{X}(H_{h_0})$ .*

Пусть  $g$  — некоторая вершина односторонне связного графа  $G \in \mathbf{K}_d$ . Характеристику  $\mathbf{X}(G_g)$  назовем полной и обозначим  $\mathbf{XC}(G_g)$ , если она имеет длину  $2|G| - 1$ , и неполной в противном случае. В

силу односторонней связности графа  $\mathbf{XC}(G_g)$  может существовать не для всякой  $g \in G$ .

**Теорема 2.** *Приведенные односторонне связные графы  $G, H$  изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся  $g_0 \in G$  и  $h_0 \in H$ , такие, что  $\mathbf{XC}(G_{g_0}) = \mathbf{XC}(H_{h_0})$ .*

Очевидно, теорема 2 справедлива и для сильно связных графов.

Под конечным автоматом  $\mathbf{A}$  будем понимать конечный, всюду определенный инициальный автомат Мили с заключительными состояниями, т. е. семёрку  $\langle A, B, S, \varphi, \psi, S_e, s_0 \rangle$ , где  $A$  и  $B$  — входной и выходной алфавиты, соответственно,  $S$  — конечное множество состояний,  $\varphi$  и  $\psi$  — функции переходов и выходов, соответственно,  $S_e \subset S$  — множество заключительных состояний,  $s_0 \in S$  — начальное состояние.

Для заданного инициально связного графа  $G_{g_0}$  из класса  $\mathbf{K}_d^i$  построим автомат  $\mathbf{A}(G_{g_0})$ , способный, начав движение из инициальной вершины графа  $H_{h_0}$ , за конечное число тактов определить, является  $H_{h_0}$  изоморфным  $G_{g_0}$  или нет.

Автомат строим по лабиринтной характеристике  $\mathbf{X}(G_{g_0}) = \{\Theta_0, \dots, \Theta_{2|G|-2}\}$  графа  $G_{g_0}$ . Множество его состояний есть множество  $\{0, \dots, 2|G|\}$ . Начальное состояние  $s_0 = 0$ , заключительные —  $2|G| - 1$  и  $2|G|$ .

Входной алфавит  $A$  представляет собой множество всевозможных векторов  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{|L|})$  длины  $(|L| + 1)$ . Первый элемент вектора  $\mathbf{a}$  является отметкой из  $\mathbf{M}$ . Следующие  $|L|$  элементов являются парами из  $(\mathbf{L} \cup \{\Lambda\}) \times (\mathbf{M} \cup \{\Lambda\})$ , упорядоченными по возрастанию первых элементов пар, считая, что  $\Lambda$  меньше любого элемента из  $\mathbf{L}$ . Выходной алфавит  $B$  — множество пар  $(b_1, b_2)$ , где  $b_1 \in (\mathbf{M} \setminus \{0\}) \cup \{\Lambda\}$ ,  $b_2$  — отметка из  $\mathbf{L}$ , взятая со знаком плюс или минус, или пустой символ  $\Lambda$ .

Вход автомата интерпретируется следующим образом: пусть автомат  $\mathbf{A}(G)$  в некоторый момент времени находится в вершине  $h$  с полустепенью исхода  $d$  графа  $H_{h_0}$ . Тогда автомат получает на вход вектор  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{|L|})$ , где  $a_0$  является отметкой вершины  $h$ ,  $a_1, \dots, a_d$  — пары, состоящие из отметок исходящих из нее дуг, а также отметок вершин, в которые эти дуги идут, упорядоченные по возрастанию отметки дуги. Остальные элементы вектора  $\mathbf{a}$  (если они есть) — пары  $(\Lambda, \Lambda)$ .

Выход интерпретируется следующим образом. Пусть  $\psi(\mathbf{a}, j) = (b_1, b_2)$ . Тогда  $b_1$  — отметка, приписываемая автоматом текущей вершине при  $b_1 \neq \Lambda$ , или указание не менять отметку текущей вершины, если  $b_1 = \Lambda$ . А  $b_2$  есть отметка дуги, по которой автомату следует переместиться, если  $b_2 \neq \Lambda$ , или остаться в текущей вершине, если  $b_2 = \Lambda$ . Причем, если  $b_2$  — отметка со знаком плюс, автомат перемещается по направлению дуги, со знаком минус — против направления дуги.

Функция выходов  $\psi(\mathbf{a}, j) = (b_1, b_2)$  определяется по следующим правилам. Если отметка текущей вершины  $\mu_j \neq 0$ , то  $b_1 = \Lambda$ , в противном случае  $b_1 = \mu'_j$ . Если среди вершин, смежных текущей, имеются вершины с дополнительной отметкой 0, то  $b_2$  есть минимальная из отметок дуг, идущих в такие вершины, взятая со знаком плюс. Если среди вершин, смежных текущей, нет вершин с дополнительной отметкой 0, то  $b_2$  есть значение отметки дуги, идущей в текущую вершину из вершины с максимальной отметкой, взятое со знаком минус, и переход осуществляется в эту вершину.

Зададим функцию переходов  $\varphi(\mathbf{a}, j)$  следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{a}, j) = \begin{cases} j + 1, & \text{если } \mathbf{a} = (\mu_j, O_j) \\ 2|G|, & \text{если } \mathbf{a} \neq (\mu_j, O_j) \end{cases}, \quad 0 \leq j \leq 2|G| - 2.$$

Таким образом, автомат за  $O(|G|)$  тактов переходит в состояние  $2|G| - 1$ , если графы  $G_{g_0}$  и  $H_{h_0}$  изоморфны, и в состоянии  $2|G|$  в противном случае.

Для заданного односторонне связного графа  $G \in \mathbf{K}_d$  произвольным образом выбирается  $g \in G$ , и для полученного  $G_g \in \mathbf{K}_d^i$  мы пытаемся построить  $\mathbf{XC}(G_g)$ . Если это не удастся, выбирается другая начальная вершина, которую, очевидно, нужно выбирать среди вершин с отметкой  $\mu = 0$ . В худшем случае на выбор вершины, для которой существует  $\mathbf{XC}(G_g)$ , мы потратим  $O(|G|^2)$  тактов. По  $\mathbf{XC}(G_g)$  строится автомат  $\mathbf{A}(G_g)$ . Для произвольного исследуемого  $H \in \mathbf{K}_d$  автомат пытается обойти его из некоторой вершины  $h$ , следуя описанным выше правилам. При этом он проверяет совпадение характеристик  $\mathbf{XC}(G_g)$  и  $\mathbf{X}(H_h)$ , из чего делает заключение о изоморфизме-неизоморфизме  $G$  и  $H$ . Если  $G_g$  и  $H_h$  не изоморфны, автомат пытается совершить обход из другой вершины. Если  $\mathbf{X}(H_h)$  для любой  $h \in H$  не совпадает с  $\mathbf{XC}(G_g)$ , графы не изоморфны. Таким образом, автомат тратит на решение проблемы изоморфизма графов  $O(|G|^2)$  тактов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сапунов С. В. Контрольные эксперименты с помеченными графами при неизвестной верхней оценке числа вершин // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII Международная конференция. — М: МАКС Пресс, 2006. — С. 325–331.
- [2] Грунский И. С., Сапунов С. В., Татаринев Е. А. Эксперименты с помеченными графами // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция. — М: МАКС Пресс, 2009. — С. 68–70.
- [3] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

### Анализ геометрических образов асинхронных автоматов

*Е. В. Гуревич, Л. Б. Тяпаев*

lbeasty@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

### Исследование преобразований геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов

Представление конечных детерминированных автоматов геометрическими образами порождает целый класс различных задач. Интересной представляется взаимосвязь геометрических преобразований образов и свойств синхронных и асинхронных автоматов в их классическом представлении. В данной статье представлены некоторые результаты исследования применения преобразований к геометрическим образам, порождаемым некоторыми частными классами автоматов.

Пусть задан синхронный автомат  $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ ,  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ ,  $\delta_A : S \times X \rightarrow S$ ,  $\lambda_A : S \times X \rightarrow Y$ . С начальным автоматом  $(A, s)$  связано автоматное отображение  $\Lambda_A^S = \{(p, q) | \forall p \in X^* \lambda(s, p) = q\}$ . Геометрическое пространство  $\Gamma$  для автомата  $(A, s)$  определяется по следующему алгоритму [2]:

1. Сопоставим элементам множества  $X$  натуральные числа от 1 до  $n$ , т. е. осуществим взаимно-однозначное отображение  $f : X \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

2. Определим координатную ось абсцисс  $\tilde{X}$  для пространства  $\Gamma$  как отрезок числовой оси  $[0, n + 1]$ .
3. Каждому слову  $p = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$  сопоставим вектор  $\omega = (f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \dots, f(x_{i_k}))$ , т.е. осуществим взаимно-однозначное соответствие  $g : X^* \rightarrow V_N$ , где  $V_N$  — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.
4. Каждому такому вектору  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$  взаимно-однозначно сопоставим точку  $\tilde{x} \in Q$  на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(n+1)^0} + \frac{\omega_2}{(n+1)^1} + \frac{\omega_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\omega_k}{(n+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества  $Y$ , ось ординат  $\tilde{Y}$  пространства  $\Gamma$  и отображение  $h : Y^* \rightarrow V_N$ . Каждой паре  $(p, q) \in \Lambda_A^S$  в пространстве  $\Gamma$  сопоставляется точка с координатами  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , где  $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) = g(p)$ ,  $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) = h(q)$ .

Под геометрическим образом  $\Omega_A^S$  автомата  $(A, s)$  понимается множество таких пар  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  [1, 2].

Пусть автомат  $A$  удовлетворяет условию:  $(\exists q \in Y^*) (\forall p \in X^*) \lambda(s_0, p) = q$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $p = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k+1}}$ ,  $x_{i_j} \in X$ ,  $\varepsilon$  — достаточно малая величина. Тогда  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists k > \log_{m+1}(\frac{1}{\varepsilon}))$ , что автомат  $A$  на словах длины  $k + 1$  в пространстве  $\Gamma$  определяется точками, расположенными на прямой  $f(\tilde{x}) = l$ ,  $f'(\tilde{x}) < l < f''(\tilde{x})$ ,  $f'(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(m+1)^{i-1}}$ ,  $f''(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) + \frac{1}{(m+1)^{k-1}}$ .

Автомат  $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$  называется автономным, если  $|X| = 1$ .

Обозначим класс автономных автоматов, содержащий все автономные автоматы с фиксированным числом  $N$  состояний и числом  $M$  выходных сигналов, как  $K(N, M)$ .

Рассмотрим множество  $\Omega$  всех различных геометрических образов всевозможных инициальных синхронных и асинхронных автоматов из класса  $K(N, M)$ .

Автомат  $B = (S, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$  называется асинхронным, если  $\lambda_B : S \times X \rightarrow Y^*$ .

Будем рассматривать те геометрические преобразования образов, путем применения которых можно из некоторого образа  $\Omega_i \in \Omega$  синхронного автомата получить другой образ  $\Omega_y \in \Omega$  асинхронного автомата.

**Пример преобразования геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов**

Рассмотрим асинхронный автомат  $B = (S, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ , где  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{c, d\}$ ,  $S = \{0, 1\}$ , представленный в виде таблицы переходов и выходов:

$X$	$S$	$Y$	$S$
$a$	0	$cd$	1
$a$	1	$d$	0

Рассмотрим следующий синхронный автомат  $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ , где  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{c, d\}$ ,  $S = \{0, 1\}$ , представленный в виде таблицы переходов и выходов:

$X$	$S$	$Y$	$S$
$a$	0	$d$	1
$a$	1	$c$	1

Рассмотрим преобразование вида  $\tilde{x}' = \tilde{x}$ ,  $\tilde{y}' = A\tilde{y}^2 + B\tilde{y} + C$ , где  $A, B, C$  — некоторые коэффициенты. Тогда образ синхронного автомата  $A$ ,  $\Omega_i \in \Omega$ , переводится в образ асинхронного автомата  $B$ ,  $\Omega_y \in \Omega$ , описанным преобразованием с коэффициентами  $(A, B, C)$ , если  $(\forall(x, y) \in \Omega_i) (x, Ay^2 + By + C) \in \Omega_y$ .

Образ  $\Omega_i$  будет представлен уравнением:

$$y = \frac{5 \cdot 3^n - 3}{2 \cdot 3^n},$$

где  $n$  — количество тактов. Выразим  $n$  через  $x$ :

$$n = 1 - \log_2(2 - x).$$

Образ  $\Omega_y$  будет представлен уравнением:

$$y = \frac{51}{26} - \frac{9}{26} \cdot \left(\frac{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{3^n}\right)^3 - \frac{3}{26} \cdot \left(\frac{3^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{3^n}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^n \cdot 3^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}.$$

Тогда коэффициенты  $(A, B, C)$  будут иметь следующий вид:

$$A = -\frac{2}{3} \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad B = \frac{3}{13} \cdot \frac{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{3^{2n}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{3^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{3^{2n}} + \frac{10}{3} \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad C = \frac{51}{26}.$$

Разработано программное обеспечение для проведения эксперимента по преобразованию геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов. Ведутся исследования по характеристике нелинейных преобразований в рассматриваемом классе геометрических образов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Тяпаев Л. Б.* Аффинные классы автоматов и их преобразования // Теоретические проблемы информатики и её приложений. — Саратов: Гос. УНЦ «Колледж», 2001. — С. 133–135.
- [2] *Тяпаев Л. Б.* Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». — 2006. — Т. 6, № 2. — С. 121–133.

### Реализация формулами функций из некоторых классов трехзначной логики

*Д. А. Дагаев*

ddagaev@gmail.com

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Москва

Рассматривается задача о сложности реализации формулами функций из некоторого семейства конечно-порожденных замкнутых классов трехзначной логики.

Пусть  $k \geq 2$ . Множество всех функций  $k$ -значной логики будем обозначать через  $P_k$ , а множество всех функций трехзначной логики, принимающих значения только из множества  $\{0, 1\}$ , — через  $P_{3,2}$ . Пусть  $G \subseteq P_k$ . Обозначим через  $[G]$  замкнутый класс, порожденный системой  $G$ , а через  $G(n)$  — множество всех функций из  $G$ , зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \geq 1$ . Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in [G]$ ,  $\Phi$  — формула над  $G$ , реализующая функцию  $f$ , а  $F \subseteq [G]$ . Обозначим через  $L(\Phi)$  число символов переменных и констант, входящих в



формулу  $\Phi$  (сложность формулы  $\Phi$ ), а через  $L_G(F(n))$  — функцию Шеннона для множества  $F$ .

Известно [1], что для любой полной системы булевых функций  $G$  выполняется соотношение

$$L_G(P_2(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Также известно [2], что для любой конечной системы  $G \subseteq P_2$  найдется константа  $c = c(G)$ , такая, что для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  из  $[G]$  имеет место неравенство  $L_G(f) \leq c^n$ . В работах [3, 4] для некоторых конечных полных базисов  $G \subseteq P_k$ ,  $k \geq 3$ , получено соотношение

$$L_G(P_k(n)) \sim \frac{k^n}{\log_k n}.$$

Введем обозначения для некоторых замкнутых классов булевых функций. Положим  $C_0 = \{0\}$ ,  $C_1 = \{1\}$ ,  $C = \{0, 1\}$ . Через  $L$  будем обозначать множество всех линейных булевых функций.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{3,2}$ . Проекцией функции  $f$  называется булева функция  $pr f(x_1, \dots, x_n)$ , значение которой на произвольном наборе  $\tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$  определяется равенством  $pr f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$ . Проекцией  $pr F$  множества функций  $F \subseteq P_{3,2}$  называется множество  $\bigcup \{pr f\}$ , где объединение берется по всем функциям  $f \in F$ . Нетрудно показать, что для любого замкнутого класса  $F \subseteq P_{3,2}$  множество  $pr F$  является замкнутым классом булевых функций.

Пусть  $B$  — произвольный замкнутый класс булевых функций. Положим

$$pr^{-1}B = \{f \in P_{3,2} \mid pr f \in B\}.$$

Легко видеть, что множество  $pr^{-1}B$  является замкнутым классом и для любого замкнутого класса  $F \subseteq P_{3,2}$ , такого, что  $pr F = B$ , выполняется соотношение  $F \subseteq pr^{-1}B$ . Класс  $pr^{-1}B$  будем называть максимальным замкнутым классом. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует максимальный класс функций из  $P_{3,2}$ . Известно (см. [5]), что замкнутый класс  $pr^{-1}B$  является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда  $B \notin \{C, C_0, C_1\}$ .

В данной работе изучается вопрос о сложности реализации формулами функций из конечно-порожденных максимальных замкнутых классов. В работе [6] получена асимптотически точная оценка

для функции Шеннона класса  $pr^{-1}L$  и некоторой конечной системы, порождающей этот класс. Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 1.** Пусть  $B$  — произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от классов  $C, C_0, C_1$ . Тогда существует конечная порождающая система  $G$  класса  $pr^{-1}B$ , такая, что

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

Автор выражает благодарность проф. А. Б. Угольникову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — 1960. — С. 61–80.
- [2] *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 6. — С. 1341–1344.
- [3] *Гашиков С. Б.* О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1990. — № 2. — С. 88–92.
- [4] *Захарова Е. Ю.* Реализация функций из  $P_k$  формулами // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 1. — С. 99–108.
- [5] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [6] *Дагаев Д. А.* О сложности псевдолинейных функций // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2010. — № 2. — С. 53–56.

## О графах с заданным числом независимых множеств

А. Б. Дайняк

dainiak@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Данная статья содержит результаты исследования, продолжающего работу [1]. Пусть  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow S$  и  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow T$  — функционалы, заданные на классе графов  $\mathcal{G}$ . *Обратная задача существования* для пары  $(\mathcal{G}, \varphi)$  ставится следующим образом [1]: «для всякого ли  $s \in S$  найдётся граф  $G \in \mathcal{G}$ , такой, что  $\varphi(G) = s$ ?» Если ответ на предыдущий вопрос положителен, то имеет смысл *обратная задача оптимизации* для тройки  $(\mathcal{G}, \varphi, \psi)$ : «для заданного  $s \in S$  найти величину  $L_{\varphi, \psi}(s)^{\mathcal{G}} = \inf\{\psi(G) \mid G \in \mathcal{G}, \varphi(G) = s\}$ ». Будем через  $\iota(G)$  обозначать количество независимых множеств (н. м.) в графе  $G$ , а через  $\iota_m(G)$  — количество максимальных по включению н. м. в  $G$  (м. н. м.). Через  $\nu(G)$  обозначим число вершин в  $G$ . Классы двудольных графов и лесов обозначим соответственно  $\mathcal{B}, \mathcal{F}$ .

В работе [1] было показано, что  $L_{\iota_M, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \leq 8 \log_6 n < 3.1 \log_2 n$  для произвольного  $n$ , в то время как тривиальная нижняя оценка имеет вид  $L_{\iota_M, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \geq 2 \log_2 n$ . В той же работе было установлено, что для натуральных чисел  $n$ , имеющих в двоичной записи  $o(\log n)$  отрезков из единиц, справедлива асимптотика  $L_{\iota_M, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \sim 2 \log_2 n$ . Предполагается, что данная асимптотика имеет место для любого натурального  $n$ . Пока это не удается доказать, однако можно указать способ понижения верхней оценки.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — двудольный граф без изолированных вершин с долями  $L_G, R_G$ . Пусть  $\tilde{G}$  — двудольный граф, не пересекающийся с  $G$ , в первой и второй долях которого выделены (возможно, пустые) множества  $U$  и  $V$  соответственно. Пусть  $G'$  — граф, полученный соединением всех вершин  $U$  ( $V$ ) со всеми вершинами  $L_G$  (соответственно,  $R_G$ ). Тогда  $\iota_M(G') = (\iota_M(G) - 2) \cdot \iota_M(\tilde{G} \setminus (U \cup V)) + \iota_M(\tilde{G} \setminus U) + \iota_M(\tilde{G} \setminus V) + \iota_M(\tilde{G} + U + V)$ , где через  $\iota_M(\tilde{G} + U + V)$  обозначены м. н. м. графа  $\tilde{G}$ , пересечения которых с множествами  $U$  и  $V$  непусты.

*Доказательство.* Утверждение леммы проверяется прямым подсчетом. Если в м. н. м.  $G'$  не входит ни одна вершина графа  $G$ , то должно входить хотя бы по одной вершине из  $U$  и  $V$ , и таких множеств  $\iota_M(\tilde{G} + U + V)$ . Если в м. н. м. в  $G'$  входят вершины из обеих долей  $G$ , то ни одна из вершин множества  $U \cup V$  туда не войдет, а подмножества этого м. н. м. в  $G$  и  $\tilde{G}$  сами будут максимальными в графах  $G$  и  $\tilde{G}$ . Следовательно, количество таких м. н. м. равно  $(\iota_M(G) - 2) \cdot \iota_M(\tilde{G} \setminus (U \cup V))$ . Если м. н. м. в  $G$  содержит все вершины  $L_G$  или все вершины  $R_G$ , то его часть в графе  $\tilde{G}$  будет совпадать с м. н. м. в  $\tilde{G} \setminus U$  или  $\tilde{G} \setminus V$  соответственно. ■

Пусть  $\tilde{G}$  — двудольный граф с выделенными подмножествами  $U$  и  $V$  вершин в долях. Пару чисел  $(a, b)$ , где  $a = \iota_M(\tilde{G} \setminus (U \cup V))$  и  $b = (\iota_M(\tilde{G} \setminus U) + \iota_M(\tilde{G} \setminus V) + \iota_M(\tilde{G} + U + V) - 2\iota_M(\tilde{G} \setminus (U \cup V)))$ , будем называть  $\iota$ -парой  $\tilde{G}$ . Полным множеством пар натуральных чисел будем называть всякое множество  $Q$ , такое, что любое натуральное  $n$  представимо в виде  $n = ak + b$  для некоторых  $(a, b) \in Q$ .

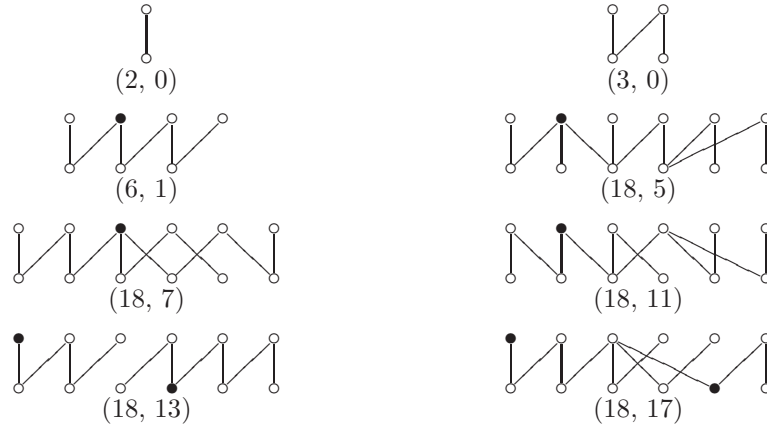
**Лемма 2.** Пусть  $\Gamma$  — конечное множество графов с выделенными подмножествами вершин в долях, такое, что множество  $\iota$ -пар графов из  $\Gamma$  является полным. Пусть

$$\gamma = \max \{ (\log_2 a)^{-1} \nu(G) \mid a \text{ — первый элемент } \iota\text{-пары } G, G \in \Gamma \},$$

и пусть  $a_0$  — максимальный из первых элементов  $\iota$ -пар графов из  $\Gamma$ . Тогда  $L_{\iota_M, \nu}^B(n) \lesssim \gamma \cdot \log_2 n$ .

*Доказательство.* Лемма доказывается индукцией по  $n$  с использованием леммы 1. ■

Лемма 2 показывает, что для получения верхней оценки величины  $L_{\iota_M, \nu}^B(n)$  достаточно подобрать «удачное» множество графов  $\Gamma$ . Перебором было найдено следующее множество графов (жирным выделены подмножества  $U, V$ ;  $\iota$ -пары подписаны снизу):



Легко проверяется, что множество  $\iota$ -пар указанных графов является полным. Отсюда и из леммы 2 следует приводимая ниже оценка.

**Теорема 3.**  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \lesssim 12(\log_2 18)^{-1} \log_2 n < 2.88 \log_2 n$ .

Также интерес представляет получение оценки величины  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n)$  (соответствующая задача существования была положительно решена Линеком [2]). Тривиальная нижняя оценка имеет вид  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \geq \log_2 n$ , при этом в [2] для реализации числа  $n$  строятся двудольные графы с максимально возможными мощностями долей:  $\lfloor \log_2 n \rfloor$  и  $\lfloor \log_2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 1 \rfloor$ . Для реализации чисел вида  $n = 2^k - 1$  соответствующий граф будет иметь  $2k - 2$  вершины, что вдвое больше ожидаемого оптимума. Некоторые из чисел указанного вида можно реализовать проще, как показывает следующее утверждение.

**Теорема 4.** При  $k = 2^t$  имеет место оценка  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{F}}(2^k - 1) \lesssim k$ .

*Доказательство.* Достаточно заметить, что  $2^{2^t} - 1 = \prod_{j=0}^{t-1} (2^{2^j} + 1) = \prod_{j=0}^{t-1} \iota(K_{2^j, 1}) = \iota(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j, 1})$ . При этом  $\nu(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j, 1}) = 2^t + t - 1 \lesssim k$ .  
 ■

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-3429.2010.1 и гранта РФФИ № 10-01-00768а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дайняк А. Б. О реализации натуральных чисел инвариантами графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная мате-

матика и ее приложения». — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 294–295.

- [2] Linek V. Bipartite graphs can have any number of independent sets // Discrete Mathematics. — 1989. — V. 2, № 76. — P. 131–136.

## Задачи комбинаторного распознавания

Г. А. Донец

g\_donets@mail.ru

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Рассматривается задача:

**Задача 1.** Пусть  $n$  выключателей независимо присоединены к одной лампочке. Известно, что среди них  $m$  испорченных. Эксперимент состоит в одновременном включении  $k$  ( $1 < k \leq m$ ) выключателей. Если среди них хотя бы один исправный, то лампочка загорается. Необходимо за минимальное количество проб найти  $k$  неисправных выключателей.

Многие задачи о монетах, среди которых встречаются фальшивые, можно свести к задаче 1, при этом ответом на разные эксперименты является результат взвешивания на двудольных весах определенных комбинаций монет.

К задаче 1 приводит и следующая задача.

**Задача 2** (задача о лотерее). Пусть задано множество натуральных чисел  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Из него случайным образом выбирается подмножество выигрышных чисел  $M = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ . Эксперимент состоит в выборе  $k$  чисел ( $k \leq m$ ) из  $N_n$ . Необходимо найти минимальное количество таких  $k$ -выборок, чтобы хотя бы одна из них принадлежала  $M$ .

Задачу 1 можно сформулировать в такой математической постановке.

**Задача 1'.** Пусть задано множество  $n$  чисел  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  из  $m$  единиц и  $n - m$  нулей. Эксперимент состоит в выборе фиксированного количества  $k$  ( $k \leq m$ ) чисел, после чего становится известным их произведение. Необходимо за минимальное количество проб найти  $k$  чисел, равных 1.

Обозначим такое количество  $C_m^k(n)$ . Покажем, что задача 1' сводится к задаче 1. Действительно, если включать  $x_i$  в каждую комбинацию из  $k$  чисел, то решение можно получить только тогда, когда будем уверены, что остальные  $k - 1$  чисел состоят из единиц. Тогда произведение всех  $k$  чисел равно  $x_i$ . Таким образом, эта задача сводится к задаче 1, если из множества  $\{X\}$  удалить  $x_i$  и комбинировать в нем по  $k - 1$  чисел. Самый худший случай будет тогда, когда  $x_i = 1$ , то есть в множестве  $\{X\}$  останутся  $m - 1$  единиц. Это означает, что  $C_m^k(n) = F_{m-1}^{k-1}(n - 1)$ , отсюда и видно, что достаточно изучать решения только задачи 1, то есть функцию  $F_m^k(n)$ . Очевидно, что  $F_m^m(n) = C_n^m$ , потому что набор из единиц единственный и для его поиска в худшем случае необходимо перебрать все комбинации. Принцип оптимальности для  $k = 2$ : необходимо все множество чисел разбить на столько групп, чтобы хотя бы в одной из них было не меньше двух единиц. Отсюда вытекает, что число групп должно быть  $m - 1$ .

Обозначим  $\lambda \equiv n \pmod{m - 1}$ .

**Лемма 1.** *Справедливо равенство*

$$F_3^2(n) = \frac{n(n - 2) + \lambda}{4}. \quad (1)$$

Пусть  $\lambda \equiv n \equiv 0 \pmod{2}$ . Тогда  $n$  разбивается на две одинаковые группы из  $n/2$  чисел, и

$$F_3^2(n) = C_{n/2}^2 + C_{n/2}^2 = 2 \cdot \frac{(n/2)(n/2 - 1)}{2} = \frac{n(n - 2)}{4}.$$

Если  $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$ , то  $n$  разбивается на два разных числа  $d(n + 1)/2$  и  $d(n - 1)/2$ . Тогда

$$F_3^2(n) = C_{\frac{n+1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \right) = \left( \frac{n-1}{2} \right)^2.$$

Можно записать общую формулу

$$F_3^2(n) = \frac{(n - \lambda)(n - 2 + \lambda)}{4} = \frac{n(n - 2) + 2\lambda - \lambda^2}{4}.$$

Учитывая, что  $\lambda^2 \equiv \lambda \pmod{2}$ , получаем формулу (1).

**Лемма 2.** При делении  $n$  на  $m - 1$  группу получаем разбиение

$$n = (m - 1 - \lambda) \left( \frac{n - \lambda}{m - 1} \right) + \lambda \left( \frac{n - \lambda}{m - 1} + 1 \right). \quad (2)$$

При делении числа  $n$  на  $q$  получаем остаток  $n(\bmod q)$ . Следовательно,  $n = q \left[ \frac{n}{q} \right] + n(\bmod q)$ . Запишем  $q = [q - n(\bmod q)] + n(\bmod q)$ , откуда  $n = [q - n(\bmod q)] \left[ \frac{n}{q} \right] + n(\bmod q) \left( \left[ \frac{n}{q} \right] + 1 \right)$ . Подставляя сюда  $q = m - 1$  и  $\left[ \frac{n}{m - 1} \right] = \frac{n - \lambda}{m - 1}$ , получим искомую формулу (2).

Отсюда легко вывести общую формулу

$$n = \sum_{i=0}^{q-1} \left[ \frac{n+i}{q} \right]. \quad (3)$$

Теперь можно доказать основную теорему.

**Теорема.** Справедливо равенство

$$F_m^2(n) = \frac{(n - \lambda)(n + \lambda - m + 1)}{2(m - 1)}. \quad (4)$$

Для доказательства воспользуемся результатами леммы 2 о разбиении множества чисел на  $m - 1$  группу

$$\begin{aligned} F_m^2(n) &= (m - 1 - \lambda) C_{\frac{n-\lambda}{m-1}}^2 + \lambda C_{\frac{n-\lambda}{2}+1}^2 = \\ &= \frac{m - 1 - \lambda}{2} \left( \frac{n - \lambda}{m - 1} \right) \left( \frac{n - \lambda}{m - 1} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{n - \lambda}{m - \lambda} + 1 \right) \left( \frac{n - \lambda}{m - 1} \right), \end{aligned}$$

откуда после сокращений получаем (4).



## О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций $k$ -значной логики

О. С. Дудакова

olga.dudakova@gmail.com

Франко-русский центр им. А. М. Ляпунова

Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Известно, что при  $k \leq 7$  все предполные классы функций  $k$ -значной логики являются конечно-порожденными [1], а начиная с  $k = 8$  существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [2]; полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В работах автора [3, 4, 5, 6] получены критерии конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два, а также условия существования конечных порождающих систем для ряда других семейств классов монотонных функций. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Пусть  $\preceq$  — частичный порядок на множестве  $E_k = \{1, 2, \dots, k\}$ . Положим  $\mathcal{P} = (E_k, \preceq)$ . Будем считать, что множество  $\mathcal{P}$  имеет наименьший и наибольший элементы. Через  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  будем обозначать класс всех монотонных функций над  $\mathcal{P}$  (отметим, что класс  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  является предполным [7]).

Функцию  $\lambda(x_0, x_1, \dots, x_k)$  будем называть *функцией выбора*, если для каждого набора  $(i, a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$  выполняется равенство

$$\lambda(i, a_1, \dots, a_k) = a_i.$$

Легко видеть, что если замкнутый класс функций  $k$ -значной логики содержит функцию выбора, то он является конечно-порожденным. Отметим также, что если  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну цепь длины 2, то  $\lambda(x_0, x_1, \dots, x_k) \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ .

Положим

$$\mathcal{P}_{\lambda} = \{(a, b_1, \dots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{если } i \preceq j, \text{ то } b_i \preceq b_j\}.$$

Легко видеть, что функция  $\lambda$  монотонна на множестве  $\mathcal{P}_\lambda$ . Назовем *монотонной функцией выбора* функцию  $\nu(x_0, x_1, \dots, x_k)$  из  $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ , совпадающую на множестве  $\mathcal{P}_\lambda$  с функцией  $\lambda(x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Нетрудно показать, что если класс  $\mathcal{M}_\mathcal{P}$  содержит монотонную функцию выбора, то он является конечно-порожденным.

Пусть  $a_1, a_2 \in \mathcal{P}$ . Элемент  $b \in \mathcal{P}$  называется *точной верхней гранью* элементов  $a_1, a_2$  (обозначение  $\sup(a_1, a_2)$ ), если выполняются неравенства  $b \succcurlyeq a_1$  и  $b \succcurlyeq a_2$  и для любого элемента  $c$ , такого, что  $c \succcurlyeq a_1$  и  $c \succcurlyeq a_2$ , выполняется неравенство  $c \succcurlyeq b$ . Аналогичным образом определяется *точная нижняя грань* элементов  $a_1$  и  $a_2$  (обозначение  $\inf(a_1, a_2)$ ). Через  $|\mathcal{P}|$  будем обозначать число элементов множества  $\mathcal{P}$ . Положим  $w_\mathcal{P} = \max |J|$ , где максимум берется по всем антицепям  $J$  множества  $\mathcal{P}$ ; величину  $w_\mathcal{P}$  будем называть *шириной* множества  $\mathcal{P}$ .

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное множество ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. Класс  $\mathcal{M}_\mathcal{P}$  содержит монотонную функцию выбора тогда и только тогда, когда для любых элементов  $a, b \in \mathcal{P}$  множество  $\mathcal{P}$  содержит по крайней мере один из элементов  $\sup(a, b)$ ,  $\inf(a, b)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der  $k$ -wertigen Logik // Z. Math Log. und Grundle. Math. — 1978. — 24. — S. 79–96.
- [2] Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — 3. — P. 211–218.
- [3] Дудакова О. С. О классах функций  $k$ -значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.

- [4] Дудакова О. С. О конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций в  $P_k$  // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 65–71.
- [5] Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций девятизначной логики // Мат-лы XVIII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2009. — С. 38–41.
- [6] Дудакова О. С. О классах функций  $k$ -значной логики, монотонных относительно множеств ширины три // Мат-лы X Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2010. — С. 178–180.
- [7] Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — М.: Наука. — 1960. — Т. 3. — С. 49–60.

### Задачи теории интерполяции, возникающие в алгебраическом подходе к распознаванию

*А. Г. Дьяконов*

`djakonov@mail.ru`

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Алгебраический подход к решению задач распознавания (образов) был предложен акад. РАН Ю. И. Журавлёвым в 1970-х гг. [1]. Над алгоритмами специальным образом вводились операции, и корректный алгоритм (который не делает ошибок на контрольной выборке) предлагалось искать в виде алгебраического выражения. Затем было показано [2], что многие проблемы описания и анализа алгебраических замыканий (выражений специального вида над алгоритмами конкретной модели) сводятся к задачам интерполяции. В этом докладе рассмотрена задача представления функции, заданной на конечном множестве, в виде суммы функций от меньшего числа переменных. Получены критерии такого представления, показана связь с классическими результатами алгебраического подхода и теории интерполяции.

### Алгебраический подход к распознаванию

Подход основан на том факте, что любой алгоритм классификации  $q$  объектов на  $l$  классов может быть представлен в виде суперпозиции распознающего оператора  $B$  и решающего правила  $C$  [3]. Распознающий оператор  $B$  получает  $q \times l$ -матрицу  $\Gamma[B]$ ,  $ij$ -й элемент которой является оценкой принадлежности объекта  $S_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ , к классу  $K_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ . Решающее правило по этой матрице классифицирует (контрольные) объекты  $S_1, \dots, S_q$  (например, просто сравнивая каждую оценку с порогом).

При фиксированном решающем правиле операции над алгоритмами (операторами) индуцируются операциями над их матрицами оценок:

$$\begin{aligned}\Gamma[B_1 + B_2] &= \Gamma[B_1] + \Gamma[B_2], \\ \Gamma[cB] &= c\Gamma[B], \quad \Gamma[B_1 \cdot B_2] = \Gamma[B_1] \circ \Gamma[B_2],\end{aligned}$$

умножение  $\circ$  поэлементное. Для модели алгоритмов, которая характеризуется фиксированным множеством  $B^*$  распознающих операторов (этой модели), вводится понятие алгебраического замыкания  $k$ -й степени  $\mathbb{U}^k(B^*)$  – множества всех полиномов степени не выше  $k$  над операторами модели. Центральным результатом алгебраического подхода – корректность алгебраических замыканий  $\mathbb{U}^\infty(B^*)$  «естественных» моделей при необременительных ограничениях на постановку задачи распознавания (последнее формализуется термином «регулярная задача», см. [1]). Под корректностью понимается возможность получить любую классификацию объектов  $S_1, \dots, S_q$  (что для большинства моделей эквивалентно возможности получить произвольную  $q \times l$ -матрицу оценок). Ниже будем считать, что мы рассматриваем одну из таких моделей  $B^*$  (это может быть модель алгоритмов вычисления оценок [3], потенциальных функций, двуслойных нейронных сетей и т. д. [4]).

#### $k$ -сингулярные системы точек

Рассмотрим систему точек  $D = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^s$ ,  $s \geq 2$ , заданную  $s \times s$ -матрицей попарных расстояний  $P_D$ . Пусть  $\mathbb{U}^k[D]$  – множество всех полиномов над столбцами матрицы  $P_D$  степени не выше  $k$  (умножение поэлементное).

**Определение 1.** Система точек  $D$  называется  $k$ -сингулярной, если размерность пространства  $\mathbb{U}^k[D]$  меньше  $q$ .

**Теорема 1.** Для любой регулярной задачи распознавания и модели алгоритмов  $B^*$  существует система точек  $D$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с  $l_1$ -метрикой (или метрикой Хэмминга), которая для всех натуральных  $k$  не является  $k$ -сингулярной тогда и только тогда, когда алгебраическое замыкание  $k$ -й степени  $\mathbb{U}^k(B^*)$  корректно. При этом  $\mathbb{U}^k[D]$  точно описывает пространство матриц оценок операторов из  $\mathbb{U}^k(B^*)$ .

В простейшем случае (задача распознавания с двумя непересекающимися классами, см. [5]) система  $D$  совпадает с контрольными объектами  $S_1, \dots, S_q$  задачи распознавания, а каждый из двух столбцов матрицы оценок любого оператора замыкания  $\mathbb{U}^k(B^*)$  является элементом множества  $\mathbb{U}^k[D]$ . В общем случае точек ровно  $ql$ , а множество  $\mathbb{U}^k[D]$  состоит из матриц оценок операторов замыкания  $\mathbb{U}^k(B^*)$ , записанных в векторной форме. Теорема справедлива для целого класса метрик,  $l_1$ -метрика и метрика Хэмминга являются лишь его простейшими представителями.

Следующая теорема показывает связь  $k$ -сингулярности с представлениями функции в определённом виде.

**Теорема 2.** Система точек  $D \subset \mathbb{R}^n$  не является  $k$ -сингулярной при  $k \leq n$  тогда и только тогда, когда любая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на точках системы  $D$  может быть представлена в виде конечной суммы

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \quad (1)$$

функций, каждая из которых зависит от  $k$  переменных.

К. В. Рудаковым [6] было доказано (в другой терминологии), что любая система попарно различных точек не является  $k$ -сингулярной при  $k \geq \lceil \log_2 |D| \rceil$ , где  $\lceil x \rceil$  — наибольшее целое число, не превосходящее числа  $x$ . Отсюда следует оценка на  $k$  при представлении (1). Интересно, что в теории интерполяции задачи представления функций достаточно часто сводятся к исследованию  $k$ -сингулярности. Например, в классе радиальных базисных функций (RBF) [7] или жёстких функций (riddle functions) [8].

Пусть функция  $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  обращается в ноль вне элементов множества  $X = \times_{t=1}^n \{a_t, b_t\}$ , а в точках  $(c_1, \dots, c_n)$  этого множества равна  $(-1)^c$ , где  $c = |\{t \in \{1, \dots, n\} \mid c_t = a_t\}|$ . Назовём такую функцию размеченным параллелепипедом размерности  $r = |\{t \in \{1, \dots, n\} \mid a_t \neq b_t\}|$ .

**Теорема 3.** Существует функция на  $D \subset \mathbb{R}^n$ , которая не представима в виде (1), тогда и только тогда, когда найдётся непустая подсистема системы точек  $D$ , которая является носителем (множеством наборов, на которых функция отлична от нуля) суммы конечного числа размеченных параллелепипедов размерности  $k + 1$ .

Этот критерий следует из критерия  $k$ -сингулярности [5] и является обобщением критерия 1-сингулярности Л. Рида и К. Сана [8]. В теории распознавания он означает, что все «плохие» задачи для алгебраических замыканий (в которых рассматриваемое замыкание некорректно) являются «линейными комбинациями» задач типа ХОР (точки булева куба с чётными весами лежат в одном классе, а с нечётными — в другом).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-07-00609-а, и гранта Президента РФ, проект МД-757.2011.9.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Журавлёв Ю. И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II // Кибернетика. — 1977. — № 6. — С. 21–27.
- [2] Дьяконов А. Г. Критерии корректности алгебраических замыканий модели алгоритмов вычисления оценок // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 420, № 6. — С. 732–735.
- [3] Журавлёв Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. Вып. 33. — 1978. — С. 5–68.
- [4] Воронцов К. В. Курс лекций «Математические методы обучения по прецедентам». URL: <http://www.ccas.ru/voron>, <http://www.machinelearning.ru>
- [5] Карпович П. А., Дьяконов А. Г. Критерий  $k$ -сингулярности систем точек в алгебраическом подходе к распознаванию // 14-я Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов»: Сборник докладов. — Москва: Макс Пресс, 2009. — С. 41–44.
- [6] Рудаков К. В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. — М.: Наука, 1989. — Вып. 1. — С. 176–201.
- [7] Baxter B. J. C. Conditionally positive functions and  $p$ -norm distance matrices // Constr. Approx. — 1991. — № 7. — P. 427–440.

- [8] *Reid L., Sun X.* Distance matrices and ridge function interpolation // *Constr. Approx.* — 1993. — V. 45. — P. 1313–1323.

### Символьные алгоритмы решения булевых уравнений в применении к исследованию дискретных моделей генных сетей

*А. А. Евдокимов, С. Е. Кочемазов, И. В. Отпущенников,  
А. А. Семенов*

evdok@math.nsc.ru, veinamond@gmail.com, otilya@yandex.ru,  
biclop@rambler.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
Институт динамики систем и теории управления, Иркутск.

При помощи дискретно-автоматных отображений можно описывать функционирование или эволюцию различных систем, например, дискретных моделей генных сетей. Генная сеть представляет собой совокупность активных элементов клетки, соединенных между собой различными видами обратной связи [1].

В работе предлагается обобщенная дискретная модель генной сети, в которой учитываются возможности саморегуляции вершин, различные типы обратной связи и возможность преобладания одних видов регуляции над другими. Также рассматривается сведение некоторых задач, связанных с предложенной моделью, к задачам поиска решений булевых уравнений. Идейно предлагаемая модель и методы её исследования близки к описанным в [2, 3].

Обобщенная дискретная модель и соответствующие методы были использованы для исследования регуляторных контуров генных сетей, подобных сети бактерии *E. Coli* [1]. Были найдены неподвижные точки и циклы соответствующих дискретно-автоматных отображений. Для сведения рассматриваемых задач к булевым уравнениям использовался специализированный транслятор алгоритмов, вычисляющих дискретные функции.

В [1] приведены примеры задания генных сетей при помощи раскрашенных графов. Вершины таких графов соответствуют элементам клетки, дуги интерпретируют связи между этими элементами. Раскраска вершин указывает на некоторый вид саморегуляции, а

раскраска дуг — на характер обратной связи между весовыми функциями соединяемых вершин. В предлагаемой нами обобщенной модели генная сеть задается матрицей  $n \times n$  ( $n$  — число вершин в графе). На ее главной диагонали находятся целые неотрицательные числа, интерпретирующие раскраску вершин. При этом подразумевается, что красная вершина ингибирует сама себя, зеленая активировывает сама себя, коричневая вершина в зависимости от ситуаций может вести себя либо как зеленая, либо как красная, черная вершина себя не регулирует. Для матрицы смежности:

1. Если вершина с номером  $i \in 1, \dots, n$  зеленая, то  $a_{ii} = 1$ ,
2. Если вершина с номером  $i \in 1, \dots, n$  красная, то  $a_{ii} = 2$ ,
3. Если вершина с номером  $i \in 1, \dots, n$  коричневая, то  $a_{ii} = 3$ ,
4. Если вершина с номером  $i \in 1, \dots, n$  черная, то  $a_{ii} = 0$ .

Аналогичным образом интерпретируется раскраска дуг:

1. Если  $a_{12} = 1$ , то из первой вершины во вторую ведет дуга зеленого цвета,
2. Если  $a_{12} = 2$ , то из первой вершины во вторую ведет дуга красного цвета,
3. Если  $a_{12} = 3$ , то из первой вершины во вторую ведет дуга коричневого цвета,
4. Черных дуг не бывает;  $a_{12} = 0$  означает, что дуги из первой вершины во вторую нет.

Значение веса в каждой вершине определяется функцией от весов вершин, дуги из которых входят в рассматриваемую вершину, и от цвета этих дуг.

Пусть  $x_j$ ,  $j \in 1, \dots, n$  — вес  $j$ -й вершины сети;  $X_j$  — множество вершин сети, дуги из которых входят в  $j$ -ю вершину,  $p$  — значность. Каждой вершине сети с номером  $j \in 1, \dots, n$  сопоставляем функции  $\delta_j(x_i)$  по всем  $x_i \in X_j$ , которые помогают учесть зависимость веса вершины от цветов дуг, входящих в нее:

$$\delta_j(x_i) = \begin{cases} x_i, & a_{ij} = 1 \vee (a_{ij} = 3) \& (x_i \geq \frac{p}{2}), \\ -x_i, & a_{ij} = 2 \vee (a_{ij} = 3) \& (x_i < \frac{p}{2}), \\ 0, & a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Смысл данной функции в том, что вес  $i$ -й вершины при пересчете веса вершины с номером  $j$  (существует дуга из  $i$  в  $j$ ) учитывается со



знаком  $+$ , если данная дуга зеленая, со знаком  $-$ , если она красная, а в случае коричневой дуги возможен один из этих двух вариантов в зависимости от значения веса  $i$ -й вершины (если вес меньше  $\frac{p}{2}$ , то считаем, что  $i$ -я вершина ингибирует  $j$ -ю, если же  $x_i \geq \frac{p}{2}$ , считаем, что  $i$ -я вершина активизирует  $j$ ). Функция пересчета весов вершин задается следующим образом:

$$x'_j = \begin{cases} x_j + 1, & \left( \sum_{x_i \in X_j} \delta_j(x_i) > 0 \right) \& (x_j < p - 1), \\ x_j - 1, & \left( \sum_{x_i \in X_j} \delta_j(x_i) < 0 \right) \& (x_j > 0), \\ x_j, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Задача поиска неподвижных точек отображений, заданных регуляторными контурами генных сетей описанного выше типа (1), транслировалась в SAT-задачи (при разных значениях параметра  $p$ ) при помощи программного комплекса «Transalg» [4]. Для генных сетей на 100 и более вершинах удавалось находить неподвижные точки в среднем менее чем за одну минуту работы sat-решателя minisat2.0 [5] (при значениях параметра  $p \in \{32, 64\}$ ).

Описанный в работе подход позволяет находить циклы (длины более 1) дискретных отображений, заданных различными моделями генных сетей. Для отображений, рассмотренных в [2], в тестовых экспериментах, проводимых на графах сетей со случайной структурой, были решены задачи поиска циклов длины от 2 до 10 при значности сети (параметр  $p$ ) от 8 до 32. Использовались графы от 50 до 100 вершин. Среднее время поиска циклов не превосходило 10 минут (обычный ноутбук).

Для обобщенной модели (с раскрасками вершин и дуг) задачи поиска циклов оказываются существенно более сложными. На данном этапе за приемлемое время удавалось находить циклы длиной 10 для сетей на 30 вершинах (с различными значениями параметра  $p$ ).

В заключение отметим перспективность рассмотренного в работе подхода в применении к решению задач исследования свойств дискретно-автоматных отображений комбинаторной природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00997, 09-01-00070, 11-07-00377) и целевой программы СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 119).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Системная компьютерная биология / Под ред. Н. А. Колчанова, С. С. Гончарова, В. А. Лихошвая, В. А. Иванисенко. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
- [2] Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генов сетей // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. — 2005. — № 14. — С. 206–212.
- [3] Евдокимов А. А., Кочемазов С. Е., Семенов А. А. Применение символьных алгоритмов к исследованию дискретных моделей некоторых классов генов сетей // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 30–47.
- [4] Отпущенников И. В., Семенов А. А. Инструментальное средство трансляции алгоритмов вычисления дискретных функций в выражения исчисления высказываний Transalg 1.0. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611151 (03.02.2011).
- [5] MiniSat <http://minisat.se/MiniSat.html>

### Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети

А. А. Евдокимов, А. Л. Пережогин

evdok@math.nsc.ru, pereal@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть даны  $n \geq 3$ ,  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$  и ориентированный граф  $G_{n;d_1,d_2,\dots,d_k}$  с множеством вершин  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  и множеством дуг  $\{\vec{ij} \mid j - i \equiv d_r \pmod{n}, r = 1, 2, \dots, k\}$ , матрица смежности которого является циркулянтном.

Определим рассматриваемую конечную динамическую систему. В каждый момент времени вершины циркулянта  $G_{n;d_1,d_2,\dots,d_k}$  помечены элементами  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  из конечного поля  $F_q$  порядка  $q$ .

Набор  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in F_q^n$  называется состоянием системы. В каждый момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением  $A_{f,q} : F_q^n \rightarrow F_q^n$ , где  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ , и новая метка каждой вершины  $i$  является значением функции  $f_i : F_q^k \rightarrow F_q$ , аргументы которой принимают значения старых меток тех вершин, дуги из которых входят в вершину  $i$ .

Функциональным графом  $G_{f,q}$  назовём ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из  $F_q^n$ , причём дуга из вершины  $\tilde{v}$  идет в вершину  $\tilde{u}$  тогда и только тогда, когда  $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ . Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких (быть может, одной) компонент связности, каждая из которых содержит единственный контур, вершины которого являются корнями деревьев с дугами, ориентированными к корню [1].

Данная конечная динамическая система является моделью регуляторного контура геновой сети, функционирование которого определяется сменой его состояний и полностью характеризуется структурой функционального графа преобразования  $A_{f,q} : F_q^n \rightarrow F_q^n$ . Метки вершин характеризуют уровень концентрации веществ (гены, белки и др.), сопоставляемых этим вершинам [2, 3, 4, 5]. Заметим, что в отличие от [2], где функции в вершинах являются пороговыми, мы рассматриваем линейные функции. В нашем случае оказалось удобно использовать циклические коды и технику их порождения с помощью полиномов [4, 6, 7], что позволило полнее описать структуру функционального графа.

Далее полагаем, что линейные функции  $f_i$  равны между собой. Таким образом, везде далее если  $A_{f,q}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ , то

$$u_i = v_{(i-d_1) \bmod n} + v_{(i-d_2) \bmod n} + \dots + v_{(i-d_k) \bmod n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Линейное подпространство  $C$  векторного пространства  $F_q^n$  называется циклическим кодом длины  $n$  над  $F_q$ , если из условия  $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in C$  следует  $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_0) \in C$ . Каждому набору  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  из  $F_q^n$  поставим в соответствие многочлен  $v(x) = v_0 + v_1x + \dots + v_{n-1}x^{n-1}$  из кольца многочленов  $F_q[x]$  над полем  $F_q$ . Известно, что при таком соответствии действие отображения

$A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ , определяемое линейной рекуррентностью (1), можно записать в следующем виде

**Утверждение 1.**  $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$  тогда и только тогда, когда

$$v(x)(x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k}) \equiv u(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Теперь в качестве состояний системы будем рассматривать элементы фактор-кольца  $F_q[x]/(x^n - 1)$ , а изменение состояния определяется умножением в этом фактор-кольце на многочлен

$$A(x) = A_{d_1, d_2, \dots, d_k}(x) = x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k}.$$

Такую динамическую систему будем называть системой  $(n, q, A(x))$ .

Известно [6], что если  $C \subseteq F_q^n$  является циклическим кодом, то соответствующее ему подпространство (обозначать будем той же буквой  $C$ ) фактор-кольца  $F_q[x]/(x^n - 1)$  является идеалом. Порождающий многочлен  $g(x)$  этого идеала называют порождающим многочленом кода  $C$ . Тогда, если  $\deg g(x) = r$ , то  $C = \{g(x)f(x) \mid f(x) \in F_q[x], \deg f(x) < n - r\}$ . Многочлен  $h(x)$ , заданный соотношением  $g(x)h(x) = x^n - 1$ , является проверочным многочленом циклического кода  $C$ . Таким образом,  $c(x) \in C$  тогда и только тогда, когда  $c(x)h(x) = 0$  в  $F_q[x]/(x^n - 1)$ .

Пусть  $\gcd(A(x), x^n - 1) \neq 1$ . Рассмотрим последовательность таких циклических кодов  $C_0 = F_q[x]/(x^n - 1), C_1, \dots, C_t$ , что код  $C_i$  имеет порождающий и проверочный многочлены  $g_i(x)$  и  $h_i(x)$  соответственно,  $i = 1, 2, \dots, t$ , где

$$g_1(x) = \gcd(A(x), x^n - 1), \quad h_1(x) = x^n - 1/g_1(x),$$

$$g_i(x) = g_{i-1}(x) \gcd(g_{i-1}(x), h_{i-1}(x)), \quad h_i(x) = x^n - 1/g_i(x), \quad i = 2, 3, \dots, t,$$

и  $t$  – такое минимальное число, что  $\gcd(g_1(x), h_t(x)) = 1$ .

Пусть  $S_i = C_i \setminus C_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, t-1$  и  $S_t = C_t$ .

**Теорема 2.** В функциональном графе  $G_{f,q}$  вершины, принадлежащие контурам, образуют множество  $S_t$ . Множество вершин, принадлежащих деревьям, разбивается на  $t$  уровней  $S_0, S_1, \dots, S_{t-1}$ , таких, что  $S_0$  – множество листьев, а вершины из  $S_i$  находятся на расстоянии  $i$  от вершин из  $S_0$ ,  $1 \leq i \leq t-1$ .

**Следствие 1.** Пусть  $x^n - 1 = f_1^{m_1}(x)f_2^{m_2}(x)\dots f_s^{m_s}(x)$  – разложение в  $F_q[x]$  на неприводимые многочлены. Если для любого  $i = 1, 2, \dots, s$  многочлен  $f_i(x)$  делит  $A(x)$ , то функциональный граф  $G_{f,q}$  состоит из единственной компоненты связности, являющейся деревом с петлёй в корневой вершине  $(0, 0, \dots, 0)$ .

**Следствие 2.** Состояние  $g_t(x)$  принадлежит контуру наибольшей длины в функциональном графе  $G_{f,q}$ .

**Теорема 3.** Для любого целого положительного  $l$  все вершины функционального графа, принадлежащие контурам длины, делящей  $l$ , образуют циклический код с проверочным многочленом  $\gcd(A^l(x) - 1, x^n - 1)$ .

**Следствие 3.** Неподвижные точки функционального графа  $G_{f,q}$  образуют циклический код с проверочным многочленом  $\gcd(A(x) - 1, x^n - 1)$ . Если степень этого многочлена равна  $r$ , то число неподвижных точек равно  $q^r$ .

**Следствие 4.** Наибольшая длина контура в функциональном графе равна минимальному  $l$ , для которого  $\gcd(A^l(x) - 1, x^n - 1) = h_t(x)$ .

Для случая  $q = 2$ , то есть булева оператора  $A_{f,2}$ , справедлива

**Теорема 4.** Если наибольшая длина контура функционального графа системы  $(n, 2, A(x))$  равна  $l$  и  $h_t(x)$  является порождающим многочленом циклического кода, образованного вершинами всех контуров, то максимальная длина контура функционального графа системы  $(2n, 2, A(x))$  не изменится тогда и только тогда, когда  $h_t^2(x)$  делит  $A^l(x) - 1$ . В противном случае наибольшая длина контура удвоится.

**Следствие 5.** Если в системе  $(n, 2, A(x))$  наибольшая длина  $l$  контура чётна, то в системе  $(2n, 2, A(x))$  наибольшая длина контура равна  $2l$ .

Рассмотрим, например, систему  $(n, 2, x + 1)$ . Функциональный граф этой системы рассматривался в [8], а в случае  $n = 2^m$  – в [9].

**Теорема 5.** Для любого нечётного  $n$  наибольшая длина контура функционального графа системы  $(n, 2, 1 + x)$  является делителем числа  $2^r - 1$ , где  $r = \min\{j | j > 0, 2^j \equiv 1 \pmod{n}\}$ .

**Следствие 6.** При любых  $k \geq 2$ ,  $m \geq 0$  для  $n = 2^m(2^k - 1)$  наибольшая длина контура функционального графа системы  $(n, 2, 1 + x)$  равна  $n$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00997 и № 09-01-00070 и целевой программы СО РАН (Интеграционный проект № 119).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.
- [2] *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник ТГУ. — 2005. — № 14. — С. 206–212.
- [3] *Демиденко Г. В., Колманов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.
- [4] *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. — М.: Мир, 1982.
- [5] *Kauffman S. A.* At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity. — Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [6] *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
- [7] *Zierler N.* Linear recurring sequences // J. Soc. Ind. Appl. Math. — 1959. — V. 7, № 1. — P. 31–48.
- [8] *Арнольд В. И.* Топология и статистика формул арифметики // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 4. — С. 3–28.
- [9] *Merekin Yu. V.* On the computational complexity of the Arnold complexity of binary words // Asian-European J. of Mathematics. — 2009. — V. 2, № 4. — P. 641–648.

**Анализ чувствительности  
векторной инвестиционной булевой задачи  
с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа**

*В. А. Емеличев, В. В. Коротков*

emelichev@bsu.by, wladko@tut.by

Белорусский государственный университет, Минск

Рассмотрим векторный вариант задачи управления финансовыми инвестициями, основанный на классической портфельной теории Марковица [1]. Для этого введем следующие обозначения:  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  — активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т. п.);  $N_m$  — состояния рынка (ситуации);  $N_s$  — риски (финансовые, экологические, производственные и т. п.);  $R$  — трехиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера  $m \times n \times s$  с элементами  $r_{ijk}$  из  $\mathbf{R}$ ;  $r_{ijk}$  — величина риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив  $j \in N_n$  по критерию (виду риска)  $k \in N_s$  в том случае, если бы рынок находился в состоянии  $i \in N_m$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$  — портфель инвестиций (активов), где  $\mathbf{E} = \{0, 1\}$ ,  $x_j = 1$ , если инвестор выбирает актив  $j$ , и  $x_j = 0$  в противном случае.

Наряду с трехиндексной матрицей рисков  $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$  будем использовать и ее двумерные сечения  $R_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $k \in N_s$ .

Пусть эффективность выбираемого портфеля (булева вектора)  $x \in X$ ,  $|X| \geq 2$ , оценивается векторной целевой функцией

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \dots, f_s(x, R_s)),$$

состоящей из минимаксных критериев риска (крайнего пессимизма) Сэвиджа [2]

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} R_{ik} x \rightarrow \min_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где  $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \dots, r_{ink})$  —  $i$ -я строка сечения  $R_k$ ,  $i \in N_m$ .

Под векторной ( $s$ -критериальной) задачей портфельной оптимизации  $Z^s(R)$ ,  $s \geq 1$ , с упорядоченными критериями Сэвиджа будем понимать задачу поиска множества лексикографических оптимумов, которое задается формулой

$$L^s(R) = \{x \in X : \nexists x' \in X (x \succ_R x')\},$$

где  $x \underset{R}{\succ} x'$  тогда и только тогда, когда существует такой индекс  $p \in N_s$ , что

$$p = \min\{k \in N_s : g_k(x, x', R_k) \neq 0\} \quad \& \quad g_p(x, x', R_p) > 0,$$

$$g_k(x, x', R_k) = f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k), \quad k \in N_s.$$

В этом контексте возникает вопрос: каков предельный уровень возмущений элементов матрицы рисков  $R$ , при которых не появляются новые лексикографические оптимумы задачи, т. е. каков радиус устойчивости задачи?

В пространстве портфелей  $\mathbf{R}^n$  зададим линейную метрику  $l_1$ , а в пространствах состояний  $\mathbf{R}^m$  и рисков  $\mathbf{R}^s$  — чебышевскую метрику  $l_\infty$ , т. е. полагаем, что

$$\|R_{ik}\|_1 = \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s,$$

$$\|R_k\| = \max_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, \quad k \in N_s,$$

$$\|R\| = \max_{k \in N_s} \|R_k\| = \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|.$$

Таким образом,  $\|R_{ik}\|_1 \leq \|R_k\| \leq \|R\|$  для любых индексов  $i \in N_m$  и  $k \in N_s$ . Кроме того, для всякого сечения  $R_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$  и любых портфелей  $x, x' \in X$  очевидны неравенства

$$R_{ik}x - R_{i'k}x' \geq -\|R_{ik}\|_1 - \|R_{i'k}\|_1 \geq -2\|R_k\|, \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s. \quad (1)$$

Радиусом устойчивости задачи  $Z^s(R)$ ,  $s \geq 1$ , как обычно (см., например, [3]), назовем число

$$\rho = \rho(n, m, s) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall R' \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^s(R + R') \subseteq L^s(R))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|R'\| < \varepsilon\}.$$



Обозначим

$$\varphi = \varphi(n, m, s) = \min_{x \notin L^s(R)} \max_{x' \in L^s(R)} \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x').$$

Очевидно, что  $\varphi \geq 0$ .

**Теорема.** Пусть  $X \neq L^s(R)$ . Для радиуса устойчивости  $\rho = \rho(n, m, s)$  векторной нетривиальной задачи  $Z^s(R)$ ,  $s \geq 1$ , справедливы оценки

$$\varphi(n, m, s)/2 \leq \rho \leq n\varphi(n, m, s).$$

*Доказательство.* Сначала убедимся в справедливости неравенства  $\rho \geq \varphi/2$ . Это неравенство очевидно, если  $\varphi = 0$ . Пусть  $\varphi > 0$  и пусть портфель  $x \notin L^s(R)$ . Тогда согласно определению числа  $\varphi$  существует такой портфель  $x^* \in L^s(R)$ , что  $\min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^*) \geq \varphi$ .

Отсюда и из (1) для любого сечения  $R'_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$  выводим

$$\begin{aligned} g_1(x, x^*, R_1 + R'_1) &= \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^* + R'_{i1}x - R'_{i'1}x^*) \geq \\ &\geq \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^*) - 2\|R'_1\| \geq \varphi - 2\|R'_1\|. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая  $R' \in \Omega(\varphi/2)$ , ввиду  $\|R'_1\| < \varphi/2$  получаем  $g_1(x, x^*, R_1 + R'_1) > 0$ . Следовательно, портфель  $x$  не является лексикографическим оптимумом задачи  $Z^s(R + R')$ . Резюмируя, заключаем, что портфель  $x \notin L^s(R + R')$  при  $x \notin L^s(R)$  и  $R' \in \Omega(\varphi/2)$ , т. е.  $\rho \geq \varphi/2$ .

Далее докажем неравенство  $\rho \leq n\varphi$ . Согласно определению числа  $\varphi$  существует такой портфель  $x^* \notin L^s(R)$ , что для любого портфеля  $x \in L^s(R)$  справедливо неравенство

$$g_1(x^*, x, R_1) \leq \varphi. \quad (2)$$

Теперь, полагая  $\varepsilon > n\varphi$ , элементы сечения  $R_1^0$  матрицы  $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$  зададим по правилу:  $r_{ij1}^0 = -\delta$ , если  $i \in N_m$ ,  $x_j^* = 1$ , и  $r_{ij1}^0 = \delta$ , если  $i \in N_m$ ,  $x_j^* = 0$ , где  $\varphi < \delta < \varepsilon/n$ . Все элементы остальных сечений  $R_k^0$ ,  $k \in N_s \setminus \{1\}$ , матрицы  $R^0$  положим равными нулю. Поэтому  $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$  и справедливы равенства  $\|R^0\| = \|R_1^0\| = \|R_{i1}^0\|_1 = n\delta$ ,  $i \in N_m$ . Кроме того, все строки  $R_{i1}^0$ ,  $i \in N_m$ , сечения

$R_1^0$  одинаковы. Обозначив такую строку через  $B$  (зависит лишь от  $x^*$ ), имеем

$$B(x^* - x) = -\delta \|x^* - x\|_1 \leq -\delta < -\varphi.$$

Отсюда и из (2) выводим, что для любого портфеля  $x \in L^s(R)$  справедливо неравенство  $g_1(x^*, x, R_1 + R_1^0) < 0$ . Поэтому  $L^s(R) \cap L^s(R + R^0) = \emptyset$ , а значит, для любого числа  $\varepsilon > n\varphi$  существует такая матрица  $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$ , что  $L^s(R + R^0) \not\subseteq L^s(R)$ , т. е.  $\rho \leq n\varphi$ . ■

Нетрудно доказать, что полученные оценки достижимы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Markowitz H. M.* Portfolio selection: efficient diversification of investments. — New York: Blackwell Publ., 1991.
- [2] *Savage L. J.* The foundations of statistics. — Oxford: Dover Publ., 1972.
- [3] *Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.* О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 82–89.

### Применение оптимизационных алгоритмов для одного класса обратных задач атмосферного электричества

А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин

Artem.Zhidkov@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В настоящее время одной из наиболее актуальных задач атмосферного электричества является моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. Глобальная электрическая цепь формируется за счёт некоторых электрических генераторов, которые, как экспериментально установлено, поддерживают относительно постоянную разность потенциалов между поверхностью Землёй и верхними слоями атмосферы [1, 2]. В настоящее время наиболее состоявшейся является концепция о генерации глобальной электрической цепи за счёт грозových образований (грозových облаков).

Известно [3, 4], что задача исследования глобальной электрической цепи сводится к решению неклассического уравнения третьего

порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi(x, t) + 4\pi \operatorname{div} (\sigma(x, t) \operatorname{grad} \varphi(x, t)) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{CT}}(x, t), \quad (1)$$

где  $\varphi(x, t)$  — скалярный потенциал электрического поля,  $\sigma(x, t)$  — проводимость атмосферы,  $\mathbf{J}^{\text{CT}}(x, t)$  — объёмная плотность «сторонних» электрических токов, протекающих в грозовых образованиях. Предполагается, что пространственная переменная лежит в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , диффеоморфной шаровому слою с гладкой границей  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — две компоненты связности границы, определяющие поверхность Земли и верхние слои атмосферы соответственно.

При решении прямых задач заданными считаются функции  $\sigma(x, t)$  и  $\mathbf{J}^{\text{CT}}(x, t)$ , а неизвестной —  $\varphi(x, t)$ .

В настоящей работе уравнение (1) дополняется граничными и начальными условиями

$$\varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_1} = C(t), \quad \varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_2} = 0, \quad (2)$$

$$\int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + 4\pi \sigma(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - 4\pi J_n^{\text{CT}}(x, t) \right) dS = 0, \quad (3)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (4)$$

Граничные условия (2) представляют собой равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля и являются естественными с физической точки зрения, если принять во внимание, что проводимость Земли существенно превышает проводимость приземных слоёв атмосферы, а также, что при удалении от поверхности Земли наблюдается экспоненциальный рост проводимости. В рассматриваемой постановке задачи, функция  $C(t)$  также является неизвестной, подлежащей определению в процессе решения.

Условие (3) представляет собой условие сохранения заряда на верхней границе.

Исследованию корректности задачи (1)–(4) посвящены работы авторов [5, 4], в которых также обсуждаются некоторые алгоритмы численного решения и проводятся результаты расчётов.

Достаточно часто возникает необходимость определения различных характеристик «сторонних» электрических токов по результатам измерений электромагнитного поля. Настоящая работа посвящена изучению одного класса обратных задач граничного наблюдения.

Пусть необходимо определить  $\operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{CT}}$  и  $\int_{\Gamma_2} J_n(x, t) dS$  в задаче (1)–(4), если дополнительно известна нормальная составляющая электрического поля на границе  $\Gamma_1$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{x \in \Gamma_1} = e_n(x, t). \quad (5)$$

Условие (5) может быть получено, например, в результате эксперимента.

**Теорема.** Пусть  $\mathbf{J}^{\text{CT}} \in \{H^1(\Omega \times [0, T])\}^3$ ,  $\sigma \in L_\infty(\Omega \times [0, T])$ . Тогда  $\varphi \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и существует линейный ограниченный оператор решения задачи (1)–(4)

$$A : L_2(\Omega \times [0, T]) \times \mathbb{R} \rightarrow L_2(\Gamma_1 \times [0, T]),$$

$$A \left( \operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{CT}}, \int_{\Gamma_2} J_n^{\text{CT}} dS \right) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{x \in \Gamma_1}.$$

Данная теорема позволяет свести задачу (1)–(5) к решению следующей абстрактной задачи минимизации:

$$\|z\|^2 \rightarrow \min, \quad Az = u, \quad z \in Z, u \in U, \quad (6)$$

где  $Z = L_2(\Omega \times [0, T]) \times \mathbb{R}$ ,  $U = L_2(\Gamma_1 \times [0, T])$ .

Однако при решении реальных задач, результаты измерений известны с некоторой погрешностью, поэтому, задача (6) может быть переписана в возмущённой форме

$$\|z\|^2 \rightarrow \min, \quad A_h z = u_\delta, \quad (7)$$

$$\|A_h - A\| \leq h, \quad \|u_\delta - u\| \leq \delta.$$

Для решения задачи (7) используется алгоритм двойственной регуляризации (в основе которого лежит итерационный алгоритм Удзавы) [6, 7]. Показано, что при согласованном уменьшении ошибки задания исходных данных  $h, \delta$  с параметром регуляризации, решение

возмущённой задачи (7) сходится к решению исходной оптимизационной задачи (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (шифр проекта НК-13П-13).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Hays P. B., Roble R. G.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere // *J. of Geophysical Research.* — 1979. — Vol. 84, No A7. — P. 3291–3305.
- [2] *Roble R. G., Hays P. B.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 2. Electrical coupling between the upper and lower atmosphere // *J. of Geophysical Research* — 1979. — Vol 84, No A12. — P. 7247–7256.
- [3] *Морозов В. Н.* Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью // *Прикладная метеорология.* — 2006. — № 5 (777). — С. 51–67.
- [4] *Жидков А. А., Калинин А. В.* Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере // *Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.* — 2009. — № 6. — С. 150–158.
- [5] *Жидков А. А., Калинин А. В.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // *Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.* — 2009. — № 4. — С. 123–129.
- [6] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* — 2004. — Т. 44, — № 11. — С. 2001–2019.
- [7] *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 602–625.

## О свойствах деревьев вывода для стохастической КС-грамматики, имеющей вид «цепочки»

Л. П. Жильцова, И. М. Мартынов

larzhil@rambler.ru, murbidodrus@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Исследуются свойства деревьев вывода высоты  $t$  при  $t \rightarrow \infty$  для стохастической КС-грамматики с разложимой матрицей  $A$  первых моментов специального вида. Рассматривается критический случай, когда перронов корень матрицы  $A$  равен 1.

Стохастической КС-грамматикой называется система  $G = \langle V_T, V_N, R, s \rangle$ , где  $V_T$  и  $V_N$  — конечные алфавиты терминальных и нетерминальных символов (терминалов и нетерминалов) соответственно,  $s \in V_N$  — аксиома,  $R = \cup_{i=1}^k R_i$ , где  $k$  — мощность алфавита  $V_N$  и  $R_i$  — множество правил с одинаковой левой частью  $A_i$ . Каждое правило  $r_{ij}$  из  $R_i$  имеет вид

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}, \quad j = 1, \dots, n_i,$$

где  $A_i \in V_N$ ,  $\beta_{ij} \in (V_T \cup V_N)^*$  и  $p_{ij}$  — вероятность применения правила  $r_{ij}$ , причем  $0 < p_{ij} \leq 1$  и  $\sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1$ .

Применение правила грамматики к слову состоит в замене вхождения нетерминала из левой части правила на слово, стоящее в его правой части.

Каждому слову  $\alpha$  КС-языка соответствует последовательность правил грамматики (вывод), с помощью которой  $\alpha$  выводится из аксиомы  $s$ . Выводу слова соответствует дерево вывода [1], вероятность которого определяется как произведение вероятностей правил, образующих вывод.

По стохастической КС-грамматике строится матрица  $A$  первых моментов. Для нее элемент  $a_j^i$  определяется как  $\sum_{l=1}^{n_i} p_{il} s_{il}^j$ , где величина  $s_{il}^j$  равна числу нетерминальных символов  $A_j$  в правой части правила  $r_{il}$ . Перронов корень матрицы  $A$  обозначим через  $r$ .

Введем некоторые обозначения. Будем говорить, что нетерминал  $A_j$  непосредственно следует за нетерминалом  $A_i$  (и обозначать  $A_i \rightarrow A_j$ ), если в грамматике существует правило вида

$A_i \xrightarrow{p_{ij}} \alpha_1 A_j \alpha_2$ , где  $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_T \cup V_N)^*$ . Рефлексивное транзитивное замыкание отношения  $\rightarrow$  обозначим  $\rightarrow_*$ .

Классом нетерминалов назовем максимальное по включению подмножество  $K \subseteq V_N$  такое, что  $A_i \rightarrow_* A_j$  для любых  $A_i, A_j \in K$ . Для различных классов нетерминалов  $K_1$  и  $K_2$  будем говорить, что класс  $K_2$  непосредственно следует за классом  $K_1$  (и обозначать  $K_1 \prec K_2$ ), если существуют  $A_1 \in K_1$  и  $A_2 \in K_2$ , такие, что  $A_1 \rightarrow A_2$ . Рефлексивное транзитивное замыкание отношения  $\prec$  обозначим через  $\prec_*$ .

Пусть  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  — множество классов нетерминалов грамматики,  $m \geq 2$ . Будем полагать, что классы нетерминалов перенумерованы таким образом, что  $K_i \prec_* K_j$  тогда и только тогда, когда  $i < j$ .

Будем говорить, что грамматика имеет вид «цепочки», если ее матрица первых моментов  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Один класс нетерминалов представлен в матрице множеством подряд идущих строк и соответствующим множеством столбцов с теми же номерами. Для класса  $K_i$  квадратная подматрица, образованная соответствующими строками и столбцами, обозначается через  $A_{ii}$ . Подматрица  $A_{ij}$  является нулевой, если  $K_i \not\prec K_j$ . Блоки, расположенные ниже главной диагонали, нулевые в силу упорядоченности классов.

Для грамматики с матрицей первых моментов вида (1) классы нетерминалов образуют линейный порядок по отношению  $\prec$ :

$$K_1 \prec K_2 \prec \dots \prec K_i \prec \dots \prec K_m. \quad (2)$$

Для каждого класса  $K_i$  матрица  $A_{ii}$  неразложима. Без ограничения общности будем считать, что она строго положительна и непериодична. Обозначим через  $r_i$  перрон корень матрицы  $A_{ii}$ . Для неразложимой матрицы перрон корень является вещественным и простым [2]. Очевидно,  $r = \max_i \{r_i\}$ .

Пусть  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  — множество всех номеров  $i_j$  классов, для которых  $r_{i_j} = 1$ . Рассмотрим подцепочку классов

$$K_j \prec K_{j+1} \prec \dots \prec K_m. \quad (3)$$

Число классов с номерами из  $J$  в такой цепочке обозначим через  $q_j$ .

Через  $P_j(t)$  обозначим вероятность множества деревьев вывода высоты  $t$ , корень которых помечен нетерминалом  $A_j$ .

**Теорема 1.** При  $t \rightarrow \infty$

$$P_j(t) \sim U^{(j)} \cdot \frac{c_j}{t^{1+(\frac{1}{2})^{q_j-1}},$$

где  $c_j$  — некоторая положительная константа.

При  $r_j = 1$  вектор  $U^{(j)}$  является правым собственным вектором для матрицы  $A_{jj}$ , соответствующим  $r_j$ .

Обозначим через  $M_{ij}(t)$  математическое ожидание числа применений правила  $r_{ij}$  грамматики в дереве вывода высоты  $t$ , корень которого помечен аксиомой грамматики  $s = A_1$ .

**Теорема 2.** Пусть матрица первых моментов грамматики  $G$  имеет вид (1), и  $r_{ij}$  — правило грамматики, для которого  $A_i \in K_l$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$

$$M_{ij}(t) \sim d_i \cdot p_{ij} \cdot t^{(\frac{1}{2})^{q_i^* - 1}},$$

где  $q_l^* = q_l - 1$  при  $l \in J$  и  $q_l^* = q_l$  при  $l \notin J$ ;  $d_i > 0$  — некоторая константа, и  $p_{ij}$  — вероятность правила  $r_{ij}$ .

Таким образом, величина  $M_{ij}(t)$  определяется удаленностью класса  $K_l$ , которому принадлежит нетерминал  $A_i$  из левой части правила  $r_{ij}$ , от конца цепочки (2). Математическое ожидание  $M_{ij}(t)$  тем больше, чем меньше число классов с номерами из множества  $J$ , следующих за классом  $K_l$  в (3). Следовательно, чем дальше удален класс от начала цепочки (2), тем чаще применяются соответствующие ему правила грамматики. Для последнего класса в (2) с номером из  $J$  и всех последующих классов величины  $M_{ij}(t)$  соответствующих правил грамматики имеют порядок  $O(t^2)$ , как в случае неразложимой грамматики [3] и грамматики с двумя классами нетерминалов [4].



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ахо А. О., Ульман Дж.* Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. — М.: Мир, 1978.
- [2] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
- [3] *Жильцова Л. П.* Закономерности в деревьях вывода слов стохастического контекстно-свободного языка и нижняя оценка стоимости кодирования. Критический случай // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2003. — Т. 10, № 3. — С. 23–53.
- [4] *Борисов А. Е.* О свойствах слов языка, порожденного разложимой стохастической КС-грамматикой с двумя нетерминалами. Критический случай // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». — М.: Изд. мех-мат. ф-та МГУ, 2004. — С. 408–410.

**О некоторых алгоритмах минимизации,  
основанных на отсечении множеств**

*И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина*

IYaZabotin@mail.ru, ONSHUL@mail.ru

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Предлагается общая процедура решения задачи математического программирования, относящаяся к методам погружений–отсечений. Обсуждаются реализации процедуры и возможность ее использования, например, при решении вспомогательных задач в некоторых методах условной минимизации. Процедура опирается на идею последовательного погружения допустимого множества исходной задачи в некоторые выпуклые множества более простой структуры. Эта идея использована ранее в методе опорных множеств [1] и ряде других методов отсечений (например, [2, 3, 4, 5]). Предлагаемая процедура отличается от упомянутых методов, в частности, более широкими возможностями ее применения и способами построения на каждом шаге погружающих множеств.

Решается задача

$$\min \{g(x) \mid x \in G\}, \quad (1)$$

где  $G = G' \cap G''$ ,  $G' = \bigcap_{j \in J} G_j$ , множества  $G_j$ ,  $j \in J = \{1, \dots, m\}$ ,

и  $G''$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$  выпуклы и замкнуты, внутренность  $\text{int } G_j$  множества  $G_j$  для каждого  $j \in J$  непуста, а  $g(x)$  — непрерывная достигающая на  $G$  своего минимального значения функция. Сразу подчеркнем, что внутренность множества  $G$  может быть пустой, причем как за счет пустоты  $\text{int } G''$ , так и за счет пустоты  $\text{int } G'$ .

Пусть  $g^* = \min \{g(x) \mid x \in G\}$ ,  $Y^* = \{y \in G : g(x) = g^*\}$ ,  $W(x, G_j) = \{a \in R_n : \langle a, z - x \rangle \leq 0 \ \forall z \in G_j\}$  — конус обобщенно-опорных векторов для множества  $G_j$  в точке  $x \in R_n$ ,  $W^1(x, G_j) = \{a \in R_n : a \in W(x, G_j), \|a\| = 1\}$ ,  $E(g, \gamma) = \{x \in R_n : g(x) \leq \gamma\}$ ,  $\gamma \in R_1$ ,  $I = \{0, 1, \dots\}$ .

Предлагаемая процедура  $\pi = \pi(g(x), G)$  решения задачи (1) вырабатывает последовательность приближений  $y_i$ ,  $i \in I$ , и заключается в следующем. Строится выпуклое замкнутое множество  $M_0 \subset R_n$ , содержащее хотя бы одну точку множества  $Y^*$ . Выбираются точки  $y^j \in \text{int } G_j$  для всех  $j \in J$ , задается число  $q \in [1, +\infty)$ , находится точка  $y_0 \in M_0 \cap G'' \cap E(g, g^*)$ , полагается  $i = 0$ .

1. Формируется множество  $J_i = \{j \in J : y_i \notin G_j\}$ . Если

$$J_i = \emptyset, \quad (2)$$

то процесс заканчивается.

2. Для каждого  $j \in J_i$  в интервале  $(y^j, y_i)$  выбирается точка  $z_i^j \notin \text{int } G_j$  так, чтобы существовала точка  $\bar{y}_i^j \in G_j$ , удовлетворяющая неравенству

$$\|y_i - \bar{y}_i^j\| \leq q \|y_i - z_i^j\|. \quad (3)$$

Для всех  $j \in J \setminus J_i$  полагается  $z_i^j = \bar{y}_i^j = y_i$ .

3. Отыскивается номер  $j_i \in J_i$ , удовлетворяющий условию

$$\|y_i - z_i^{j_i}\| = \max_{j \in J_i} \|y_i - z_i^j\|. \quad (4)$$

4. Выбирается конечное множество  $A_i^{j_i} \subset W^1(z_i^{j_i}, G_{j_i})$  и полагается

$$M_{i+1} = M_i \cap \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^{j_i} \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^{j_i}\}. \quad (5)$$

5. Отыскивается очередное приближение

$$y_{i+1} \in M_{i+1} \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*), \quad (6)$$

и следует переход к п. 1 при  $i$ , увеличенном на единицу.

Если при некотором  $i \in I$  выполняется (2), то  $y_i \in Y^*$  и процесс завершается.

Если  $G'' = R_n$ ,  $G_1 = \dots = G_m = G' = G$ ,  $\text{int } G \neq \emptyset$ , функция  $g(x)$  выпукла,  $y^1 = \dots = y^m = y$ , и  $y \in \text{int } G$ , то процедура  $\pi$  близка к методу [1] для задачи выпуклого программирования.

В процедуре  $\pi$  можно положить  $M_0 = \bigcap_{j \in J'} G_j$ , где  $J' \subset J$ , в частности,  $M_0 = G_l$ , где  $l \in J$ . Такой способ выбора множества  $M_0$  удобен, например, когда  $\bigcap_{j \in J'} G_j$  – выпуклый многогранник, а множество

$G''$  задано системой линейных равенств или неравенств. В этом случае нет необходимости в задании точек  $y^j$ ,  $j \in J'$ . Кроме того, отметим, что при достижении функцией  $g(x)$  в  $R_n$  своего минимального значения можно положить  $M_0 = R_n$ ,  $y_0 = \arg \min \{g(x) \mid x \in R_n\}$ .

Сделаем также замечание, касающееся выбора точек  $z_i^j$ . В методе [1] для построения отсекающей гиперплоскости выбирается точка  $z_i$  пересечения отрезка  $[y, y_i]$  с границей множества  $G$ . В предложенной процедуре не нужно отыскивать точку пересечения отрезка  $[y^j, y_i]$ ,  $j \in J_i$ , с границей множества  $G_j$ . Для проверки условия (3) не требуется находить и точку  $\bar{y}_i^j$ . Например, если  $y_i + q(z_i^j - y_i) \in G_j$  или если  $y_i + q(z_i^j - y_i) \notin G_j$ , но  $\|y_i - y^j\| < q\|y_i - z_i^j\|$ , то условие (3) для  $z_i^j$  выполняется.

Если точки  $y_i$ ,  $i \in I$ , выбрать из условия

$$g(y_i) = \min \left\{ g(x) \mid x \in M_i \bigcap G'' \right\}, \quad (7)$$

то требуемое в процедуре включение

$$y_i \in M_i \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*) \quad (8)$$

выполняется при всех  $i \in I$ . Условие (8) позволяет, во-первых, решать задачу минимизации  $g(x)$  на множестве  $M_i \bigcap G''$  приближенно

и, во-вторых, дает возможность строить различные реализации процедуры. Отметим, что авторами предложены и обоснованы некоторые из таких реализаций.

Для обоснования сходимости процедуры с использованием условий (5), (6) и (3), (4), соответственно, доказаны

**Лемма 1.** Пусть последовательность  $\{y_i\}$ ,  $i \in I$ , построена процедурой  $\pi$  и  $\{y_i\}$ ,  $i \in I' \subset I$ , – ее сходящаяся подпоследовательность. Пусть номер  $l \in J$  таков, что множество  $I_l = \{i \in I' : l = j_i\}$  состоит из бесконечного числа элементов. Тогда справедливо равенство  $\lim_{i \in I_l} \|z_i^l - y_i\| = 0$ .

**Лемма 2.** Пусть последовательность  $\{y_i\}$ ,  $i \in I$ , построенная процедурой  $\pi$ , ограничена. Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству  $G$ .

На основе этих лемм и теоремы [6, с. 74] доказана

**Теорема 3.** Пусть последовательность  $\{y_i\}$ ,  $i \in I$ , построена процедурой  $\pi$  и является ограниченной. Тогда любая ее предельная точка принадлежит множеству  $Y^*$ , а если при этом для всех  $i \in I$  выполняется (7), то вся последовательность  $\{y_i\}$ ,  $i \in I$ , сходится к множеству  $Y^*$ .

Далее, процедуру  $\pi$  можно использовать для минимизации функции  $g(x)$  на множестве  $G$  с заданной точностью. Пусть в (1)  $G'' = R_n$ , множество  $J$  состоит только из одного индекса, например  $j$ , и при построении последовательности приближений на всех итерациях отыскиваются точки  $\bar{y}_i^j \in G_j$ . Поскольку  $g(y_i) \leq g^* \leq g(\bar{y}_i^j)$ ,  $i \in I$ , то из первой леммы и неравенства (3) легко следует существование номера  $i = i_0$ , для которого выполнится соотношение  $g(\bar{y}_{i_0}^j) - g(y_{i_0}) \leq \varepsilon$ , а значит, и неравенство  $g(\bar{y}_{i_0}^j) \leq g^* + \varepsilon$  при некотором заданном  $\varepsilon > 0$ . Показано, что при высказанных условиях той же процедурой можно решать задачи минимизации с фиксированной точностью и в других постановках.

Последнее замечание позволяет применять процедуру  $\pi(g(x), G)$  для приближенного решения вспомогательных задач вида (1) построения направлений итерационного перехода в некоторых методах условной минимизации. Приводятся примеры такого использования процедуры  $\pi(g(x), G)$  в методах выпуклого и псевдовыпуклого про-

граммирования с линейными и выпуклыми квадратичными вспомогательными функциями  $g(x)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.
- [2] Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1973.
- [3] Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787–823.
- [4] Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979.
- [5] Заботин И. Я. Одна общая схема решения задачи математического программирования и ее использование в алгоритмах минимизации псевдовыпуклых функций // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара. — Казань: Казанский государственный университет, 2005. — С. 83–86.
- [6] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.

## Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка

В. А. Замаев

viktor.zamaraev@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

### Введение

Рассматриваются обыкновенные, помеченные графы с множеством вершин  $\{1, \dots, n\}$ . Множество графов  $X$  называется *наследственным классом графов*, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из  $X$ , также принадлежит  $X$ . Известно [1], что для любого бесконечного наследственного класса графов  $X$ , отличного от класса всех графов, справедливо следующее соотношение:

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2), \quad (1)$$

где  $c(X)$  — натуральное число, называемое индексом класса  $X$ , а  $X_n$  — множество всех  $n$ -вершинных графов из класса  $X$ . Множество классов, соответствующих определенному индексу, называется *слоем*. Так, множество классов с индексом, равным 1, образует *унитарный* слой. Для классов из унитарного слоя соотношение (1) не дает асимптотической оценки величины  $\log_2 |X_n|$ , знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса  $X$  [2]. Для исследования поведения величины  $\log_2 |X_n|$  для классов  $X$  из унитарного слоя используется понятие равновеликости. Два класса графов  $X$  и  $Y$  называются *равновеликими*, если существуют положительные числа  $c_1, c_2$  и  $n_0$ , такие, что  $|Y_n|^{c_1} \leq |X_n| \leq |Y_n|^{c_2}$  для любого  $n > n_0$ . Очевидно, что равновеликость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*. Унитарный слой состоит из бесконечного числа ярусов.

В [3] были выделены первые четыре яруса унитарного слоя, для которых  $\log_2 |X_n|$  по порядку совпадает с  $1, \log n, n, n \log n$ . Эти ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным, соответственно. В каждом из четырех этих ярусов найдены все минимальные элементы [4]. Кроме того, для первых трёх ярусов в [4] дана полная структурная характеристика. Факториальный ярус является наименьшим, для которого такой характеристики неизвестно. В то же время этому ярусу принадлежат многие известные классы: рёберные графы, интервальные графы, леса, планарные графы, кографы и др.

Данная работа является логическим продолжением исследования факториального яруса, начатого в работах [5, 6].

### Основные результаты

Хорошо известно, что любой наследственный класс графов  $X$  можно определить с помощью множества  $M$  запрещённых порожденных подграфов, при этом принято писать, что  $X = \text{Free}(M)$ . В [5, 6] исследование факториального яруса начато с изучения конечноопределённых классов, то есть таких, у которых множество запрещённых подграфов конечно. До сих пор класс  $\text{Free}(\{K_{1,3}, C_4\})$  был

единственным классом, определяемым двумя запрещенными подграфами с четырьмя вершинами, для которого вопрос о принадлежности факториальному ярусу был открыт. В данной работе дается ответ на этот вопрос.

**Теорема 1.** *Класс  $Free(\{K_{1,3}, C_4\})$  является факториальным.*

Этот результат в совокупности с результатами работ [5, 6] позволяет выделить все факториальные классы, у которых множество запрещённых подграфов состоит из графов с не более чем четырьмя вершинами. Обозначим через  $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{S}$  класс двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов соответственно.

**Теорема 2.** *Пусть  $M$  — множество графов с числом вершин не более четырёх и  $Free(M)$  — не менее чем факториальный класс.  $Free(M)$  факториальный тогда и только тогда, когда ни одно из следующих множеств не пусто:  $M \cap \mathcal{B}, M \cap \overline{\mathcal{B}}, M \cap \mathcal{S}, M \cap Free(\{C_4, K_3\}), M \cap Free(\{C_4, \overline{K_3}\})$ .*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 148–157.
- [2] Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 151–164.
- [3] Scheinerman E. R., Zito J. On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1994. — V. 61. — P. 16–39.
- [4] Алексеев В. Е. О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 1. — 1997. — Т. 4. — С. 3–12.
- [5] Замараев В. А. Оценка числа графов в некоторых наследственных классах // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010). — С. 301–303.
- [6] Алексеев В. Е., Замараев В. А., Лозин В. В., Мэйхил К. Некоторые факториальные классы графов, определяемые двумя запрещёнными графами // Тезисы докладов XV Нижегородской сессии молодых ученых — математические науки (Красный плес, 25–28 мая 2010). — С. 16–17.

## О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции

*Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков*

nikolai.zolotykh@gmail.com, chir7@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Пусть  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $f : E_k^n \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $k \geq 2$ . Обозначим

$$M_\nu(f) = \{x \in E_k^n : f(x) = \nu\} \quad (\nu = 0, 1).$$

Функция  $f$  называется *пороговой*, если существуют числа  $a_0, \dots, a_n$ , такие, что

$$M_0(f) = \left\{ x \in E_k^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0 \right\}. \quad (1)$$

Множество всех пороговых функций, заданных на  $E_k^n$ , обозначим  $\Pi(n, k)$ .

*Разрешающим множеством* функции  $f \in \Pi(n, k)$  называется такое  $T \subseteq E_k^n$ , что для произвольной функции  $g \in \Pi(n, k) \setminus \{f\}$  найдется  $z \in T$ , такое, что  $f(z) \neq g(z)$ . Разрешающее множество функции  $f$  называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для функции  $f$ . Известно, что для любой пороговой функции  $f$  минимальное разрешающее множество единственно. Минимальное разрешающее множество функции  $f$  обозначим  $T(f)$ . *Длиной обучения* называется величина

$$t(n, k) = \max_{f \in \Pi(n, k)} |T(f)|.$$

Длина обучения  $t(n, k)$  зависит от  $n$  экспоненциально, в частности,  $t(n, 2) = 2^n$ , поэтому представляет интерес поиск оценок для  $t(n, k)$ , когда  $n$  фиксировано. Известно, что

$$c'_n \log^{n-2} k \leq t(n, k) \leq c''_n \log^{n-1} k, \quad (2)$$

где  $c'_n, c''_n$  — некоторые положительные величины, зависящие только от  $n$ . Верхняя оценка в (2) получена в [1] на основе [2, 3]; нижняя оценка установлена в [4, 5]; см. также [6], где приводятся явные выражения для  $c'_n, c''_n$ . В [7] доказано, что  $t(2, k) = 4$ , а в [8] установлено,



что  $\sigma(3, k) = \Theta(\log k)$ . Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [9, 10].

Авторы предполагают, что  $t(n, k)$  при фиксированном  $n$  ограничена сверху полиномом от  $\log k$  степени  $n - 2$ . В настоящей работе выделяется подкласс  $\Pi'(n, k) \subset \Pi(n, k)$ , такой, что для каждой  $f \in \Pi'(n, k)$  выполнено неравенство  $|T(f)| \leq c_n \log^{n-2} k$ , где  $c_n$  — некоторая величина, зависящая только от  $n$ .

Введем обозначения:  $K(f) = \text{conv}(M_1(f) - M_0(f))$ ,  $F_0(f) = \text{conv}(M_0(f)) - K(f)$ ,  $F_1(f) = \text{conv}(M_0(f)) + K(f)$ .

**Лемма 1.** Для любой  $f \in \Pi(n, k)$  и любых  $x, y \in T_i(f)$  ( $i = 0, 1$ ) справедливо  $2x - y \notin F_0(f) \cup F_1(f)$ .

К сожалению, на данный момент удобного описания множества  $F_0(f) \cup F_1(f)$  в общем случае не имеется. Рассмотрим множество  $\Pi'(n, k)$  таких пороговых функций  $f$ , для каждой из которых найдутся числа  $a_0, \dots, a_n$ , удовлетворяющие (1), такие, что  $a_j(k-1) < a_0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Для  $f \in \Pi'(n, k)$  множество  $F_0(f) \cup F_1(f)$  содержит множество  $\mathbb{Z}_+^n$  всех точек с неотрицательными целочисленными компонентами. Говорят, что множество  $G \subset \mathbb{Z}_+^n$  обладает *свойством разделенности*, если из  $x, y \in G$  следует  $2x - y \in \mathbb{Z}_+^n$  [11]. По лемме 1, если  $f \in \Pi'(n, k)$ , то каждое из множеств  $T_0(f)$  и  $T_1(f)$  обладает свойством разделенности, и для оценок их мощностей воспользуемся подходом [11, 12].

**Лемма 2.** Пусть  $f \in \Pi'(n, k)$ . Для любого  $x \in T_0(f)$  существует  $j$ , такое, что

$$\frac{a_0}{na_j} - \frac{1}{d} \leq x_j \leq \frac{a_0}{a_j}.$$

Для любого  $x \in T_1(f)$  существует  $j$ , такое, что

$$\frac{a_0}{na_j} \leq x_j \leq \frac{a_0}{a_j} + 1.$$

Известно [11, 12], что если компоненты точек множества  $G$ , обладающего свойством разделенности, удовлетворяют неравенствам  $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), то  $|G| \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \log_2 \frac{\alpha_i + 1}{\beta_i + 1}\right)$ . Отсюда и из лемм 1, 2 получаем следующий результат.

**Теорема.** Для любой  $f \in \Pi'(n, k)$

$$|T(f)| \leq 2n(2 + \log_2 n)(1 + \log_2 k)^{n-2}.$$

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 09-01-00545-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Hegedüs T.* Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. — NY: ACM Press, 1994. — P. 228–236.
- [2] *Шевченко В. Н.* О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1985. — С. 99–108.
- [3] *Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.* On integer points in polyhedra // *Combinatorica*. — 1992. — V. 12, No 1. — P. 27–37.
- [4] *Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.* О нижней оценке расшифровки пороговых функций  $k$ -значной логики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.
- [5] *Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.* О сложности расшифровки пороговых функций  $k$ -значной логики // Доклады Академии наук. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.
- [6] *Золотых Н. Ю.* Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 159–168.
- [7] *Золотых Н. Ю.* О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Часть I. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2001. — С. 74–79.
- [8] *Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.* О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Н. Новгород: Издательство Нижегородского государственного педагогического университета, 2003. — С. 20–21.
- [9] *Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.* Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Нижний Новгород.: изд-во ННГУ, 2003. — С. 238–246.

- [10] *Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J.* On exact specification by labelled examples // *Discrete Applied Mathematics*. — 1995. — V. 61, № 1. — С. 1–25.
- [11] *Шевченко В. Н.* О числе крайних точек в целочисленном программировании // *Кибернетика*. — 1981. — № 2. — С. 133–134.
- [12] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

## Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков

А. В. Зорин

zoav1@uic.mnov.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

### Тандем из двух перекрестков как управляющая система обслуживания

В систему поступают независимые стационарные неординарные потоки без последствия  $\Pi_1, \Pi_2$  первичных требований. Интенсивность групп по потоку  $\Pi_j, j = 1, 2$ , равна  $\lambda_j$ . Группа из потока  $\Pi_j$  содержит  $x = 1, 2, \dots$  требований с вероятностью  $p_x^{(j)}$ . Требования потока  $\Pi_j$  помещаются в накопитель  $O_j$  неограниченного объема. Обслуженные требования первого потока поступают в промежуточную очередь  $O_3$ . Со случайной задержкой требования из  $O_3$  поступают в очередь  $O_2$  и формируют входной поток  $\Pi_3$  вторичных требований. Обслуживающее устройство (ОУ) имеет  $n < \infty$  состояний  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)}$ . В состоянии  $\Gamma^{(r)}, r = 1, 2, \dots, n$ , ОУ проводит неслучайное время  $T_r$  и функционирует в одном из четырех режимов: 1) требования не обслуживаются, 2) обслуживаются только требования из очереди  $O_1$ , 3) обслуживаются только требования из очереди  $O_2$ , 4) обслуживаются требования из очередей  $O_1$  и  $O_2$ . Смена состояний ОУ происходит по циклическому алгоритму: после состояния  $\Gamma^{(r)}$  осуществляется мгновенный переход в состояние  $\Gamma^{(r \oplus 1)}$ , где  $r \oplus 1 = r + 1$  при  $r < n$  и  $n \oplus 1 = 1$ . Процесс обслуживания удобно характеризовать потоками насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}$

— выходными потоками системы обслуживания при максимально возможной загрузке ее накопителей и эксплуатации. Если в состоянии  $\Gamma^{(r)}$  обслуживаются требования очереди  $O_j$ , то поток насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  содержит  $\ell_{r,j}$  требований за время  $T_r$ . Пусть  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ , — последовательные моменты смены состояния обслуживающего устройства. Требования из очереди  $O_1$ , обслуженные на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ , находятся в очереди  $O_3$  вплоть до момента  $\tau_{i+1}$ . Каждое требование, находившееся в очереди  $O_3$  в момент  $\tau_i$ , независимо от других в промежутке времени  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$  либо перемещается в очередь  $O_2$  с вероятностью  $p_r$ , зависящей от состояния  $\Gamma^{(r)}$  обслуживающего устройства на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ , либо остается в очереди  $O_3$  с вероятностью  $1 - p_r$ . Таким образом, каждое требование с вероятностью единица за конечное (но случайное) время перемещается из очереди  $O_3$  в очередь  $O_2$ .

В соответствии с кибернетическим подходом [1, 2] выберем последовательность  $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$  в качестве дискретной временной шкалы функционирования управляющей системы. Определим схему, информацию, координаты и функцию этой управляющей кибернетической системы. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда, формирующая входные потоки; 2) входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  требований — первый тип входных полюсов; 3) потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}$  — второй тип входных полюсов; 4) накопители  $O_1, O_2, O_3$  — внешняя память; 5) устройства организации дисциплины очереди в накопителях — устройства переработки информации во внешней памяти; 6) обслуживающее устройство — внутренняя память; 7) граф смены состояний обслуживающего устройства — устройство переработки информации внутренней памяти; 8) выходные потоки  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}$  — выходные полюсы. Набор состояний среды, очередей в накопителях, обслуживающего устройства, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяет информацию управляющей системы. Номера состояний случайной среды, входных потоков, накопителей, механизмов формирования очереди и номер состояния обслуживающего устройства задают расположение блоков на схеме. Функция этой системы — обслуживание потоков по циклическому алгоритму. В следующем разделе будет произведено нелокальное описание поблочного строения управляющей системы и совместно рассмотрено поблочное строение управляющей системы и ее функционирование во времени.

### Марковская случайная последовательность и ее предельные свойства

Все случайные величины и элементы рассматриваются на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ . Пусть  $\Gamma_i$  — состояние обслуживающего устройства в момент  $\tau_i$  (и на промежутке  $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ ),  $\varkappa_{s,i}$  — число требований в очереди  $O_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , в момент  $\tau_i$ ,  $\eta_{s,i}$  — число требований потока  $\Pi_s$ , поступивших на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ ,  $\bar{\xi}_{j,i}$  — число требований по потоку  $\Pi_j^{\text{вых}}$  на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ ,  $\xi_{j,i}$  — число требований по потоку  $\Pi_j^{\text{вас}}$  на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ . Имеют место рекуррентные соотношения  $\varkappa_{1,i+1} = \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}$ ,  $\varkappa_{2,i+1} = \max\{0, \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i} + \eta_{3,i} - \xi_{2,i}\}$ ,  $\varkappa_{3,i+1} = \varkappa_{3,i} + \xi_{1,i} - \eta_{3,i}$ ,  $\bar{\xi}_{1,i+1} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}$ . Для нелокального описания входных потоков и потоков насыщения зададим свойства условных распределений дискретной компоненты  $\{(\eta_{1,i}, \eta_{2,i}); i = 0, 1, \dots\}$  маркированного точечного процесса  $\{(\tau_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \nu_i); i = 0, 1, \dots\}$  с меткой  $\nu_i = \Gamma_i$  первичных требований, прибывающих за время  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ , дискретной компоненты  $\{(\xi_{1,i}, \xi_{2,i}); i = 0, 1, \dots\}$  маркированного точечного процесса  $\{(\tau_i, \xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \bar{\nu}_i); i = 0, 1, \dots\}$  и дискретной компоненты  $\{\eta_{3,i}; i = 0, 1, \dots\}$  маркированного точечного процесса  $\{(\tau_i, \eta_{3,i}, \bar{\nu}_i); i = 0, 1, \dots\}$  с меткой  $\bar{\nu}_i = (\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$ . Для  $x \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq x$ ,  $0 < \alpha < 1$  обозначим  $\psi(k; x, \alpha) = C_x^k \alpha^k (1 - \alpha)^{x-k}$ , пусть  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{III}} \cup \Gamma^{\text{IV}}$  где  $\Gamma^I$  — множество состояний ОУ режима 1,  $\Gamma^{\text{II}}$  — множество состояний ОУ режима 2,  $\Gamma^{\text{III}}$  — множество состояний ОУ режима 3,  $\Gamma^{\text{IV}}$  — множество состояний ОУ режима 4. Введем функции  $\varphi_j(x, T)$ ,  $T > 0$ ,  $x = 0, 1, \dots$ , через разложения в ряды  $\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, T) = \exp \left\{ \lambda_j T \left( \sum_{x=1}^{\infty} z^x p_x^{(j)} - 1 \right) \right\}$ ,  $|z| < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_{j,i} = b\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) &= \varphi(b; j, T_{r \oplus 1}) \quad \text{при } b = 0, 1, \dots, \\ \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{1,i} = 0\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) &= 1 \quad \text{при } \Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^I \cup \Gamma^{\text{III}}, \\ \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{1,i} = \ell_{r \oplus 1, 1}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) &= 1 \quad \text{при } \Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{IV}}, \\ \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{2,i} = 0\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) &= 1 \quad \text{при } \Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^I \cup \Gamma^{\text{II}}, \\ \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{2,i} = \ell_{r \oplus 1, 2}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) &= 1 \quad \text{при } \Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{\text{III}} \cup \Gamma^{\text{IV}}, \\ \mathbf{P}(\{\omega: \eta_{3,i} = b\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{3,i} = x\}) &= \psi(b; x, p_{r \oplus 1}) \quad \text{при } 0 \leq b \leq x. \end{aligned}$$

Для произвольных неотрицательных целых  $i, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3, y_1, y_2$  и  $r = 1, 2, \dots, n$  обозначим  $A_i(r, x_1, x_2, x_3) = \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{3,i} = x_3\}$ ,  $B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) = \{\omega: \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2\}$ . Тогда для произвольных неотрицательных целых  $x_{1,\bar{i}}, x_{2,\bar{i}}, x_{3,\bar{i}}$  и  $\Gamma^{(r_{\bar{i}})} \in \Gamma, 0 \leq \bar{i} \leq i$ , имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) \left| \bigcap_{\bar{i}=0}^i A_{\bar{i}}(r_{\bar{i}}, x_{1,\bar{i}}, x_{2,\bar{i}}, x_{3,\bar{i}}) \right.\right) = \\ & = \mathbf{P}(\{\omega: \eta_{1,i} = b_1\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \mathbf{P}(\{\omega: \eta_{2,i} = b_2\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \times \\ & \quad \times \mathbf{P}(\{\omega: \eta_{3,i} = b_3\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_i\}) \times \\ & \quad \times \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{1,i} = y_1\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \mathbf{P}(\{\omega: \xi_{2,i} = y_2\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}). \end{aligned}$$

Пусть  $X = \{(w_1, w_2, w_3): w_s = 0, 1, \dots, s = 1, 2, 3\}$ . Соотношения для величин очередей, циклический алгоритм смены состояния ОУ и свойства условных распределений позволяют доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** При заданном распределении вектора  $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0})$  последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}); i = 0, 1, \dots\} \quad (1)$$

является марковской цепью. Множество состояний марковской цепи (1) есть объединение незамкнутого подмножества  $\{(\Gamma^{(r)}, w): \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{IV}}, w \in X, w_1 > 0, w_3 < \ell_{r,1}\}$  несущественных состояний и замкнутого подмножества  $\{(\gamma, w): \gamma \in \Gamma^{\text{I}} \cup \Gamma^{\text{III}}, w \in X\} \cup \{(\gamma, w): \gamma \in \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{IV}}, w \in X, w_1 = 0\} \cup \{(\Gamma^{(r)}, w): \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{IV}}, w \in X, w_1 > 0, w_3 \geq \ell_{r,1}\}$  существенных периодических состояний с периодом  $n$ .

Обозначим  $\ell_1 = \sum_{r: \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\text{II}} \cup \Gamma^{\text{IV}}} \ell_{r,1}$ ,  $\ell_2 = \sum_{r: \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\text{III}} \cup \Gamma^{\text{IV}}} \ell_{r,2}$ ,  $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ ,  $\bar{\lambda}_j = \lambda_j \sum_{x=1}^{\infty} x p_x^{(j)}$ . В следующей теореме приводятся условия на входные потоки, потоки насыщения и длительности состояний ОУ, при которых среднее число требований в системе обслуживания остается ограниченным.

**Теорема 2.** Для существования стационарного распределения цепи (1) необходимо и достаточно выполнение неравенств  $\bar{\lambda}_1 T - \ell_1 < 0$ ,  $(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2) T - \ell_2 < 0$ .

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ляпунов А. А., Яблонский С. В.* Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1963. Вып. 9. — С. 5–22.
- [2] *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. — С. 333–344.

## Функциональные построения в теории графов

*М. А. Иорданский*

Нижегородский государственный педагогический университет

Рассматривается система  $(\mathfrak{S}, C)$ , в которой  $\mathfrak{S}$  — носитель системы — есть множество графов, а  $C$  — суперпозиция операций над графами, описывающая процессы построения одних графов из других. Изучаются задачи, которые в «традиционных» функциональных системах принято относить к проблематике выразимости и полноты. Функциональные построения в теории графов представляют интерес как с теоретической точки зрения в плане сопоставительного анализа соответствующих результатов с традиционными функциональными системами [1, 2], так и в практическом отношении, позволяя эффективно решать задачи «сжатия» информации [3] и оптимального размещения графов [4].

### Операции над графами

Рассматриваемые графы могут содержать петли и кратные ребра. Используются следующие обозначения:  $K_n$  — полный  $n$ -вершинный граф;  $K_0$  — граф, не содержащий вершин (нуль-граф);  $L_n$  — цепь, содержащая  $n$  вершин;  $C_n$  — цикл, содержащий  $n$  вершин;  $\overline{G}$  — дополнение графа  $G$  до полного.

Операции над графами из  $\mathfrak{S}$  задаются отображениями  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ , в которых результирующий граф отображения  $G$  допускает представление в виде объединения с пересечением подграфов, изоморф-

ных исходным графам  $G_1$  и  $G_2$ . Эти отображения интерпретируются как *операции склейки* графов-операндов  $G_1$  и  $G_2$  по отождествляемым подграфам  $G'_1 \subseteq G_1$  и  $G'_2 \subseteq G_2$ , изоморфным *подграфу склейки*  $\tilde{G} \subseteq G$ .

Граф  $G$  называется *суперпозицией* графов из  $\mathfrak{S}$ , если  $G \in \mathfrak{S}$  или  $G$  можно получить из графов множества  $\mathfrak{S}$  путем последовательного применения операций склейки. Каждому такому процессу соответствует *операция суперпозиции* графов из  $\mathfrak{S}$ . Множество всех графов, полученных из  $\mathfrak{S}$  с помощью операций суперпозиции, обозначается через  $[\mathfrak{S}]$ . Если  $[\mathfrak{S}] = \mathfrak{S}$ , то класс  $\mathfrak{S}$  называется *замкнутым*.

Множество графов  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$  образует *полную систему* графов в  $\mathfrak{S}$ , если  $[\mathfrak{S}'] = \mathfrak{S}$ . Минимальная по включению полная система графов  $B_e$  называется *элементным базисом* замкнутого класса. Если граф  $G \in \mathfrak{S}$  строится из графов элементного базиса с помощью последовательности операций, в каждой из которых текущий (исходный) граф склеивается с графом, изоморфным графу из  $B_e$  (строится «по кирпичику»), то соответствующая операция суперпозиции называется *канонической*. Операции склейки с изоморфными подграфами склейки  $\tilde{G}$  относятся к одному *типу*. Минимальное по включению множество операций склейки различных типов, достаточное для построения из  $B_e$  всех графов замкнутого класса, называется *операционным базисом*  $B_o$  класса. Операционный базис  $B_o$  задается множеством графов, изоморфных подграфам склейки. Элементный и операционный базисы называются *порождающими базисами* замкнутого класса графов. Порождающие базисы задают *структурное описание* замкнутого класса графов.

### Структура замкнутых классов графов

В работе [1] были доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Мощность множества всех замкнутых классов графов континуальна.*

**Теорема 2.** *Каждый замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис  $B_e$ .*

**Теорема 3.** *Замкнутый класс всех графов имеет элементный базис  $B_e = \{K_1, C_1, K_2\}$  и операционный базис  $B_o = \{K_0, K_1, \bar{K}_2\}$ .*

Для операционного базиса в [5] был установлен следующий факт.



**Теорема 4.** *Каждый замкнутый класс графов имеет хотя бы один операционный базис  $B_o$ .*

В решетке замкнутых классов графов все предполные классы являются *тривиальными* — не содержащими лишь по одному графу из своего надкласса [6]. С учетом этого для замкнутых классов графов становится содержательным понятие *базисной предполноты* по  $B_e$  или  $B_o$ . Класс  $\mathfrak{Z}_1$  является базисно предполным в  $\mathfrak{Z}_2$ , если элементный или операционный базис класса  $\mathfrak{Z}_1$  не содержит одного из графов одноименного базиса класса  $\mathfrak{Z}_2$ . Используя теорему 3, можно построить решетку всех базисно предполных замкнутых классов графов, каждый из которых однозначно определяется порождающими базисами.

### Конструктивные описания $H$ -замкнутых классов графов

В общем случае для сохранения характеристического свойства графов могут потребоваться ограничения не только на порождающие базисы, но также на выбор отождествляемых подграфов в графах-операндах и на сам способ отождествления (внутренние ограничения). Кроме того, возможны ограничения на операции склейки, влияющие на возможный порядок сборки графов, то есть на выбор операций суперпозиции (внешние ограничения). К внешним ограничениям можно отнести, например, требования, чтобы отождествляемые подграфы графов-операндов были порожденными или чтобы вершины подграфа склейки образовывали тупиковое или минимальное разделяющее множество в результирующем графе. Подобные ограничения влияют на величину избыточности конструктивного описания. Системы внутренних и внешних ограничений будем обозначать с использованием символа  $H$  и говорить соответственно об операциях  $H$ -склейки,  $H$ -суперпозициях и  $H$ -замкнутых классах графов. Конструктивные описания  $H$ -замкнутых классов графов задаются системой ограничений на операции  $H$ -склейки и совокупностью порождающих базисов.

В работах [1] и [7, 8, 9] можно найти конструктивные описания замкнутых классов обыкновенных, двудольных, расщепляемых, триангулированных и планарных графов при различных системах внутренних и внешних ограничений на операции склейки. Приведем здесь лишь несколько новых результатов.

1. *Гамильтоновы графы.* Характеристическое свойство сохраняют операции  $H^l$ -склейки, в которых отождествляемыми подграфами графов-операндов  $G_1$  и  $G_2$  выбираются цепи  $L_n$ ,  $n = \min\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\}$ , являющиеся гамильтоновыми хотя бы в одном из графов  $G_1$  или  $G_2$ .

**Теорема 5.** *Класс гамильтоновых графов канонически  $H^l$ -замкнут с порождающими базисами  $V_e = \{C_1, C_2, \dots\}$  и  $V_o = \{K_1, L_2, L_3, \dots\}$ .*

2. *Эйлеровы графы.* Характеристическое свойство сохраняют операции склейки, в которых отождествляемые подграфы графов-операндов содержат вершины четной степени. Минимальной избыточностью обладает описание, когда склейка осуществляется по пустым подграфам (операции  $H^\emptyset$ -склейки). В работе [9] доказана

**Теорема 6.** *Класс эйлеровых графов канонически  $H^\emptyset$ -замкнут с порождающими базисами  $V_e = \{C_1, C_2, \dots\}$  и  $V_o = \{K_1, \overline{K}_2, \dots\}$ .*

Отметим в заключение, что класс эйлеровых планарных графов имеет три конечных операционных базиса  $B_o^1 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3\}$ ,  $B_o^2 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_4\}$ ,  $B_o^3 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_5\}$  [5], что создает возможность для постановки задач оптимального синтеза графов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 4. — С. 35–63.
- [2] *Иорданский М. А.* Функциональный подход к представлению графов // Доклады РАН. — 1997. — Т. 353, № 3. — С. 303–305.
- [3] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания и экономное кодирование графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2000. — Вып. 1(22). — С. 88–93.
- [4] *Иорданский М. А.* Оптимальные нумерации вершин графов // Математические вопросы кибернетики. — 2001. — Вып. 10. — С. 83–102.
- [5] *Бурков Е. В.* Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», Москва, 18–23 июня 2007 г. — М.: Изд-во механико-матем. факультета МГУ. — 2007. — С. 105–116.
- [6] *Иорданский М. А.* Структура и способы порождения замкнутых классов графов // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 3. — С. 105–116.

- [7] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания двудольных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008г.). — Казань: Изд-во «Отечество». — 2008. — С. 44.
- [8] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания расщепляемых графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. факультета МГУ.— 2010. — С. 306–308.
- [9] *Бурков Е. В.* Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математика. — 2010. — № 5(1). — С. 165–170.

## Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках

*А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко*

isachen@bsu.by, yarais@mail.ru

Белорусский государственный университет, Минск

### Введение

Рассматривается следующая оптимизационная задача

$$\min_{\pi \in C_n} \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)} b_i. \quad (1)$$

Здесь  $C_n$  — множество циклических перестановок элементов множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  — множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ,  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Для задачи рассматривается полиэдральный подход, основанный на построении системы линейных неравенств для циклического перестановочного многогранника

$$M(C_n) = \text{conv}\{a(\pi) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}) \mid \pi \in C_n\},$$

и описании его характеристик.

Ранее установлено [1], что  $\dim M(C_n) = n - 1$  при  $n \geq 4$  и  $\text{vert } M(C_n) = \{a(\pi) \mid \pi \in C_n\}$ , определены отдельные семейства гиперграней многогранника  $M(C_n)$ .

В работе [2] введено понятие наследуемой грани. Пусть  $M_1, M_2$  — многогранники размерности  $d > 2$ , причем  $\text{vert } M_1 \subset \text{vert } M_2$ , а  $G$  есть  $m$ -мерная грань многогранника  $M_1$  ( $1 \leq m < d$ ). Назовем  $G$  наследуемой гранью (относительно многогранника  $M_2$ ), если существует грань  $F$  многогранника  $M_2$ , такая, что  $\dim G = \dim F$  и  $\text{vert } G \subseteq \text{vert } F$ .

Как известно [3], для перестановочного многогранника  $M(S_n)$  задающая его полная неприводимая система имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n a_i, \\ \sum_{i \in w} x_i &\geq \sum_{j=1}^{|w|} a_j, \quad \forall w \subset N, |w| \leq n-1. \end{aligned} \quad (2)$$

В [2, 4] установлено, что при  $n \geq 5$  каждая гиперплоскость

$$H(i) = \{x \in E^n \mid x_i = a_1\}, \quad i \in \{2, 3, \dots, n\},$$

определяет наследуемую относительно  $M(S_n)$  гипергрань многогранника  $M(C_n)$ .

**Семейство гиперграней для  $|w| = 2$**

**Теорема 1.** При  $n \geq 5$  каждая гиперплоскость

$$H(i, j) = \{x \in E^n \mid x_i + x_j = a_1 + a_2\}, \quad i, j \in \{3, \dots, n\}, \quad i < j, \quad (3)$$

определяет гипергрань многогранника  $M(C_n)$ .

*Доказательство.* Согласно определению, множество называется  $k$ -мерным, если оно содержит  $k + 1$  аффинно-независимых точек. Поскольку  $\dim M(C_n) = n - 1$ , то для доказательства необходимо указать  $n - 1$  аффинно-независимые точки многогранника  $M(C_n)$ , принадлежащие гиперплоскости (3).

При  $n = 3$  множество гиперплоскостей (3) пусто.

Если  $n = 4$ , то в (3) входит единственная интересующая нас гиперплоскость  $H(3, 4)$ , причём число точек, принадлежащих  $H(3, 4) \cap M(C_4)$ , равно двум, что даёт  $\dim(H(3, 4) \cap M(C_4)) = 1 < \dim M(C_4) = 3$ .

Если  $n = 5$ , то в (3) входит три гиперплоскости, причём число точек, принадлежащих пересечению  $M(C_5)$  с каждой из них, равно

четырем. Непосредственной проверкой легко убедиться, что каждое из этих множеств является аффинно-независимым, что влечёт справедливость теоремы для  $n = 5$ .

Для общего случая при  $n \geq 6$ , не нарушая общности, рассмотрим следующее множество точек:

$$\begin{aligned}
 &(a_j, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &(a_j, a_4, a_5, a_3, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &(a_j, a_5, a_4, a_6, a_3, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &(a_j, a_{i-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i+1}, a_3, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &(a_j, a_{i+1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, a_1, a_3, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &(a_j, a_{j-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j+1}, a_3, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &(a_j, a_{j+1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, a_2, a_3, \dots, a_n, a_i) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &(a_j, a_{n-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_3, a_i) \\
 &(a_j, a_n, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_i, a_3) \\
 &(a_i, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_n, a_j) \\
 &(a_3, a_j, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i) \\
 &(a_3, a_i, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_j).
 \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что множество точек  $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$  является аффинно-независимым тогда и только тогда, когда множество  $\{X_2 - X_1, \dots, X_{k+1} - X_1\}$  является линейно независимым, вычтем по координатно первую точку из всех остальных точек множества. Затем удалим вторую и  $i$ -ю координаты, а первую и  $j$ -ю координаты переставим в конец. В результате получим  $(n - 2) \times (n - 2)$  матрицу, определитель которой будет равен

$$\begin{aligned}
 &(a_{i+1} - a_{i-1})(a_{j+1} - a_{j-1}) \prod_{k=4}^{i-2} (a_{k+1} - a_k) \prod_{l=j+1}^{n-1} (a_{l+1} - a_l) \times \\
 &\quad \times (a_i - a_j)(a_1 - a_2)(2a_3 - a_i - a_j).
 \end{aligned}$$

В силу неравенств  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  определитель будет отличен от нуля. Следовательно, полученное множество разностей является линейно независимым. Последнее влечёт аффинную независимость исходного множества точек. ■

**Следствие.** Каждая гипергрань  $H(i, j) \cap M(C_n)$ ,  $i, j \in \{3, \dots, n\}$ ,  $i < j$ ,  $n \geq 5$ , циклического перестановочного многогранника  $M(C_n)$

является наследуемой относительно перестановочного многогранника  $M(S_n)$ .

### Нижняя оценка для числа гиперграней

Рассмотрим число  $f(M(C_n))$  гиперграней многогранника  $M(C_n)$ . В работе [1] на основании понятия 2-циклических перестановок и преобразования их за счёт одной транспозиции в циклическую перестановку получена следующая нижняя оценка при  $n \geq 4$ :

$$f(M(C_n)) \geq \begin{cases} ((k-1)!)^2, & n = 2k, \\ (k-1)!k!, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Учитывая наследуемые гиперграни многогранника циклических перестановок для  $|w| = 1$  и  $|w| = 2$ , получим утверждение.

**Теорема 2.** Для числа гиперграней  $f(M(C_n))$  многогранника  $M(C_n)$  при  $n \geq 5$  справедливо неравенство

$$F(M(C_n)) \geq \begin{cases} ((k-1)!)^2 + 2k^2 - 3k + 2, & n = 2k, \\ (k-1)!k! + 2k^2 - k + 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исаченко Я. А. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках // Современные информационные компьютерные технологии: Сб. науч. ст., ч. 2. — Гродно: ГрГУ, 2008. — С. 203–206.
- [2] Исаченко Я. А. О некоторых гипергранях многогранника циклических перестановок // Технологии информатизации и управления: Сб. науч. ст. — Минск : БГУ, 2009. — С. 16–19.
- [3] Емилевич В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука, 1981.
- [4] Исаченко Я. А. Об одной задаче управления на циклических перестановках // Управление информационными ресурсами: Материалы Седьмой Международной научно-практической конференции (Минск, 25 ноября 2009 г.) — Мн.: Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2009. — С. 68–69.

## Оптимизационные методы решения прямых и обратных задач для квазистационарных электромагнитных процессов

*А. В. Калинин, М. И. Сумин, А. А. Тюхтина*

avk@mm.unn.ru, msumin@sinn.ru, kalinmm@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Решение любой технологической проблемы с использованием электромагнитных полей предполагает в первую очередь формирование электрического и магнитного поля, структура которого отвечает требованиям технологического процесса. При этом значительная часть технологических процессов допускает описание в рамках квазистационарного магнитного приближения, в котором пренебрегают токами смещения [1–3].

Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в гауссовой системе единиц [1] с учетом справедливых в линейных средах материальных соотношений может быть переписана в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H}(x, t) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{rot} \mathbf{E}^{cm}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где  $(x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \subset R^3$ ,  $T > 0$ ,  $\mathbf{H}: Q \rightarrow R^3$  — напряженность магнитного поля,  $\mu$  — тензор магнитной проницаемости среды,  $\sigma$  — тензор проводимости,  $\mathbf{E}^{cm}$  — напряженность поля сторонних электродвижущих сил.

В работе предполагается, что  $\Omega$  — открытая ограниченная область класса  $C^2$ , гомеоморфная шару,  $\mathbf{E}^{cm}: Q \rightarrow R^3$  — суммируемая с квадратом функция,  $\mu$ ,  $\sigma$ , — самосопряженные линейные операторы из  $\{L_2(\Omega)\}^3$  в  $\{L_2(\Omega)\}^3$ , удовлетворяющие условиям

$$\mu_1 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\mu \mathbf{u}, \mathbf{u})_{2,\Omega} \leq \mu_2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2, \quad \sigma_1 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\sigma \mathbf{u}, \mathbf{u})_{2,\Omega} \leq \sigma_2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2, \quad (3)$$

$\mu_i, \sigma_i, i = 1, 2, c$  — заданные положительные числа.

Уравнения (1), (2) рассматриваются при краевых условиях

$$\mathbf{H}_\tau(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

и начальном условии

$$\mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{h}(x), x \in \Omega, \quad (5)$$

где  $\mathbf{h} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ .

Исходные данные задачи (1), (2), (4), (5) обозначаются через  $\Pi \equiv (\mathbf{h}, \mathbf{E}^{cm})$ .

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [4–6]:

$$H(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{rot } \mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{rot} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) dx,$$

$$K(\text{div}\mu; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L^2(\Omega)\}^3 : \text{div}\mu \mathbf{u} = 0\}, (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{K(\text{div}\mu; \Omega)} = \int_{\Omega} (\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx.$$

Пусть функции  $\mathbf{E}^{cm}$ ,  $\mathbf{h}$  известны. Решением задачи (1), (2), (4), (5) называется функция  $\mathbf{H} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$ , удовлетворяющая равенствам (1), (2), (5) в смысле распределений на  $Q$ , а условиям (4) в смысле теории следов [7].

**Теорема** [6, 8]. *Для любого  $\Pi \in K(\text{div}\mu; \Omega) \times \{L_2(Q)\}^3$  существует единственное решение  $\mathbf{H}[\Pi]$  задачи (1), (2), (4), (5). При этом  $\mathbf{H}[\Pi]$  эквивалентно непрерывной функции из  $[0, T]$  в  $L_{\mu}(\Omega)$ .*

Доказательство теоремы проводится с использованием метода Фаэдо–Галеркина, возможность применения которого вытекает из установленных в [9] неравенств для скалярных произведений векторных полей.

Задание пары  $\Pi = (\mathbf{h}, \mathbf{E}^{cm})$  полностью определяет конфигурацию электромагнитного поля [6]. Пусть  $D \subset K(\text{div}\mu; \Omega) \times \{L_2(Q)\}^3$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество,  $\mathbf{q} \in K(\text{div}\mu; \Omega)$ . Ставится задача определения элемента  $\Pi \in D$ , имеющего минимальную норму  $\|\Pi\| = \sqrt{\|\mathbf{h}\|_{\mu}^2 + \|\mathbf{E}^{cm}\|_{2, Q}^2}$  по финальному (в момент времени  $T$ ) наблюдению  $\mathbf{q} = \mathbf{H}[\Pi](T)$ .

Обратная задача поиска нормального решения при финальном наблюдении  $\mathbf{q} \in K(\text{div}\mu; \Omega)$  эквивалентна задаче оптимального управления с полуфазовым ограничением типа равенства [10]:

$$I_0(\Pi) \rightarrow \inf, I_1(\Pi) = \mathbf{q}, \Pi \in D, \mathbf{q} \in K(\text{div}\mu; \Omega), \quad (6)$$



где  $I_0(\Pi) \equiv \|\mathbf{h}\|_\mu^2 + \|\mathbf{E}^{cm}\|_{2,Q}^2$ ,  $I_1(\Pi) \equiv \mathbf{H}[\Pi](T)$ .

В работе рассматриваются алгоритмы для решения указанной обратной задачи (6), непосредственно связанные с теорией двойственности (см., например, [11, 12]) и основанные на методе двойственной регуляризации [10, 13, 14]. Выбор данного метода в качестве базового связан с рядом его важных отличительных особенностей. В нем, во-первых, самым существенным образом используется классическая идея «снятия» ограничений, заложенная в принципе Лагранжа; во-вторых, он непосредственно сопрягается с методом возмущений [11], что позволяет эффективно использовать преимущества последнего при анализе и решении оптимизационных и обратных задач; и наконец, в-третьих, наиболее полно используется оптимизационная техника, развитая в последние десятилетия для задач оптимизации с операторными ограничениями, к которым естественным образом сводятся самые разнообразные обратные задачи, в том числе и рассматриваемая в данной работе.

В отличие от классических двойственных алгоритмов, рассматриваемые в работе методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации могут использоваться независимо от того, разрешима или нет двойственная задача, и при приближенном задании исходных данных, то есть в ситуации, когда вместо  $\mathbf{q}$  и проводимости  $\sigma$  заданы их приближения: элемент  $\mathbf{q}^\delta \in K(\operatorname{div}\mu; \Omega)$  и оператор  $\sigma^\delta : \{L_2(\Omega)\}^3 \rightarrow \{L_2(\Omega)\}^3$ , удовлетворяющий условиям (3), такие, что

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{q}^\delta\|_\mu \leq \delta, \quad \|\sigma^{-1} - (\sigma^\delta)^{-1}\| \leq \delta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97019-р\_поволжье\_a), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (рег. номер 2.1.1/3927), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (шифр заявки НК-13П-13, контракт № П945).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Наука, 1989.
- [2] Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-Р. САПР в электротехнике. — М.: Мир, 1988.

- [3] *Галантин М. П., Попов Ю. П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Наука, Физматлит, 1995.
- [4] *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
- [5] *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
- [6] *Калинин А. В.* Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике: Учебное пособие. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
- [7] *Гавеский Х., Грёгер К., Захарнас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
- [8] *Калинин А. В., Калининкина А. А.* Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2003. — Вып. 1(26). — С. 21–38.
- [9] *Калинин А. В., Калининкина А. А.* Lp-оценки векторных полей // Изв. вузов. Математика. — 2004. №3. — С. 26–35.
- [10] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2001–2019.
- [11] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
- [12] *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990.
- [13] *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. — 2007. — Т. 47, №4. — С. 602–625.
- [14] *Сумин М. И.* Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2009.
- [15] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

## О конгруэнциях графов

*Е. О. Карманова*

lkb@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Под ориентированным графом понимается пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество, а  $\alpha$  — отношение на  $V$ . Множество  $V$  называется множеством вершин, отношение  $\alpha$  — отношением смежности, а пары, входящие в  $\alpha$ , — дугами орграфа  $G$ . Если  $(u, v) \in \alpha$ , то говорят, что вершина  $v$  смежна с вершиной  $u$  (см. [1]).

Пусть  $\varepsilon$  — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин  $V$  орграфа  $G$ . Фактор-графом орграфа  $G$  по эквивалентности  $\varepsilon$  называется орграф  $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$ , где  $V/\varepsilon$  — множество классов эквивалентности  $\varepsilon$ , а  $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$ .

Пусть  $K$  — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией  $K$ -графа  $G$  называется такое отношение эквивалентности  $\theta$  на  $V$ , что фактор-граф  $G/\theta$  является  $K$ -графом.

Возьмём в качестве класса  $K$  класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин  $V$ . В неориентированном графе пара встречных дуг  $(u, v)(v, u)$  рассматривается как один элемент графа, называемый ребром  $\{u, v\}$ . Ребро, соединяющее вершины  $u$  и  $v$ , называют инцидентным вершине  $u$  и вершине  $v$ .

Множество вершин неориентированного графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности  $\theta$  на множестве вершин графа  $G$  тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый  $\theta$ -класс образует в  $G$  независимое подмножество.

В [2] была представлена программа, генерирующая все конгруэнции заданной цепи, и было показано, что любой связный граф является фактор-графом подходящей цепи.

Одной из открытых проблем является следующая: для данного связного графа  $G$  найти цепь с минимальным возможным числом ребер  $p(G)$ , фактор-графом которой является данный граф.

Диаметром дерева  $T$  называется максимальное расстояние между его вершинами.

**Теорема.** Если  $T$  — дерево с  $m$  ребрами, имеющее диаметр  $d$ , то  $p(T) = 2m - d$ .

*Доказательство.* Любой граф с  $m$  ребрами имеет обход длины  $2m$ . Пусть  $R$  — минимальный обход дерева  $T$  и пусть его длина  $r < 2m$ . Значит, в  $R$  есть ребро, проходимое один раз. Пусть таких ребер  $k$  штук. Пронумеруем их в порядке обхода  $R$ . Покажем, что ребра, проходимые один раз, образуют в  $T$  цепь. Предположим, что это не так. Пусть ребра  $1 = \{u_0, u\}$  и  $2$  с началом  $v$  не инцидентны. Рассмотрим в составе  $R$  маршрут  $R(u, v)$ . Он содержит цепь  $P(u, v)$ . Пусть ее первым ребром будет  $uu'$ . Ребро  $\{u, u'\}$  в обходе  $R$  проходится больше одного раза.

Представим обход  $R$  в виде

$$R = R_{\text{in}}u_0uR_u^1uu'R_{u'}^1u'R_u^2uu'R_{u'}^2 \dots uu'R_{\text{fin}},$$

где  $R_{\text{in}}$  — подмаршрут, соединяющий начальную вершину обхода  $R$  с вершиной  $u_0$ ,  $R_{\text{fin}}$  — подмаршрут, соединяющий вершину  $u'$  с конечной вершиной обхода  $R$ ,  $R_u^i$  — подмаршруты обхода  $R$  с началом и концом в  $u$ , а  $R_{u'}^i$  — с началом и концом в  $u'$ .

Заметим, что второй раз ребро  $\{u, u'\}$  не может быть пройдено от  $u$  к  $u'$ , так как иначе после прохождения ребра от  $u$  к  $u'$  мы должны попасть из  $u'$  в  $u$  по некоторому подмаршруту  $R(u', u)$  маршрута  $R$ , а тогда в составе маршрута  $uu'R(u', u)$  будет цикл, что невозможно для дерева  $T$ . Таким образом, в составе  $R$  ребро  $\{u, u'\}$  второй раз будет проходиться от  $u'$  в  $u$ .

Теперь построим маршрут  $R_{\text{in}}u_0uR_u^1R_u^2 \dots R_u^s uu'R_{u'}^1R_{u'}^2 \dots R_{u'}^s R_{\text{fin}}$ . Этот маршрут является обходом, так как он содержит все ребра, пройденные в составе  $R$ , а значит, все ребра дерева  $T$ . Его длина меньше, чем у  $R$ , что невозможно, ибо  $R$  минимален. Таким образом, получили противоречие. И значит, наше предположение о том, что ребра, проходимые один раз, не образуют в  $T$  цепь, неверно. Таким образом, получаем, что в составе обхода  $R$  есть цепь  $P$ , состоящая из ребер, проходимых один раз.

Длина цепи из один раз проходимых ребер равна  $k$ . Но  $k \leq d$ , так как  $d$  — наибольшая длина цепи в дереве  $T$ .

Пусть  $s_{m-k}$  — длина части обхода  $R$ , проходимая по ребрам кратности  $\geq 2$  в  $R$ . Тогда  $2m > r = s_{m-k} + k \geq 2(m-k) + k = 2m - k \geq 2m - d$ . Итак, каждый обход дерева  $T$  имеет длину не меньше, чем  $2m - d$ . Следовательно,  $2m - d$  — это минимальная возможная длина обхода дерева  $T$ . Покажем, что обход длины  $2m - d$  существует.

Изобразим дерево  $T$  следующим образом. Пусть  $P_d$  — цепь длины  $d$  в дереве  $T$ ,  $v_i \in P_d, i = \overline{0, d-1}$ .

Выберем висячую вершину  $v_0 \in P_d$  в качестве корневой. Так как  $d$  — расстояние от вершины  $v_0$  до наиболее удаленной от нее вершины дерева  $T$  (другая висячая вершина цепи  $P_d$ ), припишем уровень  $i$  каждой вершине  $v_i$  цепи  $P_d$ , нумеруя их снизу вверх числами  $0, 1, \dots, d-1$ . Каждая вершина  $v_i$  может быть смежна с некоторыми вершинами, не входящими в цепь  $P_d$ , они, в свою очередь, с другими вершинами, и т.д.

Таким образом, каждая вершина  $v_i \in P_d, i = \overline{1, d-2}$ , является корнем некоторого дерева  $T_i$  (среди этих деревьев могут быть пустые).

Построим обход  $v_0 v_1 T_1 v_1 v_2 T_2 \dots v_{d-3} v_{d-2} T_{d-2} v_{d-2} v_{d-1}$ .

Как известно (лемма Тарри), если граф  $G$  — связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении. Таким образом, каждое дерево  $T_i$  имеет гарантированный обход длины, равной удвоенному числу его ребер, причем начинается и заканчивается он в одной и той же вершине  $v_i \in P_d, i = \overline{1, d-2}$  графа  $T$ .

Отсюда и следует доказываемое утверждение. Получаем, что длина построенного обхода дерева  $T$  с  $m$  ребрами и диаметром  $d$  равна  $2m - d$ . Причем этот обход минимален. ■

Звезда — это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с  $m$  ребрами будем обозначать  $S_m$ .

**Следствие.** Для звезды  $S_m$  имеем  $p(S_m) = 2m - 2$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука. Физматлит, 1997.
- [2] Карманова Е. О. О конгруэнциях цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. Саратов, 1 июля 2010 г. — Саратов: Изд-во СГУ, 2010. — С. 70–74.

## Свойства шаблонов минимизации полиномиальных форм булевых функций

*К. Д. Кириченко*

constkir@gmail.com

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск

Одной из актуальных задач дискретной математики является задача нахождения и минимизации представлений конечнозначных, и в частности, булевых функций. В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении булевых функций многочленами. В теории булевых функций такие представления носят название полиномиальных нормальных форм (ПНФ).

Сформулируем некоторые определения. Полиномиальной нормальной формой булевой функции  $f(z_1, \dots, z_n)$  будем называть представление функции  $f(z_1, \dots, z_n)$  вида  $\sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^n (y_j^i z_j \oplus x_j^i \bar{z}_j)$ . Здесь  $x_j^i$  и  $y_j^i$  — это коэффициенты из поля  $Z_2$ , при подстановке которых каждая скобка обращается либо в  $z_i$ , либо в  $\bar{z}_i$ , либо в 1.

Сложностью ПНФ  $\sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^n (y_j^i z_j \oplus x_j^i \bar{z}_j)$  будем называть число слагаемых  $s$ .

Сложностью булевой функции  $L(f)$  в классе ПНФ будем называть минимум из сложностей ПНФ, представляющих данную функцию.

Функцией Шеннона  $L(n)$  сложности булевых функций в классе ПНФ будем называть максимум из сложностей по всем функциям  $n$  переменных.

Для получения оценок  $L(n)$  был разработан метод шаблонов, идея которого заключается в том, что по ПНФ с неопределенными коэффициентами составляется система уравнений, после чего подбирается некоторая подстановка, разбивающая систему на подсистемы, которые могут быть решены итерационно. При этом факт наличия решения каждой подсистемы не зависит от решения предыдущих подсистем. Сформулируем эту идею более строго.

Системой уравнений полиномиальной нормальной формы будем называть систему из  $2^n$  уравнений следующего вида

$$R = \begin{cases} y_1^1 y_2^1 \cdots y_n^1 \oplus y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \dots \oplus y_1^s y_2^s \cdots y_n^s = f(1, 1, \dots, 1) \\ x_1^1 y_2^1 \cdots y_n^1 \oplus x_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \dots \oplus x_1^s y_2^s \cdots y_n^s = f(0, 1, \dots, 1) \\ y_1^1 x_2^1 \cdots y_n^1 \oplus y_1^2 x_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \dots \oplus y_1^s x_2^s \cdots y_n^s = f(1, 0, \dots, 1) \\ x_1^1 x_2^1 \cdots y_n^1 \oplus x_1^2 x_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \dots \oplus x_1^s x_2^s \cdots y_n^s = f(0, 0, \dots, 1) \\ \dots \\ x_1^1 x_2^1 \cdots x_n^1 \oplus x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \oplus \dots \oplus x_1^s x_2^s \cdots x_n^s = f(0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Легко увидеть, что эта система может быть получена в результате подстановки в формулу ПНФ всех различных двоичных наборов. Уравнение, полученное подстановкой набора  $\tilde{\tau}$  в ПНФ с неопределенными коэффициентами, обозначим  $R_{\tilde{\tau}}$ .

Шаблон  $\langle s(n), \sigma \rangle$  будем называть такую константу  $s(n)$ , зависящую от числа переменных булевой функции  $n$ , и такую подстановку  $\sigma$ , заменяющую некоторые из переменных системы  $R$  на некоторые термы, после применения которой система  $R(\sigma)$  может быть разделена на подсистемы  $R^0(\sigma), \dots, R^k(\sigma)$ , такие, что каждый многочлен  $R_{\tilde{\tau}}^i(\sigma)$  представляется в виде  $R_{\tilde{\tau}}^i(\sigma) = L_{\tilde{\tau}}^i \oplus P_{\tilde{\tau}}^i$ , причем  $L_{\tilde{\tau}}^i$  — это многочлен первой степени, и все переменные, входящие в  $L^i$  (линейные части подсистемы  $R^i(\sigma)$ ), не встречаются в  $R^0(\sigma), \dots, R^{i-1}(\sigma)$ .

Мерой универсальности шаблона будем называть сумму рангов его линейных частей:  $U(\langle s(n), \sigma \rangle) = \sum_{i=1}^k \text{rang}(L^i)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\langle s(n), \sigma \rangle$  некоторый шаблон. Тогда выполняется неравенство

$$L(n) \leq s(n) + 2^n - U(\langle s(n), \sigma \rangle).$$

Было найдено два вида подстановок, обладающих хорошими свойствами и удовлетворяющих введенному определению. Они были названы шаблонами первого и второго рода.

Для определения шаблона первого рода выберем произвольный набор  $\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^s$  из  $s$  булевых векторов длины  $n$ . Будем называть его векторным представлением шаблона первого рода. Сам шаблон будет определяться следующим образом. Если  $\alpha_j^i = 1$ , то заменяем  $y_j^i$  на 1,  $x_j^i$  оставляем без изменения. Если  $\alpha_j^i = 0$ , то заменяем  $y_j^i$  на 0, а  $x_j^i$  на 1.

С использованием шаблонов первого рода ранее была получена верхняя оценка сложности функции Шеннона сложности булевых функций в классе ПНФ [1]:

$$L(n) \leq 2^n \cdot \frac{2(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Попытки дальнейшего улучшения верхней оценки с использованием шаблонов первого рода приводят к необходимости нахождения чисел Турана [2]  $T(n, k + 1, k)$ , где  $k$  лежит в окрестности  $\frac{n}{2}$ , что на сегодня представляется довольно затруднительным [3]. В связи с этим рассматривается другой вид подстановок.

Введем определение шаблона второго рода. Для этого выберем произвольный набор  $\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^{s/2}$  из  $s/2$  булевых векторов длины  $n$ . Будем называть его векторным представлением шаблона второго рода. Сам шаблон будет определяться следующим образом. Если  $\alpha_j^i = 1$ , то заменяем  $y_j^{2^{i-1}}$  на 1,  $x_j^{2^{i-1}}$  на  $t_j^i$ ,  $y_j^{2^i}$  на 1,  $x_j^{2^i}$  на  $t_j^i \oplus 1$ . Если  $\alpha_j^i = 0$ , то заменяем  $y_j^{2^{i-1}}$  и  $y_j^{2^i}$  на 0, а  $x_j^{2^{i-1}}$  и  $x_j^{2^i}$  на 1.

Для исследования свойств шаблонов второго рода рассмотрим класс матриц специального вида, которые будут определены далее.

Обозначим за  $E_{nk}$  квадратную матрицу размера  $\binom{n}{k}$ , у которой на побочной диагонали находятся единицы, а остальные элементы нули.

Матрицей биномиальных квадратов  $B_{nk}$  будем называть матрицу с коэффициентами из поля  $Z_2$ , состоящую из  $\binom{n}{k+1}$  столбцов и  $\binom{n}{k}$  строк, которая определяется следующими соотношениями: для  $k \geq n$  и  $k < 0$  матрица пуста (содержит ноль строк и столбцов). Для остальных значений  $k$  матрица имеет вид

$$B_{nk} = \begin{pmatrix} E_{n-1,k} & B_{n-1,k} \\ B_{n-1,k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица может быть определена еще одним способом. Каждой строке матрицы поставим в соответствие двоичный набор длины  $n$  веса  $k$ , упорядочив все наборы в порядке лексикографического возрастания. Каждому столбцу матрицы поставим в соответствие двоичный набор длины  $n$  веса  $k + 1$ , упорядочив все столбцы в порядке лексикографического убывания. Тогда  $b_{ij} = 1$ , если набор, соответствующий строке  $i$ , меньше набора, соответствующего столбцу  $j$ .



Такого рода матрицы также рассматривались в связи с задачей Турана, однако при этом изучалась глубина матрицы, нас же будут интересовать ее алгебраические свойства, в частности ранг.

Пусть  $V$  — некоторое множество двоичных наборов длины  $n$  веса  $k + 1$ . Обозначим  $B_{nk}(V)$  подматрицу матрицы  $B_{nk}$ , состоящую только из столбцов, соответствующих наборам из  $V$ , и из всех строк.

Пусть  $\tilde{\alpha}$  — некоторый набор длины  $n$  веса  $k + 1$ . Обозначим  $S(\tilde{\alpha})$  множество наборов длины  $n$  веса  $k$ , меньших  $\tilde{\alpha}$ . Если  $V$  — это некоторое множество наборов, то  $S(V) = \bigcup_{\tilde{\alpha} \in V} S(\tilde{\alpha})$ .

**Теорема 2.** Пусть  $T$  есть некоторый шаблон второго рода, состоящий из векторов длины  $n$  веса  $k + 2$ . Тогда мера универсальности шаблона  $T$  равна рангу матрицы  $B_{nk}(S(T))$ .

В связи с этим возникает задача нахождения ранга для произвольной подматрицы  $B_{nk}$ . Следующая теорема дает один из возможных вариантов решения этой задачи.

Пусть  $V$  — некоторое множество наборов длины  $n$  веса  $k$ , тогда индуцированным множеством  $I_{k+1}(V)$  будем называть максимальное множество наборов длины  $n$  веса  $k + 1$ , такое, что  $S(I_{k+1}(V)) \subseteq V$ .

При этом для  $r > k + 1$  определим  $I_r(V) = I_r(I_{r-1}(V))$ .

**Теорема 3.** Пусть  $V$  — некоторое множество наборов длины  $n$  веса  $k$ . Тогда

$$\text{rang}(B_{n,k-1}(V)) = \min_{V \subseteq W \subseteq P_{k+1}^n} \sum_{j=k+1}^n (-1)^{j-k-1} I_j(W).$$

Данная теорема, возможно, позволит находить меры универсальности для различных шаблонов второго рода, что может позволить улучшать верхние оценки сложности ПНФ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00476а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 81–88.
- [2] Turan P. Reseach Problems // Magyar Tud. Acad. Mat. — Kutato Int. Kozl. — 1961. — V. 6. — P. 417–423.

- [3] *Ruszinko M.* Turan Systems // Handbook of Combinatorial Designs. — Taylor and Francis Group, 2007. — P. 649–651.

**Бикритериальные задачи обслуживания  
mobile-процессором рассредоточенных  
в одномерной рабочей зоне объектов**

*Д. И. Коган, Ю. С. Федосенко, Н. А. Дуничкина*

kdi\_41@mail.ru, fds@aquasci-nnov.ru,  
nadezhda.dunichkina@gmail.com

Московский государственный  
университет приборостроения и информатики;  
Волжская государственная академия водного транспорта,  
Нижний Новгород

Рассматриваются бикритериальные модификации изученных в [1] однокритериальных задач обслуживания группы стационарных объектов, рассредоточенных вдоль одномерной рабочей зоны перемещающегося процессора. Необходимость выполняемого обобщения продиктована требованиями совершенствования управления транспортно-технологическими системами, в частности при решении задач оперативного планирования снабжения топливом группы плавучих дизель-электрических добывающих комплексов, дислоцированных в крупномасштабном русловом полигоне [2].

Считается заданной группа  $O_n = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$  стационарных объектов, расположенных в рабочей зоне  $\Xi$  обслуживающего процессора  $P$ . Зона  $\Xi$  представляет собой отрезок  $L$ , начальная точка  $A$  которого является базовой для процессора; объекты пронумерованы в порядке возрастания их расстояний от точки  $A$ ; конечная точка  $B$  отрезка  $L$  является местом расположения объекта  $o_n$ . Из точки  $A$ , начиная от момента времени  $t = 0$ , процессор поступательно перемещается к конечной точке  $B$  (рейс  $\lambda_+$ ), а затем, достигнув ее, также поступательно возвращается в точку  $A$  (рейс  $\lambda_-$ ).

При реализации цикла  $\lambda_+ \lambda_-$  процессор выполняет обслуживание всех объектов группы  $O_n$ . Часть объектов обслуживается в рейсе  $\lambda_+$ , остальные объекты — в рейсе  $\lambda_-$ . Обслуживание каждого объекта реализуется однократно, без прерываний. С каждым объектом  $o_j$  ас-

социруются две монотонно возрастающие функции индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$  и  $\psi_j(t)$ , выражающие величины потерь, зависящие от момента завершения его обслуживания.

Примем обозначения:  $1, 2, \dots, n$  — точки отрезка  $L$ , в которых расположены соответственно объекты  $o_1, o_2, \dots, o_n$  (точки  $n$  и  $B$  совпадают);  $\tau_j$  — продолжительность обслуживания процессором  $P$  объекта  $o_j$ ;  $\gamma_{j-1,j}$  и  $\gamma_{j,j-1}$  — затраты времени на перемещения процессора между точками  $j-1$  и  $j$  в рейсах  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  соответственно ( $j = \overline{1, n}$ ), при этом  $\gamma_{0,1}$  и  $\gamma_{1,0}$  — затраты времени на перемещения процессора между точкой  $A$  и точкой  $1$  в рейсах  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$ . Параметры  $\tau_j, \gamma_{j-1,j}, \gamma_{j,j-1}$  считаем принимающими целочисленные положительные значения.

Стратегией обслуживания именуем произвольное подмножество элементов  $V$  из совокупности  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ; объекты  $o_j, j \in V$  обслуживаются процессором  $P$  в рейсе  $\lambda_+$ , все остальные объекты — в рейсе  $\lambda_-$ . Обслуживание объекта  $o_j, j \in N$  начинается от момента прибытия процессора в точку  $j$  при реализации определяемого стратегией  $V$  рейса; завершив обслуживание, процессор  $P$  продолжает поступательное движение. Любая стратегия однозначно определяет моменты начала и завершения обслуживания каждого из объектов. Для объекта  $o_j$  через  $t_j^*(V)$  обозначим момент завершения его обслуживания при реализации стратегии  $V$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Рассматриваются следующие бикритериальные задачи:

$$\min_{V \subseteq N} \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \psi_j(t_j^*(V)) \right), \quad (1)$$

$$\min_{V \subseteq N} \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \varphi_j(t_j^*(V)) \right), \quad (2)$$

$$\min_{V \subseteq N} \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V)), \sum_{j=1}^n \psi_j(t_j^*(V)) \right), \quad (3)$$

$$\min_{V \subseteq N} \left( \max_j \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \psi_j(t_j^*(V)) \right). \quad (4)$$

Задача (2) — важный частный случай задачи (1), возникающий в приложениях, когда функции штрафа по каждому объекту совпадают, т. е.  $\varphi_j(t) = \psi_j(t), j = \overline{1, n}$ .

Принимается концепция решения, предусматривающая построение для каждой из введенных задач полной совокупности эффективных оценок  $E$  с одновременным обеспечением возможности синтеза по любой выбираемой в  $E$  оценке порождающей ее Парето-оптимальной стратегии [3, 4].

Конструируются решающие алгоритмы, основанные на построении полных совокупностей эффективных оценок методом динамического программирования в его бикритериальном обобщении [5, 6].

Известно [1], что однокритериальная задача  $\min_{V \subseteq N} (\max_j \varphi_j(t_j^*(V)))$  разрешима в полиномиально зависящем от  $n$  времени; в случае линейности всех функций индивидуального штрафа полиномиально разрешима и задача  $\min_{V \subseteq N} (\sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V)))$ .

Для задач (2) и (3) имеют место следующие утверждения.

**Теорема 1.** Для задачи (2) с линейными функциями индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , произвольным натуральным константам  $C_1$  и  $C_2$ , существует ли стратегия обслуживания  $V^*$ , одновременно удовлетворяющая условиям  $\sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V^*)) \leq C_1$  и  $\max_j \varphi_j(t_j^*(V)) \leq C_2$ , NP-трудна.

**Теорема 2.** Для задачи (3) с линейными функциями индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$ ,  $\psi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , произвольным натуральным константам  $C_1$  и  $C_2$ , существует ли стратегия обслуживания  $V^*$ , одновременно удовлетворяющая условиям  $\sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V^*)) \leq C_1$  и  $\sum_{j=1}^n \psi_j(t_j^*(V)) \leq C_2$ , NP-трудна.

Для задачи (4) аналогичная проблема оказывается существенно более простой. Строится имеющий линейно зависящую от  $n$  гарантированную оценку числа выполняемых элементарных операций алгоритм определения по произвольным натуральным константам  $C_1$  и  $C_2$ , существует ли стратегия обслуживания  $V^*$ , одновременно удовлетворяющая условиям  $\max_j \varphi_j(t_j^*(V^*)) \leq C_1$  и  $\max_j \psi_j(t_j^*(V^*)) \leq C_2$ .

**Теорема 3.** Задача (1) с линейными функциями индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$ ,  $\psi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и лексикографически упорядоченными критериями (критерий  $\sum_{j=1}^n \varphi_j(t_j^*(V))$  — ведущий) полиномиально разрешима. Задача (2) с линейными функциями индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и лексикографически упорядоченными критериями (критерий  $\max_j \varphi_j(t_j^*(V))$  — ведущий) NP-трудна.

**Теорема 4.** Задача (3) с линейными функциями индивидуального штрафа  $\varphi_j(t)$ ,  $\psi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и лексикографически упорядоченными критериями полиномиально разрешима.

**Теорема 5.** Задача (4) с лексикографически упорядоченными критериями полиномиально разрешима.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коган Д. И., Федосенко Ю. С. Задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания стационарных объектов в одномерной рабочей зоне процессора // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 3. — С. 50–62.
- [2] Коган Д. И., Федосенко Ю. С., Шлюгаев А. Ю. Задача одностадийного обслуживания добывающих комплексов в крупномасштабной акватории // Труды V Московской Международной конференции по исследованию операций (ORM2007). — М.: МАКС Пресс, 2007. — С. 60–62.
- [3] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007.
- [4] Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 1. — С. 3–33.
- [5] Klamroth K., Wiecek M. Dynamic Programming Approaches to the Multiple Criteria Knapsack Problem. Technical Report #666. Dept. of Math. Sc., Clemson University. — Clemson: SC, 1998.
- [6] Коган Д. И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2005.

### Проверка методом передаточной функции одной перечислительной теоремы А. М. Каменецкого

*Л. М. Коганов*

Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН,  
Москва

А. М. Каменецкий в [1, теорема 4] анонсировал без доказательства результаты для производящих функций перечисляющих последовательностей соответственно несократимых (н. с.) и циклически несократимых (ц. н. с.) слов [2, с. 14, 23] в вообще говоря асимметричном

алфавите  $A \cup A^{-1} \cup B$  конечнопорождённой свободной группы ранга  $k + l$  с семейством свободных образующих  $A \cup B$ , где

$$A = \{a_1, \dots, a_k\}, \quad A^{-1} = \{a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}\}, \quad B = \{b_1, \dots, b_l\}.$$

При этом случай  $l = 0$  соответствует симметричному алфавиту, для которого обе перечислительные задачи (первая почти очевидна) ранее решались. Как обычно, перечисляющим параметром служит длина  $n$  слова.

Отметим, что:

а) обобщение Каменецкого в некотором смысле максимально: при присоединении к какой-то  $b_s$  обратного  $b_s^{-1}$  пара  $b_s, b_s^{-1}$  переходит в множество  $A \cup A^{-1}$  образующих букв, входящих в алфавит вместе с обратными им;

б) при  $k = 1, l = 2$  получаем из первой формулы цитированной теоремы 4 Каменецкого (промежуточный, но вполне достаточный для решения) результат задачи 2.4.6 (автор Ласло Ловас) из [3, с. 82, 338], при этом метки-символы (не числа!) 1 и 2 соответствуют  $a_1$  и  $a_1^{-1}$ , а метки-символы 3 и 4 — образующим  $b_1$  и  $b_2$ ;

с) вторая и третья формулы указанной теоремы 4 Каменецкого равносильны: вторая есть результат нахождения в явном виде коэффициента при  $x^n$  в маклореновском разложении правой части третьей, а третья вытекает из второй умножением обеих частей на  $x^n$  с последующим суммированием при  $n = 1, 2, \dots$  (по всему натуральному ряду).

Автором настоящей публикации показано, что и первая, и третья формулы Каменецкого из его указанной теоремы 4 в [1] могут быть получены стандартной техникой слияния когерентных состояний [4] (и несвязанных в случае пар взаимно обратных элементов, а затем попарно связанных в  $A \cup A^{-1}$ -множестве; и связанных первоначально попарно в  $B$ -множестве) в методе автора [5, 6] переносной функции в рациональном перечислении.

Получение третьей формулы теоремы 4 Каменецкого резко упрощается при использовании пакета символьных выкладок типа Maple.

Принципиальных трудностей проверка указанных формул цитированной теоремы 4 А. М. Каменецкого не содержит.

Автор сердечно благодарен Л. Н. Бондаренко (кафедра высшей и прикладной математики Пензенского ГУ) за ряд весьма полезных

комментариев и упрощений, а также за существенную информационную поддержку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Каменецкий А. М.* Теория детерминантных ладейных полиномов и детерминантов прямоугольных матриц с приложениями к перечислительной комбинаторике // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2010. — С. 233–236.
- [2] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
- [3] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
- [4] *Коганов Л. М.* Развитие метода трансфер-матрицы в перечислительной комбинаторике. II: Операция слияния когерентных состояний // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2010. — С. 236–239.
- [5] *Коганов Л. М.* Передаточная функция в перечислительной комбинаторике // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008 г.) — Казань: Отечество, 2008. — С. 49.
- [6] *Коганов Л. М.* Развитие метода трансфер-матрицы в перечислительной комбинаторике // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция, Москва, 6–9 апреля 2009 г.: Труды. — М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — С. 130–131.

## О продолжениях частичных полигонов

*И. Б. Кожухов, Ю. И. Кожухова*

kozuhov\_i\_b@mail.ru

Московский государственный институт электронной техники

*Полигоном над полугруппой  $S$*  (или  $S$ -полигоном) называется (см. [1]) множество  $X$ , на котором действует полугруппа  $S$ , т.е. определено отображение  $X \times S \rightarrow X$ ,  $(x, s) \mapsto xs$ , удовлетворяющее условию  $x(st) = (xs)t$  при  $x \in X$ ,  $s, t \in S$ . Полигон над полугруппой  $S$  являет-

ся универсальной алгеброй, в которой операциями являются отображения  $\varphi_a : x \mapsto xa$  ( $a \in S$ ). Кроме того, полигон  $X$  над полугруппой  $S$  — это алгебраическая модель автомата без выхода (см. [2]), здесь  $X$  — множество состояний, а  $S$  — множество входных сигналов.

*Частичный полигон* над полугруппой  $S$  задается частичным отображением  $X \times S \rightarrow X$  (т.е. отображением, определенным, возможно, не для всех пар  $(x, s)$ ), причем для любых  $x \in X$ ,  $s, t \in S$  произведение  $x(st)$  существует в том и только том случае, если существует  $(xs)t$ , и в этом случае  $x(st) = (xs)t$ . Частичный полигон — это частичная универсальная алгебра в смысле [3]. Автоматная интерпретация заключается в следующем: если произведение  $xs$  не определено, то автомат, находящийся в состоянии  $x$  и получивший на вход сигнал  $s$ , останавливается.

В теории частичных алгебр важным является вопрос о возможности продолжения частичной операции до полной (всюду определенной) с сохранением тех или иных свойств. Будем говорить, что *частичный полигон продолжается до полного*, если после продолжения частичного отображения  $X \times S \rightarrow X$  до полного равенство  $x(st) = (xs)t$  будет выполнено для всех  $x \in X$ ,  $s, t \in S$ .

Не всякий частичный полигон продолжается до полного. Простейшим примером может служить частичный полигон  $X = \{1, 2, 3\}$  над полугруппой

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} \right\}.$$

В связи с этим примером возникают вопросы:

- (1) в каких случаях частичный  $S$ -полигон продолжается до полного?
- (2) для каких полугрупп  $S$  любой частичный  $S$ -полигон продолжается до полного?

В работе [4] были получены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия на частичный  $S$ -полигон  $X$ , чтобы он продолжался до полного, в случае когда  $S$  — коммутативная полугруппа идемпотентов, — это дает частичный ответ на вопрос (1).

Напомним, что полугруппа  $S$  называется *простой справа*, если  $aS = S$  для всех  $a \in S$ . Нетрудно проверить, что всякий частичный  $S$ -полигон  $X$  является полным, если  $S$  простая справа и  $XS \neq \emptyset$ .

Основной результат работы:



**Теорема 1.** Пусть  $S$  — полугруппа, представимая в виде объединения правых идеалов  $R_i$  ( $i \in I$ ), являющихся простыми справа полугруппами. Тогда всякий частичный  $S$ -полигон продолжается до полного.

Напомним, что *вполне простой полугруппой* называется простая полугруппа, содержащая примитивный идемпотент. Так как, согласно теореме Супкевича–Риса, вполне простая полугруппа изоморфна регулярной рисовской матричной полугруппе над группой (см. [5], теор. 3.5), то мы получаем следствие из теоремы:

**Следствие 1.** Всякий частичный  $S$ -полигон над вполне простой полугруппой  $S$  продолжается до полного  $S$ -полигона.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Kilr M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. — Berlin, N.Y.: Walter de Gruyter, 2000.
- [2] *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Д., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высш. шк., 1994.
- [3] *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Частичные алгебраические действия. — СПб.: Образование, 1991.
- [4] *Апраксина Т. В., Максимовский М. Ю.* Полигоны и частичные полигоны над полурешетками // Известия Саратовского университета (в печати).
- [5] *Клиффорд А. Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Том 1. — М.: Мир, 1972.

### О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов

*С. С. Коляда*

kolyadass@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

В работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов [1] в произвольных полных конечных базисах. Допускаются единичные произвольные константные неисправности на выходах элементов [2, 3, 4], когда в неисправ-

ное состояние может перейти ровно один элемент схемы, который вне зависимости от того, что подаётся на его входы, выдаёт некоторую булеву константу  $\delta$ , где  $\delta \in \{0, 1\}$ .

Пусть  $S$  — схема, реализующая в исправном состоянии булеву функцию  $f(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Схему  $S$  будем считать *неизбыточной*, если при переходе в любое неисправное состояние любого элемента эта схема реализует *нетривиальную* [5], то есть отличную от  $f(\tilde{x})$ , функцию неисправности  $g(\tilde{x})$ .

Множество наборов  $T = \{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_l\}$  называется *единичным проверяющим тестом* для схемы  $S$ , реализующей функцию  $f$ , если для любой нетривиальной функции неисправности  $g$  существует набор  $\tilde{\sigma}$  из  $T$  такой, что  $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ ; число  $l$  называется *длиной теста*.

**Теорема 1.** *Для любого функционально полного конечного базиса  $B$ , для любой булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 3$ , существует избыточная схема в базисе  $B$ , реализующая данную функцию и допускающая единичный проверяющий тест, длина которого не превосходит  $n + 3$ .*

Доказательство теоремы проводится конструктивно, то есть для произвольной булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  строится схема в базисе  $B$  и представляется единичный проверяющий тест, удовлетворяющий условиям теоремы.

Основная идея доказательства заключается в представлении (в зависимости от базиса) функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  полиномом Жегалкина  $P = K_1 \oplus \dots \oplus K_h \oplus c$  или в виде аналога полинома Жегалкина  $P' = D_1 \oplus \dots \oplus D_h \oplus c'$ , где  $D_i$  — дизъюнкция нескольких переменных.

Далее специальными блоками реализуются конъюнкция или дизъюнкция (в зависимости от базиса), отрицание и линейная функция, а затем из блоков строится схема, моделирующая соответствующее представление функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Аналогичная оценка для схем в базисе Жегалкина была получена в [6], однако метод построения легкотестируемых схем из [6] годится только для базисов, содержащих конъюнкцию и линейную функцию ( $x \oplus y$  или  $x \oplus y \oplus 1$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибер-

нетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1984. — Т. 51. — С. 270–360.
- [3] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука. Физматлит, 1988. — С. 5–25.
- [4] *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [5] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.
- [6] *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — № 1. — Р. 124–141.

## Реберные 1-расширения некоторых деревьев

*Д. Д. Комаров*

komarovdd@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

*Неориентированным графом* называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное множество (множество вершин), а  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на  $V$  (множество дуг).

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным реберным  $k$ -расширением* ( $k$  — натуральное)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

1.  $G^*$  является реберным  $k$ -расширением  $G$ , то есть граф  $G$  вкладывается в каждый подграф графа  $G^*$ , получающийся удалением любых его  $k$  ребер;
2.  $G^*$  содержит  $n$  вершин, то есть  $|V^*| = |V|$ ;
3.  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Ациклический связный граф называется *деревом*.

Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рас-

смаатривать как объединение  $k$  цепей  $P_1, \dots, P_k$  с общей концевой вершиной. Для однозначного задания сверхстройного дерева достаточно указать длины этих цепей:  $(l_1 - 1, \dots, l_k - 1)$ .

Среди деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов. Например, *цепь*  $P_n$  является частным случаем дерева. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи  $P_n$  есть цикл  $C_n$  (см. [1]).

Также *звезда* является частным случаем сверхстройного дерева (*звезда* — сверхстройное дерево, в котором нет вершин степени 2). Минимальное реберное 1-расширение звезды  $K_{1,k}$  единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев звезды со всеми остальными листьями звезды и между собой.

**Теорема 1.** Пусть граф  $G = (V, \alpha)$  состоит из двух звезд с соединенными центрами. Построим граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  из  $G$  по следующей схеме: выберем две произвольные вершины из  $V$  степени 1, расстояние между которыми равно 3; каждую из выбранных вершин соединим со всеми вершинами степени 1, расстояние до которых от выбранной вершины равно 3. Полученный граф  $G^*$  будет являться минимальным реберным 1-расширением графа  $G$ .

*Доказательство.* Доказательство того, что  $G^*$  является реберным расширением  $G$ , производится непосредственной проверкой.

Доказательство того, что  $G^*$  имеет минимальное количество ребер из всех реберных 1-расширений  $G$ , требует более детального рассмотрения различных случаев. Далее приведено лишь краткое доказательство. Пусть существует минимальное реберное 1-расширение графа  $G(V, \alpha)$  — граф  $G_1(V, \alpha_1)$ , причем количество дополнительных ребер меньше, чем у  $G^*(V, \alpha^*)$ . Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — центры звезд, из которых состоит граф  $G$ , степени  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Тогда, так как  $G_1$  является реберным 1-расширением графа  $G$ , при удалении любого ребра в полученном графе должны быть две смежные вершины, степени которых не менее, чем  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Рассмотрим случай удаления ребра, инцидентного  $c_1$  и  $c_2$ .

Рассмотрим несколько случаев. Пусть при вложении  $G$  в  $G^*$  без ребра, инцидентного  $c_1$  и  $c_2$ :

1. В качестве  $c_1$  и  $c_2$  выступают сами  $c_1$  и  $c_2$  — это невозможно, так как они не смежны.

2. Пусть в качестве  $c_1$  выступает  $c_1$ , а в качестве  $c_2$  — вершина  $d_k$  степени 1, смежная с  $c_1$  ( $p_2$  дополнительных ребер). Но при удалении ребра, инцидентного  $d_k$  и  $c_1$ , ни одна из этих двух вершин не сможет выступать в роли  $c_2$ . В роли  $c_2$  в таком случае может выступать сама  $c_2$ , но понадобится еще два дополнительных ребра (от  $c_1$  до одной из  $b_i$  (вершины степени 1, смежные с  $c_2$ ) и от  $c_2$  до одной из  $d_i$ ). Также еще надо будет соединить каждую из вершин  $d_i$ , кроме  $d_k$  и  $d_m$ , с  $c_2$ . Итого получается  $p_2 + p_1$  дополнительных ребер, это больше, чем в схеме для построения  $G^* - (p_2 + p_1 - 1)$ .
3. Пусть в качестве  $c_1$  выступает  $c_1$ , а в качестве  $c_2$  — вершина  $b_k$  степени 1, смежная с  $c_2$ . Тогда вершина  $b_k$  в графе  $G_1(V, \alpha_1)$  должна быть соединена со всеми вершинами степени 1, смежными с  $c_2$  в графе  $G(V, \alpha)$  ( $p_2 - 1$  дополнительных ребер и еще 1 дополнительное ребро, чтобы обеспечить смежность  $b_k$  и  $c_1$ ). При удалении ребра, инцидентного  $b_k$  и  $c_2$ , понадобится еще два дополнительных ребра (от  $c_1$  до одной из  $b_i$  и от  $c_2$  до одной из  $d_i$ ). Также еще надо будет соединить каждую из вершин  $d_i$  с  $c_2$ . Итого получается  $p_2 + p_1$  дополнительных ребер, это больше, чем в схеме для построения  $G^* - (p_2 + p_1 - 1)$ .
4. Пусть в качестве  $c_1$  выступает  $b_k$  степени 1, смежная с  $c_2$ , а в качестве  $c_2$  — вершина  $d_n$  степени 1, смежная с  $c_1$ . При такой схеме понадобится по крайней мере  $(p_2 + p_1 - 1)$  дополнительных ребер — ровно столько, сколько и в схеме для построения  $G^*$ . Отсюда получаем, что  $G^*$  имеет столько же дополнительных ребер, что и минимальное реберное 1-расширение. ■

**Теорема 2.** Пусть граф  $G = (V, \alpha)$  — сверхстройное дерево, являющееся объединением  $k$  цепей длины 2 и  $n$  ( $n > 1$ ) цепей длины 1. Построим граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  из  $G$  по следующей схеме: соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если  $n$  четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если  $n$  нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трех уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф  $G^*$  будет являться минимальным реберным 1-расширением графа  $G$ .

*Доказательство.* Доказательство того, что граф  $G^*$  является реберным 1-расширением графа  $G$ , можно провести непосредственной проверкой.

Доказательство того, что граф  $G^*$  имеет минимальное количество ребер из всех реберных 1-расширений  $G$ , требует более детального рассмотрения различных случаев. Далее приведена схема доказательства.

Пусть существует граф  $G_2(V, \alpha_2)$  — минимальное реберное 1-расширение графа  $G$ , причем с меньшим количеством ребер, чем у графа  $G^*$ . Пусть в графе  $G$  вершина максимальной степени  $s$  имеет степень  $s$ . Тогда граф  $G_2$  при удалении любого ребра должен содержать вершину  $b$ , степень которой не меньше, чем  $s$ .

Очевидно, что при вложении графа  $G$  в любой граф, полученный из  $G_2$  при удалении любого ребра, вершина  $s$  будет соответствовать самой себе, а иначе количество дополнительных ребер будет больше, чем в схеме для построения  $G^*$ .

Так как в  $G_2$  не может быть вершин степени меньше 2, то снизить количество дополнительных ребер по сравнению со схемой для  $G^*$  можно, только либо соединив попарно листья ветвей длины 2, либо листья ветвей длины 1 и 2.

Соединение попарно листьев ветвей длины 2 потребует еще 3 дополнительных ребра на каждую пару ветвей длины 2, что больше, чем в схеме для построения  $G^*$ .

Соединение попарно листьев ветвей длины 2 и 1 также потребует 3 дополнительных ребра для каждой тройки ветвей с длинами 2, 1 и 1, против 2 дополнительных ребер в схеме для построения  $G^*$ .

Отсюда делаем вывод, что уменьшить количество дополнительных ребер по сравнению со схемой для построения  $G^*$  нельзя. Получаем, что  $G^*$  — минимальное реберное 1-расширение графа  $G$ . ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. 25, № 9. — P. 875–884.

## О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в некотором базисе

Ю. А. Комбаров

yuri.kombarov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

### Введение

Минимальные реализации линейных булевых функций (т. е. функций, представимых в виде  $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$ , где  $\oplus$  означает сложение по модулю два, а  $c$  — произвольная булева константа) схемами из функциональных элементов [1] достаточно хорошо изучены. В работе [2] установлено, что  $L(c \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$  в базисе  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  и  $L(c \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 7n - 7$  в базисах  $\{x \& y, \bar{x}\}$  и  $\{x \vee y, \bar{x}\}$  (здесь через  $L(f)$  обозначается сложность реализации функции  $f$ , т. е. число функциональных элементов в минимальной схеме, реализующей  $f$ ). Дальнейшие результаты в этом направлении:  $L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$  в базисе  $\{\bar{x} \& y\}$  [3];  $L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$  в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$  [4];  $L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1) = 4n - 4$  при четных  $n$  и  $L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$  при нечетных  $n$  в базисе  $\{\bar{x} \& y, \bar{x}\}$  (см. в [5]). Во всех вышеприведенных работах устанавливается только сложность реализации линейных функций в различных базисах, вопрос об устройстве минимальных схем в них не рассматривается. В работе [6] установлено, что  $L(c \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 3n - 3$  в базисе  $\{\bar{x} \& y, \bar{x} \vee y\}$ , и показано, что все минимальные схемы в этом базисе имеют определенную блочную структуру.

### Основные определения и формулировка результатов

В данной работе рассматриваются минимальные реализации функций  $l_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  и  $\bar{l}_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$  в базисе  $B = \{E_1, \dots, E_k, E^-\}$ , где  $1 \leq k \leq 6$ , элементы  $E_1, \dots, E_k$  — различные двухвходовые функциональные элементы, реализующие одну из функций  $x \& y, x \vee y, \bar{x} \& y, \bar{x} \vee y, \overline{x \& y}, \overline{x \vee y}$ . Вес инвертора будем считать равным нулю, а вес любого двухвходового функционального элемента — равным единице.

Пусть  $S$  — схема в базисе  $B$ . Сумму весов всех входящих в нее элементов будем называть сложностью схемы и обозначать  $L(S)$ . Будем говорить, что  $S$  — минимальная схема для функции  $f$ , если  $S$  реализует  $f$ , причем для любой другой схемы  $S'$ , реализующей  $f$ , верно, что  $L(S) \leq L(S')$ , и среди всех схем, реализующих  $f$  и имеющих сложность  $L(S)$ , схема  $S$  содержит наименьшее количество элементов.

Пусть  $V$  — выход функционального элемента  $E_1$  или вход схемы, а  $W$  — вход функционального элемента  $E_2$ . Будем говорить, что *между элементами  $E_1$  и  $E_2$  (или между соответствующим входом схемы и  $E_2$ ) находится инвертор  $E^-$* , если  $V$  подается на вход  $E^-$ , а выход  $E^-$  подается на  $W$ . Будем говорить, что  $V$  *связан с  $W$* , если  $V$  подается на  $W$  или если между  $E_1$  (или входом схемы) и  $E_2$  есть инвертор. Будем называть двухвходовой функциональный элемент  $E$  *верхним*, если оба его входа связаны со входами схемы. Такой функциональный элемент существует в любой схеме, которая содержит хотя бы один элемент.

Будем говорить, что в схеме  $S$  можно *выделить стандартный блок*, если в ней можно выбрать две вершины (вершинами в данном случае будем называть входы схемы или выходы элементов)  $V_1, V_2$  и три двухвходовых функциональных элемента  $E_1, E_2$  и  $E_3$  так, что вершина  $V_1$  связана со входами элементов  $E_1$  и  $E_2$ , вершина  $V_2$  связана со входами  $E_1$  и  $E_2$ , выход элемента  $E_1$  связан со входом элемента  $E_3$ , выход элемента  $E_2$  связан со входом элемента  $E_3$ , выходы элементов  $E_1$  и  $E_2$  не связаны со входами никаких других элементов схемы  $S$  (кроме  $E_3$ ) и при подаче на вершины  $V_1$  и  $V_2$  функций  $x_1$  и  $x_2$  на выходе элемента  $E_3$  реализуется функция  $x_1 \oplus x_2$  или  $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ . Подсхему, состоящую из элементов  $E_1, E_2, E_3$ , а также всех инверторов, находящихся между вершиной  $V_1$  и входами элементов  $E_1$  и  $E_2$ , между вершиной  $V_2$  и входами элементов  $E_1$  и  $E_2$  и между выходами элементов  $E_1, E_2$  и входами элемента  $E_3$ , будем называть *стандартным блоком*. В следующей теореме устанавливается сложность реализации линейных булевых функций в базисе  $B$ .

**Теорема 1.** *Сложность реализации функций  $l_n = l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$  и  $\bar{l}_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$  в базисе  $B$  равна  $3n - 3$ .*

Теорема 1 следует из лемм 2 и 3.



**Лемма 2.**  $L(l_n) \leq 3n - 3$ ,  $L(\overline{l_n}) \leq 3n - 3$ .

*Доказательство.* Неравенства  $L(l_n) \leq 3n - 3$  и  $L(\overline{l_n}) \leq 3n - 3$  доказываются индукцией по  $n$ , поскольку  $l_n = l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \oplus x_n$ ,  $\overline{l_n} = \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n}$ , а линейная функция от двух переменных может быть реализована схемой в базисе  $B$  с весом, равным трем (эта схема является одним из стандартных блоков). ■

**Лемма 3.** Если  $S_n$  — минимальная схема, реализующая функцию  $l_n$  или  $\overline{l_n}$  в базисе  $B$ , то из схемы  $S_n$  можно удалить не менее трех двухвходовых элементов и, быть может, заменить несколько элементов на инверторы так, что получившаяся схема  $S_{n-1}$  будет реализовывать одну из функций  $l_{n-1}$ ,  $\overline{l_{n-1}}$  в базисе  $B$ , причем уменьшение сложности  $L(S_n)$  схемы  $S_n$  будет не меньше 3, то есть  $L(S_n) \geq L(S_{n-1}) + 3$ .

Доказательство леммы 3 проводится при помощи метода забивающих констант, предложенного в [2] и использованного также в [3, 4, 5, 6]. Из-за своего значительного объема доказательство этой леммы не приводится.

Основным результатом работы является следующая

**Теорема 4.** В любой минимальной схеме, реализующей одну из линейных булевых функций  $l_n$  и  $\overline{l_n}$  в базисе  $B$ , можно выделить  $n - 1$  непересекающихся стандартных блоков.

Теорема 4 дает описание минимальных схем из функциональных элементов в базисе  $B$ , реализующих одну из линейных булевых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляемых систем. — М.: МГУ, 1984.
- [2] Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — 1970. — С. 83–101.

- [3] *Редькин Н. П.* О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 31–38.
- [4] *Шкробела И. С.* О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$  // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, № 4. — С. 100–112.
- [5] *Редькин Н. П.* О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. — С. 11–19.
- [6] *Комбаров Ю. А.* О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x} \& y\}$  // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 145–149.

## Циклы длины девять в Рапсаке-графе

*Е. В. Константинова, А. Н. Медведев*

e\_konsta@math.nsc.ru, an\_medvedev@yahoo.com

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Граф Кэли  $P_n = (Sym_n, PR)$ ,  $n \geq 2$ , определенный на симметрической группе  $Sym_n$  перестановок  $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]$ , где  $\pi_i = \pi(i)$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ , с порождающим множеством  $PR = \{r_i \in Sym_n, 2 \leq i \leq n\}$  всех префикс-реверсалов  $r_i$ , меняющих порядок элементов внутри интервала  $[1, \dots, i]$ ,  $2 \leq i \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на нее справа:  $[\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_i = [\pi_i \dots \pi_1 \pi_{i+1} \dots \pi_n]$ , называют *Рапсаке-графом*. Данный граф получил свое имя благодаря Рапсаке-проблеме [3–5], состоящей в определении диаметра графа  $P_n$ ,  $n \geq 2$ . По-прежнему, Рапсаке-проблема является открытой, известны верхние и нижние оценки на диаметр графа, а также его точные значения для  $2 \leq n \leq 17$  [2].

Трудности, возникающие при решении Рапсаке-проблемы, связаны, в первую очередь, со сложной циклической структурой данного графа: Рапсаке-граф содержит все циклы длины  $l$ , где  $6 \leq l \leq n!$

[6, 7], в частности, он является гамильтоновым [8]. Естественным описанием циклов в Рапсак-графе является их представление в виде произведения порождающих элементов.

В [1] вводится следующее определение. *Формой цикла  $C_l$  длины  $l$*  в графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , называется последовательность префикс-реверсалов  $C_l = r_{i_1} \dots r_{i_l}$ , где  $2 \leq i_j \leq n$  и  $i_j \neq i_{j+1} ((j+1) \bmod l)$  для любого  $j \in \{1, \dots, l\}$ , таких, что  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ , где  $\pi \in Sym_n$ . Цикл  $C_l$  длины  $l$  также называют  $l$ -циклом, а под вершиной графа  $P_n$  понимается перестановка, которая этой вершине соответствует. Очевидно, что в зависимости от выбора вершины  $\pi$  и направления обхода любой  $l$ -цикл может быть представлен  $2l$  его формами. *Канонической формой цикла  $C_l$  длины  $l$*  называется форма с лексикографически максимальной (минимальной) последовательностью индексов  $i_1 \dots i_l$ .

На основе данного описания в [1] получена полная характеристика циклов длины шесть и семь.

**Теорема 1.** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , имеется  $n!/6$  независимых циклов длины шесть канонической формы  $C_6 = r_3 r_2 r_3 r_2 r_3 r_2$ .*

**Теорема 2.** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходит ровно  $7(n-3)$  различных циклов длины семь канонической формы  $C_7 = r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2} r_k r_2$ , где  $4 \leq k \leq n$ . В целом в графе имеется  $n!(n-3)$  различных циклов длины семь.*

Доказательство данных результатов опирается на иерархическое строение графа, которое состоит в следующем. Граф  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , содержит  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в каждой из которых множество вершин представлено как  $V_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i]$ , где  $\pi_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ ,  $1 \leq k \leq n-1\}$ ,  $|V_i| = (n-1)!$ , а множество ребер представлено как  $E_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], [\pi_1 \dots \pi_{n-1} i] r_j\}$ ,  $2 \leq j \leq n-1\}$ ,  $|E_i| = (n-1)!(n-2)/2$ . Любые две копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $P_{n-1}(j)$ ,  $i \neq j$ , соединяются  $(n-2)!$  ребрами вида  $\{[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j], [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i]\}$ , где

$$[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j] r_n = [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i].$$

Префикс-реверсалы  $r_j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , определяют внутренние ребра в каждой из  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , а префикс-реверсал  $r_n$  определяет внешние ребра между копиями.

В настоящей работе мы продолжаем исследовать циклы нечетной длины. Для циклов длины 9 получен следующий результат.

**Теорема 3.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходит  $O(n^3)$  различных циклов длины девять следующих канонических форм:

$$C_9^1 = r_k r_{k-1} r_i r_{k-1} r_k r_i r_{i-1} r_{i+1} r_2, \quad 3 \leq i \leq k-2, 5 \leq k \leq n; \quad (1)$$

$$C_9^2 = r_2 r_{k-i+2} r_k r_{i-2} r_{i-1} r_i r_{i-1} r_k r_{k-i+2}, \\ 4 \leq i \leq k-1, 5 \leq k \leq n; \quad (2)$$

$$C_9^3 = r_k r_{k-j+i-1} r_{k-1} r_{k-i} r_{k-j} r_k r_i r_j r_{j-i+1}, \\ 2 \leq i \leq j-1, i+1 \leq j \leq k-2, 5 \leq k \leq n; \quad (3)$$

$$C_9^4 = r_k r_{k-i} r_{k-1} r_{k-j+i-1} r_{k-j} r_k r_{j-i+1} r_j r_i, \\ 2 \leq i \leq j-1, i+1 \leq j \leq k-2, 5 \leq k \leq n; \quad (4)$$

$$C_9^5 = r_k r_{k-1} r_i r_{i-1} r_{k-1} r_k r_i r_{i+1} r_2, \quad 3 \leq i \leq k-2, 5 \leq k \leq n; \quad (5)$$

$$C_9^6 = r_k r_{k-1} r_{k-2} r_{k-1} r_{k-2} r_k r_3 r_k r_{k-2}, \quad 4 \leq k \leq n; \quad (6)$$

$$C_9^7 = r_k r_{k-1} r_{k-2} r_i r_k r_2 r_k r_i r_{k-1}, \quad 2 \leq i \leq k-3, 5 \leq k \leq n; \quad (7)$$

$$C_9^8 = r_k r_{k-j+i} r_k r_j r_i r_k r_{k-j} r_{k-i} r_{j-i}, \\ 2 \leq i \leq j-2, i+2 \leq j \leq k-2, 6 \leq k \leq n; \quad (8)$$

$$C_9^9 = r_k r_{k-j+i} r_{k-j} r_k r_j r_i r_k r_{k-i} r_{j-i}, \\ 2 \leq i \leq j-2, i+2 \leq j \leq k-2, 6 \leq k \leq n; \quad (9)$$

$$C_9^{10} = r_k r_{k-j+i} r_{k-j+1} r_k r_j r_i r_k r_{k-i+1} r_{j-i+1}, \\ 2 \leq i \leq j-1, i+1 \leq j \leq k-1, 4 \leq k \leq n; \quad (10)$$

$$C_9^{11} = r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-3} r_k r_3, \quad 5 \leq k \leq n. \quad (11)$$

Доказательство данного результата было также проведено на основе иерархического строения графа  $P_n$ .

Следующий результат был получен как обобщение результатов [1] и данной работы для циклов нечетной длины. Под записью  $(r_{i_1} \dots r_{i_j})^s$  будем понимать  $s \geq 1$  последовательных применений последовательности префикс-реверсалов  $r_{i_1} \dots r_{i_j}$ ,  $j \geq 2$ .

**Теорема 4.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходят циклы нечетной длины следующего канонического вида:

$$C_{2s+3}^1 = (r_k r_{k-1})^s r_{k-s} r_k r_s, \quad (12)$$

где  $2 \leq s \leq k-2$ ,  $4 \leq k \leq n$ ;

$$C_{2s+5}^2 = r_k (r_{k-1} r_{k-2})^s r_{s+1} r_k r_{k-s}, \quad (13)$$

где  $1 \leq s \leq k-2$ ,  $4 \leq k \leq n$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00244.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Константинова Е. В., Медведев А. Н. Циклы длины семь в Панкаке графе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 17, № 5. — С. 46–55.
- [2] Asai S., Kounoike Y., Shinano Y. and Kaneko K. Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster // LNCS. — 2006. — V. 4128. — P. 1114–1124.
- [3] Dweighter H. E. Elementary problems and solutions // Amer. Math. Monthly. — 1975. — V. 82, № 1. — P. 1010.
- [4] Gates W. H., Papadimitriou C. H. Bounds for sorting by prefix-reversal // Discrete Mathematics. — 1979. — V. 27. — P. 47–57.
- [5] Hyedari M. H., Sudborough I. H. On the diameter of the pancake network // J. Algorithms. — 1997. — V. 25, № 1. — P. 67–94.
- [6] Kanevsky A., Feng C. On the embedding of cycles in pancake graphs // Parallel computing. — 1995. — V. 21. — P. 923–936.
- [7] Sheu J. J., Tan J. J. M., Chu K. T. Cycle embedding in pancake interconnection networks // Proc. 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory. — Taiwan, 2006. — P. 85–92.
- [8] Zaks S. A new algorithm for generation of permutations // BIT. — 1984. — V. 24. — P. 196–204.

## Неисправности автоматов, сохраняющие их поведение

*О. М. Копытова*

omkop@list.ru

Донецкий национальный технический университет

### Введение

Конечные автоматы широко используются для описания поведения различных устройств и систем, от управляющих и вычислительных до организационных. Изменения в их структуре и поведении при повреждающих воздействиях окружающей среды во многих случаях адекватно описываются преобразованиями графа переходов, задаваемыми перебросками его дуг [1]. Если при этом не меняются отметки дуг (пары вход-выходных символов), то такие переброски можно понимать как «неисправности» функции переходов автомата. Известно [2], что в результате переброски ровно одной дуги в приведенном автомате получается автомат, не изоморфный исходному, т. е. поведение «неисправного» автомата в этом случае всегда отличается от поведения исправного. Таким образом, всякий приведенный автомат оказывается неустойчивым к переброске ровно одной дуги. Однако в ряде случаев автомат может быть устойчивым (по сохранению поведения) при перебросках более, чем одной дуги. В работе исследуются условия, при которых переброска  $k$  дуг в приведенном автомате, где  $k > 1$ , не изменяет его поведения. Найдены необходимые условия в терминах поведенческих и структурных свойств графа переходов автомата, при которых переброска нескольких дуг в приведенном автомате приводит к автомату, эквивалентному исходному. Показано, что переброска с сохранением поведения допустима только для некоторых дуг, удаление которых из графа переходов автомата приводит к его подграфу, обладающему определенной симметрией.

### Постановка задачи

Пусть  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$  — приведенный автомат Мили, где  $A, X, Y$  — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а  $\delta, \lambda$  — функции переходов и выходов. Автомат  $A$  будем также рассматривать как множество дуг  $E_A$ , где дуга — это четверка  $(s, x, y, t)$ ,

если  $\delta(s, x) = t$ ,  $\lambda(s, x) = y$ . Пусть  $e = (s, x', y', s_1)$  — дуга автомата  $A$ . Под переброской дуги  $e$ , например, в состояние  $s_2$  будем понимать замену этой дуги дугой  $(s, x', y', s_2)$ . При  $s_1 \neq s_2$  переброску назовём нетривиальной. Далее, если не оговорено противное, рассматриваются нетривиальные переброски. Пусть автомат  $A'$  получен из автомата  $A$  переброской некоторого множества дуг  $M \subseteq E_A$ , среди которых хотя бы одна переброска нетривиальная (такие множества переброек также называем нетривиальными). Задача заключается в том, чтобы определить условия, при которых автомат  $A'$  остается изоморфным исходному автомату  $A$ .

В [3] сформулированы достаточные условия сохранения поведения автоматом при переброске двух дуг, и показано, что для любого натурального  $k > 1$  существует приведенный автомат, в котором найдется подмножество из  $k$  дуг, одновременная переброска которых приводит к изоморфному автомату. В настоящей работе основное внимание направлено на получение необходимых условий, при которых возможна переброска дуг в общем случае.

### Основные результаты

**Переброска двух дуг.** Пусть автомат  $A'$  является результатом переброски некоторых двух различных дуг в автомате  $A$ , например, в автомате  $A'$  дуга  $(s, x', y', s_1)$  заменена дугой  $(s, x', y', s_2)$ , а дуга  $(t, x'', y'', t_1)$  заменена дугой  $(t, x'', y'', t_2)$ . Обозначим через  $\varepsilon$  отношение эквивалентности на множестве состояний прямой суммы автоматов  $A$  и  $A'$  (состояние  $s$  в автомате  $A'$  переименовывается в  $s'$ ). Состояния  $a$  и  $b$  автомата  $A$  называются  $k$ -эквивалентными, если для всякого входного слова  $p$  длины  $k$  выполняется равенство  $\lambda(a, p) = \lambda(b, p)$ .

**Лемма 1.** *Состояния  $s$  и  $t$  1-эквивалентны.*

**Следствие 1.** *В автомате с двумя состояниями невозможно перебросить две дуги таким образом, чтобы полученный автомат был изоморфен исходному.*

**Лемма 2.**  $(s, s') \notin \varepsilon, (t, t') \notin \varepsilon$ .

**Теорема 3.** *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *на перебрасываемых дугах вход-выходные отметки совпадают:  $x' = x''$ , причём  $x'$  есть начальная буква кратчайшего слова, различающего  $s$  и  $t$ ;*

2) состояния  $s$  и  $t$ , из которых перебрасываются дуги, различны.

Полученные необходимые условия сохранения автоматом поведения при перебросках двух дуг совместно с достаточными условиями из [3] позволяют выделять автоматы такой структуры, при которой возможна переброска, сохраняющая поведение автомата. Более того, на этой основе могут быть определены условия допустимой переброски  $2k$  дуг. В этом случае множество  $M$  перебрасываемых дуг имеет четную мощность и разбивается на такие пары дуг, для каждой из которых найденные условия выполняются независимо.

**Переброска  $k$  дуг.** Пусть  $M$  — множество перебрасываемых дуг в  $A$ ,  $|M| = k \geq 2$ , а  $M'$  — множество переброшенных дуг в  $A'$  и  $\tilde{M} = M \cup \varphi^{-1}(M')$ . Обозначим через  $A_M$  и  $A_{\tilde{M}}$  частичные автоматы, полученные из  $A$  в результате удаления всех дуг из множеств  $M$  и  $\tilde{M}$  соответственно.

**Утверждение 4.** Если  $\varphi$  — изоморфизм автомата  $A$  на  $A'$ , то  $\varphi$  — автоморфизм автомата  $A_{\tilde{M}}$ .

Частичный автомат  $R_u$  с выделенным в нем состоянием  $u$  называется идентификатором состояния  $s$  автомата  $A$ , если при любом гомоморфизме  $\varphi$  автомата  $R_u$  в автомат  $A$  выполняется равенство  $\varphi(u) = s$  [1]. Частичный автомат  $R_u$  назовем структурным идентификатором состояния  $s$ , если последнее равенство выполняется при любом изоморфном вложении  $R_u$  в  $A$ . Множество всех идентификаторов состояния  $s$  в автомате  $A$ , включая и структурные, обозначим  $I_s(A)$ .

**Утверждение 5.** Для любого состояния  $s$  из  $A$  справедливо  $I_s(A_M) \subseteq I_s(A)$ .

**Следствие 2.** Если  $\varphi$  — изоморфизм автомата  $A$  на  $A'$ ,  $\varphi(s) = t$  и  $s \neq t$ , то  $I_s(A_M) = I_t(A_M) = \emptyset$ .

Наличие идентификаторов в автомате  $A_M$  позволяет определить множество состояний автомата  $A$ , которые остаются неподвижными при любых изоморфизмах  $A$  в  $A'$  (т. е. при всевозможных перебросках дуг из  $M$ , сохраняющих поведение  $A$ ).

Множество автоморфизмов автомата  $A_M$  вместе с операцией их суперпозиции является группой. Обозначим ее  $G_M$ .



**Теорема 6.** Если автомат  $A'$ , полученный из  $A$  нетривиальной переброской дуг множества  $M$ , изоморфен  $A$ , то группа  $G_M$  нетривиальна.

Группа  $G_M$  определяет некоторое множество неподвижных состояний. В частности, из утверждения 6 и следствия 2 следует, что такими будут все те состояния автомата  $A$ , для которых множество идентификаторов в автомате  $A_M$  не пусто.

Одним из предельных случаев, когда неподвижны все состояния и группа  $G_M$  тривиальна, является следующий. Пусть  $\lambda_s^1$  — множество вход-выходных слов длины 1, порожденных состоянием  $s$  автомата  $A$ , которое будем отождествлять с соответствующим ему частичным автоматом.

**Следствие 3.** Если для любого  $s \in A$  выполняется  $\lambda_s^1 \in I_s(A)$ , то при любой переброске непустого множества дуг автоматы  $A$  и  $A'$  не изоморфны.

### Заключение

Полученные комбинаторно-алгебраические условия сохранения поведения при перебросках двух и более дуг позволяют выделить ряд структур автоматов, для которых это возможно. Например, можно указать графы переходов, содержащие в качестве неподвижного ядра сильно связные подавтоматы, а вне его — некоторое множество состояний и инцидентных им дуг, переброска которых не меняет поведения автомата. Это множество дуг определяет некоторую частичную симметрию исходного автомата, которая описывается определенной выше группой  $G_M$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Грунский И. С., Козловский В. А. Синтез и идентификация автоматов. — К.: Наукова думка, 2004.
- [2] Грунский И. С., Копытова О. М. О структуре контрольного эксперимента для определенно-диагностируемого автомата // Теория управляющих систем. — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 40–54.
- [3] Копытова О. М. О структуре автоматов, сохраняющих поведение при перебросках дуг // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М: Макс-Пресс, 2009. — С. 155–159.

## Поиск вставок в бактериальных генах

*Е. В. Коротков*

genekorotkov@gmail.com

Центр «Биоинженерия» РАН, Москва

В настоящей работе ставилась задача выявления потенциальных сдвигов рамки считывания в генах. Используемые ранее методы имеют определенные недостатки, которые ограничивают их применение и связаны с необходимостью использовать дополнительную информацию. Этим недостатком лишен разработанный ранее математический метод [1]. В данной работе этот метод улучшался для поиска потенциальных сдвигов фазы триплетной периодичности с целью учета возможных сдвигов рамки считывания, возникающих при вставках сравнительно больших фрагментов ДНК (>100 оснований ДНК). Усовершенствованным алгоритмом проверялось присутствие сравнительно длинных вставок (длиной, некратной трем основаниям ДНК) в бактериальных генах.

Будем считать, что задана кодирующая нуклеотидная последовательность  $S = \{s(k), k = 1, 2, \dots, L\}$ , где каждое значение  $s(k)$  выбирается из алфавита  $A = \{a, t, c, g\}$ ,  $L$  есть длина последовательности  $S$ , она кратна трем. Введем три рамки считывания в последовательности  $S$  и обозначим их  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Основание  $s(1)$  последовательности  $S$  является первым, третьим и вторым основанием кодона для рамки считывания  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  соответственно. Рамка считывания  $T_1$  реально существует в последовательности  $S$ , а рамки считывания  $T_2$  и  $T_3$  можно рассматривать как гипотетические. Определим также три матрицы триплетной периодичности  $M_1(i_1, i_2)$ ,  $M_2(i_1, i_2)$  и  $M_3(i_1, i_2)$ , которые представляют собой матрицы триплетной периодичности, определенные для рамок считывания  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  для фрагмента последовательности  $S$  в координатах от  $i_1$  до  $i_2$ . Обозначим этот фрагмент  $S(i_1, i_2)$ . Элементы матриц  $m_1(i, j)$ ,  $m_2(i, j)$  и  $m_3(i, j)$  показывают число оснований типа  $i$  в последовательности  $S$  ( $i = 1$  для  $a$ ,  $i = 2$  для  $t$ ,  $i = 3$  для  $c$ ,  $i = 4$  для  $g$ ), которые встречаются в  $j$ -й позиции кодона ( $j$  может быть равно 1, 2 или 3) для рамок считывания  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  соответственно. За начальную фазу матриц  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  возьмем координату  $k$  того основания из  $s(1)$ ,  $s(2)$  и  $s(3)$ , которое входит в первую позицию триплета рамок считывания

$T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  соответственно. Для матриц  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  начальная фаза равна 1, 2 и 3 соответственно.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  будут две координаты в последовательности  $S$  и пусть  $x_1$  и  $x_2$  выбираются как  $L_1 + 3n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, (L - L_1)/3$ ,  $L_1$  кратно трем и находится в интервале от 60 до 600. Рассмотрим фрагмент последовательности  $S(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и для него построим матрицу триплетной периодичности  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  для рамки считывания  $T_1$  последовательности  $S$ . Рассмотрим также фрагменты  $S(x_2 + 1, x_2 + L_1)$ ,  $S(x_2 + 2, x_2 + L_1 + 1)$  и  $S(x_2 + 3, x_2 + L_1 + 2)$  и для этих фрагментов построим матрицы триплетной периодичности  $M_1(x_2 + 1, x_2 + L_1)$ ,  $M_2(x_2 + 2, x_2 + L_1 + 1)$  и  $M_3(x_2 + 3, x_2 + L_1 + 2)$  для рамок считывания  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  последовательности  $S$  соответственно. Если сразу же за позицией  $x_1$  в последовательности  $S$  произойдет вставка фрагмента ДНК длиной  $x_2 - x_1 + 1$  или  $x_2 - x_1 + 2$  основания ДНК, то она создает сдвиг рамки считывания на одно или два основания и такой же сдвиг фазы триплетной периодичности. В этом случае матрица  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  будет больше похожа на матрицу  $M_2(x_2 + 2, x_2 + L_1 + 1)$  или  $M_3(x_2 + 3, x_2 + L_1 + 2)$  соответственно. Если же за позицией  $x_1$  нет вставок нуклеотидов, то матрица  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  будет больше всего похожа на матрицу  $M_1(x_2 + 1, x_2 + L_1)$  для  $x_1 = x_2$ . Затем мы складывали матрицы  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$  в одну матрицу  $M$  и для  $k = 1, 2, 3$  рассчитывали взаимную информацию объединенной матрицы по формуле:

$$I_{1k} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 m(i, j) \ln m(i, j) - \sum_{i=1}^4 x(i) \ln x(i) - \sum_{j=1}^3 y(j) \ln y(j) + L_1 \ln L_1,$$

где  $x_i = \sum_{j=1}^3 m(i, j)$ ,  $y_j = \sum_{i=1}^4 m(i, j)$ . Затем мы рассчитывали аргумент нормального распределения по формуле:

$$X_{1k} = \sqrt{I_{1k}} - \sqrt{I_1}. \tag{1}$$

Значение  $X_{1k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) представляет собой меру, показывающую уровень триплетной периодичности в объединенной матрице  $M = M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1) + M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ . Последовательность  $S$  (нуклеотидная последовательность гена) не является случайной последовательностью, так как в генах наблюдается триплетная периодичность. В таком случае мы не можем использовать

$X_{1k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) как меру подобия матрицы  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  на матрицы и  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Для расчета меры подобия двух матриц  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$  мы использовали метод Монте-Карло. Для этого объединяли последовательности  $S(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и  $S(x_2 + 1, x_2 + L_1)$  в одну последовательность  $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$  и перемешивали ее с сохранением триплетной периодичности. Метод перемешивания был аналогичен тому, что использовался ранее [1]. Мы генерировали 500 случайных последовательностей  $R$  с такой же триплетной периодичностью, как и последовательность  $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$ . Затем каждая из последовательностей  $R$  разделялась на последовательности  $S(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и  $S(x_2 + 1, x_2 + L_1)$ , и для них мы рассчитывали  $X_{1k}$  по формуле (1). Для множества значений  $X_{1k}$  мы определяли среднее значение  $\bar{X}_{1k}$  и дисперсию  $D(X_{1k})$  для  $k = 2$  и для  $k = 3$ . Значения  $X_{11}$  для  $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$  равны значениям  $X_{11}$  для каждой из случайных последовательностей  $R$  при таком способе перемешивания последовательности  $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$ . В качестве меры подобия матриц  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  и  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$  мы выбирали величину  $Z_{1k} = \frac{X_{1k} - \bar{X}_{1k}}{\sqrt{D(X_{1k})}}$ , где  $k = 2, 3$ . Чем больше значение  $Z_{1k}$ , тем более матрица  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  похожа на матрицу  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ ,  $k = 2, 3$ . При отсутствии взаимосвязи  $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$  с матрицей  $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ ,  $k = 2, 3$ , значения  $Z_{1k}$ ,  $k = 2, 3$ , будут малы, а при ее наличии значения велики. Пороговый уровень  $Z_0$  для  $Z_{1k}$ ,  $k = 2, 3$ , выбирался равным 8.0.

Для каждого значения  $x_1$  в последовательности  $S$  определялось такое значение  $x_2$  и  $L_1$ , для которого достигается максимум значения  $Z_{12}$  или значения  $Z_{13}$ . Назовем такой максимум  $mZ_{1k}$ . Затем построим графики зависимости  $mZ_{1k}$  от  $x_1$  и  $x_2$  для  $k = 2, 3$ . Если между позициями  $x_1^0$  и  $x_2^0$  была вставка фрагмента ДНК с длиной, некратной трем основаниям, то максимальное значение для зависимости  $mZ_{1k}$  от  $x_1$  будет наблюдаться в позиции  $x_1^0$ , а максимальное значение для зависимости  $mZ_{1k}$  от  $x_2$  будет наблюдаться в позиции  $x_2^0$  (для соответствующего  $k$ ). Если вставка была длиной  $x_2 - x_1 + 1$ , то такие графики наблюдаются для  $k = 1$ , а если вставка была длиной  $x_2 - x_1 + 2$ , то такие графики наблюдаются для  $k = 2$ . График зависимости  $mZ_{1k}$  от  $x_1$  представляет собой «гору», вершина которой будет наблюдаться в позиции  $x_1^0$ , а график зависимости  $mZ_{1k}$  от

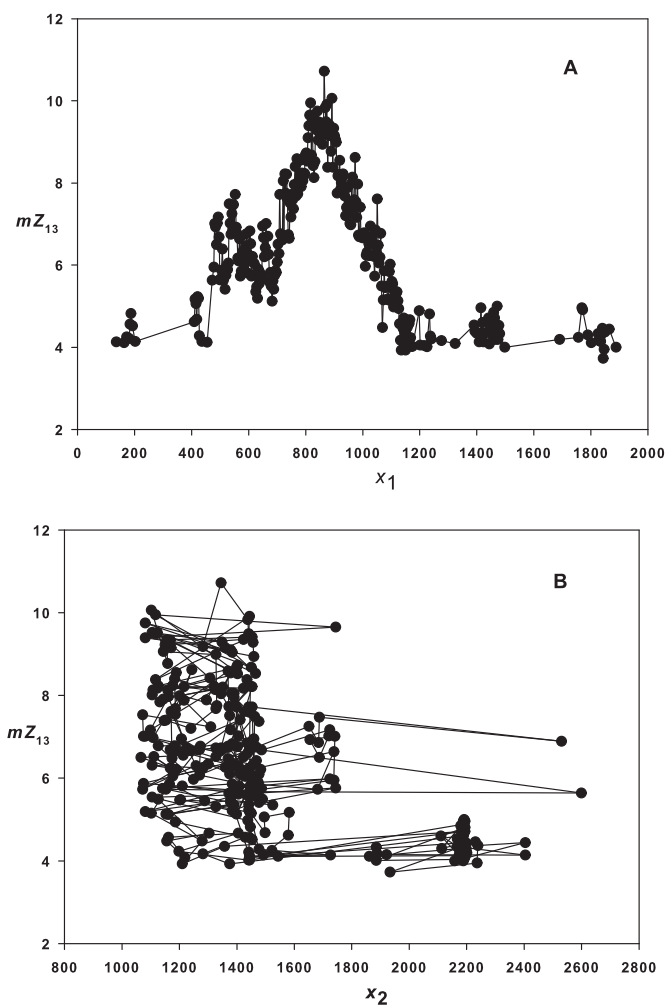


Рис. 1 Зависимость  $mZ_{13}$  от  $x_1$  (А) и от  $x_2$  (В) для гена, *ubiquinone oxidoreductase, chain G* из генома *E.coli*

$x_2$  будет представлять собой «стену» при движении от меньших  $x_2$  к большим.

Были проанализированы гены из 17 бактериальных геномов. Для выявления сдвига фазы триплетной периодичности требуется минимально 240 нуклеотидов, поэтому для изучения были взяты гены с длиной более 1200 нуклеотидов, чтобы уменьшить влияние концевых эффектов на способность выявлять сдвиг фазы триплетной периодичности.

Всего таких генов в изучаемых геномах было 17220. Среди этих генов мы определяли число генов с  $mZ_{1k} > Z_0$ . Всего было выявлено 1526 генов со вставками вида  $3n + 1$  и 1283 гена со вставками вида  $3n + 2$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ , для которых  $mZ_{1k} > Z_0$ , т.е. всего 2809 генов. Это составляет 16,3% от изученных генов с длиной более или равной 1200 символам. Одновременно с этим анализировались случайные последовательности из этих геномов, для которых удалось выявить 622 последовательности с  $mZ_{1k} > Z_0$ . Проведенный анализ показывает, что число false positives в этом случае не превышает 22%. Рассмотрим пример найденных вставок, где  $mZ_{12} > Z_0$  (рис. 1). На этом примере показано, что ген, кодирующий *ubiquinone oxidoreductase, chain G* из генома *E.coli*, имеет  $x_1^0 \approx 850$ , а  $x_2^0 \approx 1100$ , т.е. размер вставки составляет около 250 нуклеотидов. Этот ген имеет вставку вида  $3n + 2$ ,  $n \approx 83$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Korotkov E. V., Korotkova M. A.* Study of the triplet periodicity phase shifts in genes // Journal of Integrative Bioinformatics. — 2010. — V. 7, № 3. — P. 131–141.

## Фрактальные методы оценки пробега автомобиля в системах спутникового мониторинга

*В. В. Костерин*

waksoft@gmail.com

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

### Введение

Использование глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как NAVSTAR (больше известной, как GPS из США), ГЛОНАСС (Россия), Galileo (Европейское сообщество),

Beidou/Compass (Китай), для real-time определения местоположения подвижных объектов на практике доказывает эффективность спутникового мониторинга СМ при эксплуатации автотранспорта. Сроки окупаемости довольно дорогостоящих проектов по внедрению СМ составляют от 2 месяцев до полугода, что с точки зрения экономики очень хороший показатель. Однако этот оптимистичный показатель следует относить сегодня не к техническому совершенству и возможностям СМ, а, скорее, к психологическому воздействию на водителей факта непрерывного контроля перемещения автомобиля на маршруте и, как следствие, к повышению дисциплины, более строгому соблюдению скоростного режима и графика движения.

Главным аргументом противников «считать деньги из космоса» остаётся значительное расхождение показаний традиционных средств измерения пробега (спидометр, тахеометр, курвиметр) с измерениями ГНСС. Длительные наблюдения с помощью подобной системы за маршрутом Магнитогорск–Челябинск–Магнитогорск (около 670 км) показали, что разброс спутниковых измерений пробега может превышать 10% (> 80 км), что даёт повод порассуждать о точности, недостаточной для автоматизации расчётов экономических показателей, повод задуматься о погрешностях системы измерений и способах борьбы с ними. Простейшая, казалось бы, задача определения пробега оказывается совсем не так проста, как к ней привыкли относиться, не уделяя должного внимания.

### **Пробег. Проблемы оценки real-time измерений**

Имея координатный ряд, пробег, пройденное расстояние традиционно вычисляют как сумму расстояний между двумя соседними измерениями, т. е. как сумму решений обратной геодезической задачи [1], которая заключается в следующем: даны геодезические координаты  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  (широта и долгота) двух точек  $Q_1, Q_2$ ; требуется найти кратчайшее расстояние  $S$  (длину геодезической линии) между заданными точками, а также прямой и обратный азимуты в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Хорошо известны итерационные методы решения этой задачи: точный метод Бесселя; способ В. Е. Ольховского; способы Висента; метод Андудайе; метод Содано и другие [1], требующие значительных вычислительных ресурсов.

С учётом «скромности» ресурсов автомобильных ГНСС-приёмников на практике геодезические координаты преобразуются в прямоугольные [2]:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, & Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= ((1 - e^2)N + H) \sin B, \end{aligned}$$

где  $X, Y, Z$  — прямоугольные координаты точки;  $B, L, H$  — геодезические координаты точки (соответственно широта, долгота в радианах и высота в метрах);  $N$  — радиус кривизны первого вертикала, м;  $e$  — эксцентриситет эллипсоида,

$$N = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2(\sin B)^2}}, \quad e^2 = 2a - a^2,$$

где  $A$  — большая полуось эллипсоида, равная 6378137 м или 6378245 м;  $a$  — сжатие эллипсоида, равное  $1/298,257223563$  или  $1/298,3$  соответственно для эллипсоида GRS80 (датум WGS84) и эллипсоида Красовского (1940).

Зная прямоугольные координаты, нетрудно вычислить расстояние между двумя точками — длину прямолинейного элементарного отрезка траектории без учета кривизны в силу его малости. По существу, это обычное интегрирование по Риману без учёта неопределённости при определении координат границ отрезка.

Физические принципы спутниковой навигации предполагают неизбежность ошибок местоопределения приёмников сигналов ГНСС. Источники погрешности известны, немногочисленны, а при развитом наземном секторе и предсказуемы. Действительно, при запасе времени для измерений одной точки (20–40 мин), наличии многочастотной дорогостоящей аппаратуры и наземного сектора для дифференциальной коррекции достигается субсантиметровая точность [3]. Но для мгновенных real-time измерений СМ автотранспорта, практическом отсутствии единого национального координатно-временного и навигационного обеспечения в 95% определения местоположения RMS (среднеквадратическое отклонение) составляет порядка 5,5 м, а с учётом погрешности эфимериса, погрешностей часов спутников, эффектов тропо- и ионосферы, отражения радиосигнала и погрешностей самого приёмника реальная погрешность оценивается в 13–15 м [4].



При движении со скоростью 60 км/ч и квантовании 5 секунд такой элементарный отрезок траектории должен иметь длину порядка 80 м. Точность определения координат концов отрезка 15 м соизмерима с вычисляемой длиной. При мгновенных измерениях, когда значения перечисленных выше погрешностей ГНСС изменяются непрерывно, совместно и труднопредсказуемо, гипотеза о гауссовом законе распределения весьма сомнительна, что подтверждается экспериментами и требует в детальном анализе использования непараметрических методов статистики, значительно усложняющих решение задачи точного вычисления пробега.

Таким образом, имеются реализации траекторий с множествами координат точек, координаты которых — случайная величина с неизвестным законом распределения и погрешностью определения, соизмеримой с расстоянием между ними. С учетом объемов реализаций, описанный факт требует совершенного иного, отличного от принятого, подхода для вычисления пробега и оценки точности.

### **Фрактальная размерность и пробег**

Сейчас наиболее остро стоит вопрос оценки не абсолютной величины пробега, а точности вычисления этой величины, которая характеризует степень доверия к данным СМ при принятии решения об использовании этих данных в корпоративной информационной системе. Проведена серия опытов по исследованию влияния значения квантования на результат вычисления длины траекторной линии, которые привели к, казалось бы, парадоксальному результату — уменьшение времени приводит к непропорциональному увеличению пробега. Объяснение этому факту было найдено в трудах Б. Мандельброта [5] и М. Шредера [6], в которых обсуждаются вопросы измерений в различных пространствах с использованием теории фракталов.

Воспользовавшись стандартной процедурой и окружив каждую измеренную координату кругом радиуса  $\varepsilon$  и квадратом со стороной  $\varepsilon$ , и устремив  $\varepsilon$  к нулю, мы провели вычисления размерности Минковского  $D_M$  и размерности Хаусдорфа  $D$ . Полученные значения для указанного маршрута равны

$$D_M = 1,1387 \text{ и } D = 1,1298,$$

что больше топологической размерности  $D_T = 1$  кривой. Длина кривой, топологическая размерность которой  $D_T = 1$ , и есть тот самый пробег, который мы ищем, а десятичная добавка в размерностях Минковского (0,1387) и Хаусдорфа (0,1298) может служить оценкой степени доверия к полученным СМ-данным.

Размерности Минковского  $D_M$  и Хаусдорфа  $D$  в наших опытах не совпадают, что очень интересно и даёт дополнительную пищу для размышлений о спутниковых измерениях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Комаровский Ю. А.* Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении. Учеб. пособие. Изд. второе, перераб. и дополн. — Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2005. — С. 79–95.
- [2] ГОСТ Р 51794-2001. Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы преобразования координат. Методы преобразования координат определяемых точек. — М.: Госстандарт России, 2001.
- [3] *Hakli P.* Practical Test on Accuracy and Usability of Virtual Reference Station Method in Finland // FIG Working Week 2004. — Athens, Greece, May 22–27, 2004. — P. 32–48.
- [4] Основы спутниковой навигации. Теория и принципы. Системы и обзор приложений. — Thalwil, Switzerland: UBlox, 2007. — С. 48–61.
- [5] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — С. 46–58.
- [6] *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — С. 73–78.

**Некоторые оценки сложности вентильных схем  
с кратными путями  
для недоопределенных матриц**

*В. В. Кочергин*

vvkoch@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

В данной работе исследуется сложность недоопределенных матриц, т. е. матриц, у которых вместо некоторых элементов стоит символ  $*$ , при реализации вентильными схемами с кратными путями. Помимо естественным образом возникающего интереса к задаче о сложности реализации не всюду определенных объектов (см., например, [1]), дополнительный интерес в данном случае связан с возможностью посмотреть под несколько другим углом на задачу о сложности индивидуальных последовательностей всюду определенных матриц с целью исследования асимптотики роста сложности — для этой задачи найдено [2] асимптотически точное решение только в случае матриц, состоящих из не более чем двух строк (столбцов), и матриц размера  $3 \times 3$ .

Следуя Н. Пиппенджеру [3], рассмотрим возникающую, например, при изучении сложности вычисления систем одночленов следующую модификацию классических вентильных схем [4].

Пусть  $A = (a_{ij})$  — целочисленная матрица размера  $p \times q$  с неотрицательными элементами. Ориентированный граф  $S$  без ориентированных циклов будем называть *вентильной схемой с кратными путями* (или *вентильной схемой с предписанным числом путей*), реализующей матрицу  $A$ , если: в  $S$  выделено  $p$  вершин — входных полюсов и  $q$  вершин — выходных полюсов; в  $S$  нет ориентированных путей от одного входа к другому, от одного выхода к другому, от выхода к входу; для любой пары  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq q$ , число ориентированных путей от  $i$ -го входа к  $j$ -му выходу равно в точности  $a_{ij}$ . Через  $L(S)$  обозначим число ребер (вентилей) схемы  $S$  и положим  $L(A) = \min L(S)$ , где минимум берется по всем схемам, реализующим матрицу  $A$ .

Пусть теперь  $A = (a_{ij})$  — матрица, элементами которой являются целые неотрицательные числа и элементы  $*$  (символ  $*$  соответ-

ствуует неопределенному элементу). Такую матрицу будем называть *невсюду определенной* или *недоопределенной* (отметим, что формально полностью определенные матрицы являются частным случаем недоопределенных). Матрица  $B = (b_{ij})$  называется *доопределением* матрицы  $A = (a_{ij})$  такого же размера, если в матрице  $B$  все элементы определены (нет символов  $*$ ) и для любого определенного элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  справедливо равенство  $a_{ij} = b_{ij}$ .

Пусть  $A$  — недоопределенная матрица, в которой все определенные элементы целочисленны и неотрицательны. Положим  $L(A) = \inf L(B)$ , где инфимум берется по всем доопределениям  $B$  матрицы  $A$  до целочисленной матрицы с неотрицательными элементами. Очевидно, что инфимум достигается. Без ограничения общности можно считать, что в матрицах нет ни строк, ни столбцов, полностью состоящих из нулей и символов  $*$ .

**Утверждение 1.** Пусть последовательность  $\{A_n\}$  недоопределенных матриц размера  $p \times q$  с полностью определенными последними столбцами  $(a_{1q}(n), a_{2q}(n), \dots, a_{pq}(n))^T$  удовлетворяет при  $n \rightarrow \infty$  условию  $\sum a_{ij}(n) \rightarrow \infty$  (сумма берется по всем определенным элементам матрицы  $A(n)$ ). Тогда для последовательности матриц  $\{A'_n\}$ , где  $A'_n$  — матрица, получающаяся из матрицы  $A_n$  путем приписывания в качестве  $(p+1)$ -й строки вектора  $(*, \dots, *, a_{p+1,q}(n))$ , выполняется соотношение

$$L(A'_n) \sim L(A_n) + 3 \log_3 \left( \max \left( \frac{a_{p+1,q}(n)}{\max(a_{1q}(n), a_{2q}(n), \dots, a_{pq}(n), 1)}, 1 \right) \right).$$

*Доказательство.* Верхняя оценка является следствием теоремы 2 из [5] — достаточно доопределить последнюю строку пропорционально строке, содержащей максимальный из элементов  $a_{1q}(n), a_{2q}(n), \dots, a_{pq}(n)$ .

*Нижняя оценка.* Требуемая нижняя оценка очевидна в случае справедливости неравенства  $a_{p+1,q} \leq \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1)$ . Пусть теперь выполняется условие  $a_{p+1,q} > \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1)$ .

Рассмотрим минимальную вентиляющую схему  $S$ , реализующую матрицу  $A'_n$  (точнее говоря, некоторое доопределение матрицы  $A'_n$ ). Выделим в схеме  $S$  подсхему  $S_0$ , состоящую из всех вершин и ребер, входящих хотя бы в один путь, ведущий от входов к первым  $p$  выходам.

Очевидно, что вентиляльная схема  $S_0$  реализует некоторое доопределение матрицы  $A_n$ . Поэтому  $L(S_0) \geq L(A_n)$ .

Для произвольной вершины  $v$  вентиляльной схемы  $S$  обозначим через  $a_q(v)$  число различных путей, ведущих в вершину  $v$  от  $q$ -го входа.

Легко понять, что для любой вершины  $v$  схемы  $S_0$  выполняется неравенство  $a_q(v) \leq \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1)$ .

Схему  $S$  можно получить из схемы  $S_0$  путем последовательного добавления новых вершин и ребер. Покажем, что при добавлении к схеме  $S_0$  не более чем  $l$  ребер (и некоторого количества вершин) для любой вершины  $v$  получившейся схемы выполняется неравенство  $a_q(v) \leq 3^{l/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1)$ .

Докажем этот факт индукцией по числу вершин, в которые входит хотя бы одно добавленное ребро. Такие вершины будем называть помеченными. Помеченные вершины пронумеруем естественным образом (чтобы не было путей от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими).

Если не помечено ни одной вершины, то утверждение очевидно. На каждом шаге обрабатываем очередную помеченную вершину  $v$ , в которую ведут ребра из вершин  $v_1, \dots, v_r$  (эти вершины могут повторяться). Используя предположение индукции, получаем:

$$\begin{aligned} a_q(v) &= \sum_{i=1}^r a_1(v_i) \leq r 3^{(l-r)/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1) = \\ &= 3^{l/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1) \left(\frac{r^3}{3^r}\right)^{1/3} \leq 3^{l/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1). \end{aligned}$$

При добавлении не более чем  $L(S) - L(S_0)$  ребер получим вершину  $v_0$ , соответствующую  $(p+1)$ -му выходу схемы  $S$ , для которой справедливо равенство  $a_q(v_0) = a_{p+1,q}$ . Таким образом, величина  $L(S) - L(S_0)$  не меньше, чем  $3 \log_3 \left( \frac{a_{p+1,q}}{\max(a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, 1)} \right)$ . ▀

С помощью утверждения 1 устанавливается асимптотика роста сложности недоопределенных матриц, состоящих либо из двух столбцов, либо из двух строк [6].

Кроме того, утверждение 1 помогает при исследовании асимптотики роста сложности недоопределенных матриц размера  $3 \times 3$ , в частности в следующем случае расположения определенных и

неопределенных элементов (с точностью до перестановки строк и столбцов это единственный нетривиальный случай при наличии не менее пяти неопределенных элементов).

**Утверждение 2.** Пусть последовательность недоопределенных матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & * \\ * & a_{22}(n) & * \\ * & * & a_{33}(n) \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет условию  $a_{11}(n) + a_{12}(n) + a_{22}(n) + a_{33}(n) \rightarrow \infty$ . Тогда

$$L(A_n) \sim 3 \log_3 \left( \max \left( a_{11}(n), a_{12}(n), a_{22}(n), a_{33}(n), \frac{a_{11}(n)a_{22}(n)}{\max(a_{12}(n), 1)} \right) \right).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11–01–00508.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Нечипорук Э. И.* О сложности вентиляльных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 1. — С. 40–42.
- [2] *Кочергин В. В.* О сложности вентиляльных схем с кратным числом путей // Материалы XVIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. акад. О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. — С. 51–56.
- [3] *Pippenger N.* The minimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Systems Theory. — 1979. — V. 12, № 4. — P. 325–346.
- [4] *Лупанов О. Б.* О вентиляльных и контактно-вентиляльных схемах // Доклады АН СССР. — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.
- [5] *Кочергин В. В.* О сложности вычисления систем одночленов и систем целочисленных линейных форм // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций. Выпуск III. — М.: Изд-во ИПМ РАН, 2007. — С. 3–63.
- [6] *Кочергин В. В.* О сложности вентиляльных схем: булев и общий случаи // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы 3-й Российской школы-семинара, посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Кокорина (Иркутск, 10–14 августа 2010 г.). — Иркутск: Изд-во ГОУ ВПО ВСГАО, 2010. — С. 50–53.

## Модели и задачи структурного распознавания в исследованиях социальных сетей

А. А. Кочкаров, Л. И. Сенникова

akochkar@rtisystems.ru, s-ludhen@yandex.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Задача построения структур с заданными характеристиками появляется там, где требуется объединить элементы, часто различной природы, в целостную функционирующую систему. В настоящее время, в эпоху «больших задач», создание структур с большой размерностью (с большим числом элементов) имеет особое значение. Эта задача является одной из основополагающих так называемой «сетевой науки» (Network Science) [1]. Развитие глобальных сетей (информационных, социальных, технических) и накопление за последние десятилетия эмпирического материала спровоцировали новый виток изучения сложных многоэлементных сетевых структур [2].

Социальные сети в широком смысле и их виртуальные аналоги — сложноструктурированные системы с определенными правилами взаимодействий между их участниками (агентами, элементами, индивидами). Социальные сети с большим числом участников имеют сложную многоэлементную структуру с нетривиальным набором связей, что существенно усложняет их исследование. В современной науке успешно развивается направление, посвященное анализу социальных сетей (*Social Network Analysis*) [3]. Процессы роста и разрушения в социальных сетях на сегодня практически не изучены, поэтому проблема математического моделирования социальных сетей с помощью всего инструментария дискретной математики и теории графов является актуальной, а положительный опыт применения теоретико-графового подхода к моделированию технических сетевых систем со сложной структурой дает основания предполагать его эффективность и для социальных сетей. Формализовав структуру социальной сети в виде графа с особым видом иерархии, можно ставить задачу распознавания нерегулярных иерархических графов. Необходимо также решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сети, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры социальной сети — *задачу структурного распознавания*.

В настоящей работе определен особый класс нерегулярных иерархических графов — *предфрактальный граф* [4], порождаемый множеством затравок с чередованием. Именно этот класс предфрактальных графов может наиболее адекватно описывать структуры сложных многоэлементных сетевых систем при построении моделей. В настоящей работе предложен и обоснован алгоритм распознавания предфрактального графа, порожденного двумя полными затравками с чередованием.

*Предфрактальный граф* будем обозначать через  $G_L = (V_L, E_L)$ , где  $V_L$  — множество вершин графа, а  $E_L$  — множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе  $l = \{1, 2, \dots, L - 1\}$  графе  $G_l$  каждую его вершину связной затравкой  $H = (W, Q)$ . На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$  порожден затравкой  $H = (W, Q)$ .

Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа  $G_L$  является такой случай, когда вместо единственной затравки  $H$  используется множество затравок  $H = \{H_t\} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$ ,  $T \geq 2$ . Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа  $G_{l-1}$  к графу  $G_l$  каждая вершина замещается некоторой затравкой  $H_t \in H$ , которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа  $G_{l-1}$  к графу  $G_l$  каждая вершина графа  $G_{l-1}$  замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой  $H_{t^*} \in H$ , то будем говорить, что *предфрактальный граф  $G_L$  порожден множеством затравок  $H = \{H_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ,  $T \geq 2$ , с чередованием*. Если при порождении предфрактального графа с чередованием для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*.

Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.



Переход в траектории  $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots, G_L$  графа с чередованием затравок от текущего графа  $G_r = (V_r, E_r)$  к следующему графу  $G_{r+1}$  всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$  и  $F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер, можно осуществить алгоритмом  $\beta$ . Суть алгоритма  $\beta$  заключается в идентификации графов  $F_1 = (V_1, E_1)$ ,  $F_2 = (V_2, E_2)$  как затравок предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

**Теорема.** *Всякий предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$  и  $F_2 = (V_2, E_2)$ ,  $|V_1| = m_1$  и  $|V_2| = m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер, распознается алгоритмом  $\beta$  с полиномиальной трудоемкостью  $O(|E_L| + L|V_L|)$ .*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 121–141.
- [2] *Newman M.E.J.* Networks: an introduction. — New York: Oxford University Press, 2010.
- [3] *Wasserman S., Faust K.* Social network analysis: methods and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [4] *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 44, № 6. — С. 1147–1152.

## Оценки сложности 1-самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций

*В. М. Краснов*

vmkrasnoff@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

### Введение

Рассматриваются схемы из надежных и ненадежных функциональных элементов [1]. Схема называется 1-самокорректирующейся, если при переходе в неисправное состояние одного произвольно ненадежного элемента она реализует ту же самую функцию, что и при правильной работе всех ее элементов. Всякий надежный элемент имеет вес  $p$  ( $p > 0$ ) и всегда реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса, а в неисправном состоянии — булеву константу 0. Пусть  $L_{1,0}^B(f)$  — наименьшая из сложностей 1-самокорректирующихся схем в базисе  $B$ , реализующих булеву функцию  $f$ ; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы. Для монотонных симметрических булевых функций  $f_2^n(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$  в бесконечном базисе  $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, \dots; x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \dots\}$  установлены оценки

$$\log_3 n - 1 < L_{1,0}^B(f_2^n) \leq 3 \lceil \log_2 n \rceil + 3 + p,$$

выполняющиеся при  $n \geq 10$ .

### Конструктивная верхняя оценка для $L_{1,0}^B(f_2^n)$

**Теорема 1.** Для любого натурального  $n \geq 3$  выполнено неравенство

$$L_{1,0}^B(f_2^n) \leq 3 \lceil \log_2 n \rceil + 3 + p.$$

*Доказательство.* Входы схемы  $x_1, \dots, x_n$  (то есть входы, на которые подаются переменные  $x_1, \dots, x_n$ ) пронумеруем соответственно числами  $0, 1, \dots, n-1$  в двоичной записи. Разобьем номера всех входов на две группы  $k$  способами. При  $i$ -м способе разбиения ( $i = 1, \dots, k$ )

номера всех входов с единицей в  $i$ -м разряде поместим в первую группу, с нулем в  $i$ -м разряде — во вторую группу. Рассмотрим еще «корректирующий» способ разбиения, при котором все номера с четным числом единиц отнесем к первой группе, а с нечетным числом единиц — ко второй.

В соответствии с первым способом разбиения входы одного дизъюнктора соединим со входами схемы с номерами из первой группы, входы другого дизъюнктора соединим со входами схемы с номерами из второй группы. Выходы дизъюнкторов подадим на входы двухвходового конъюнктора. Получим подсхему  $S_1$ . Функцию, реализуемую подсхемой  $S_1$ , очевидно, можно представить формулой вида  $\bigvee x_i x_j$ , где  $x_i$  отвечает номеру входа из первой группы,  $x_j$  — номеру входа из второй группы, а дизъюнкция берется по всевозможным парам  $(x_i, x_j)$ , отвечающим указанным условиям. Аналогичное построение выполним применительно к другим способам разбиения. Получим подсхемы  $S_1, S_2, \dots, S_{k+1}$ . Выходы конъюнкторов подадим на входы надежного  $(k+1)$ -входового дизъюнктора. В итоге получим некоторую схему  $S$ . На выходе схемы  $S$  реализуется функция  $g$  вида  $\bigvee x_i x_j$  (дизъюнкция осуществляется по некоторому множеству пар  $(i, j)$ , где  $i \neq j$ ), что следует из построения. Значит, выполняется неравенство  $g \leq f_2^n$ .

Предположим  $f_2^n > g$  (имеется в виду, что для любого набора  $\tilde{\sigma}$  выполняется неравенство  $f_2^n(\tilde{\sigma}) \geq g(\tilde{\sigma})$  и существует хотя бы один набор  $\tilde{\sigma}'$  такой, что  $f_2^n(\tilde{\sigma}') > g(\tilde{\sigma}')$ ), тогда формула, соответствующая функции  $g$ , не содержит  $x_i x_j$  для какого-то  $i \neq j$ . Значит, при всех способах разбиения номера  $i$  и  $j$  находились в одной группе, а это означает, что числа  $i$  и  $j$  не отличаются ни по одному двоичному разряду, то есть  $i = j$ . Получили противоречие. Следовательно,  $f_2^n \equiv g$ .

Методом от противного докажем, что наша схема является 1-самокорректирующейся относительно ошибок типа 0 на выходах элементов. Предположим, что при неисправности какого-то элемента  $E$  схема  $S$  реализует некоторую нетривиальную функцию неисправности  $g$ . Учитывая характер неисправности и тот факт, что в схеме присутствуют только дизъюнкторы и конъюнкторы (реализующие монотонные функции), нетрудно заметить, что при переходе в неисправное состояние элемента  $E$  значение на выходе схемы (на любом наборе значений входных переменных) может только уменьшиться.

Следовательно  $f_2^n > g$ . Это значит, что схема, реализующая функцию  $g$ , выдает 0 на каком-то наборе  $\tilde{\sigma}$ , содержащем, по крайней мере, две единицы в  $i$ -м и  $j$ -м разрядах.

Предположим, что номера  $i$  и  $j$  отличаются в двух или более двоичных разрядах. В этом случае  $x_i x_j$  содержится в формулах, соответствующих двум или более способам разделения по отличительным разрядам номеров  $i$  и  $j$ . Хотя бы одна из подсхем, отвечающих этим формулам, будет исправна при наличии в схеме одного неисправного элемента; и схема выдает 1 на наборе  $\tilde{\sigma}$ .

Пусть номера  $i$  и  $j$  отличаются в одном двоичном разряде. В этом случае  $x_i x_j$  содержится в формулах, соответствующих двум способам разделения. Одна из них отвечает способу разделения по отличительному разряду, а вторая — «корректирующему» способу. Хотя бы одна из подсхем, отвечающих этим формулам, будет исправна при переходе в неисправное состояние одного элемента (подсхемы не имеют общих элементов). Значит, на входном наборе  $\tilde{\sigma}$  получим  $g(\tilde{\sigma}) = 1$ . В итоге получаем, что построенная таким образом схема является 1-самокорректирующейся. ■

### Нижняя оценка

Будем рассматривать минимальные схемы, реализующие  $f_2^n$  в базе  $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, \dots; x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \dots\}$ . Для доказательства нижней оценки введем понятие совершенной минимальной схемы, а также опишем процедуру преобразования произвольной минимальной схемы к совершенному виду.

Назовем конъюнктор *ненасыщенным*, если хотя бы на один из его входов подается выход другого конъюнктора.

Назовем дизъюнктор *ненасыщенным*, если хотя бы на один из его входов подается выход другого дизъюнктора.

Будем говорить, что минимальная схема *совершенна*, если в ней нет ненасыщенных элементов.

Теперь опишем процедуру насыщения, которая преобразует схему, не увеличивая ее сложности, однако уменьшает число ненасыщенных элементов.

Введем в схеме  $S$  монотонную нумерацию вершин таким образом, чтобы для любой дуги номер начала дуги был меньше номера ее конца [2]. Рассмотрим ненасыщенный элемент  $E_1$  с минимальным

номером. Без ограничения общности будем считать, что это конъюнктор. Пусть  $E_2, \dots, E_k$  — это все конъюнкторы, выходы которых подаются на входы элемента  $E_1$ . Преобразуем схему следующим образом: на входы  $E_1$  вместо выходов элементов  $E_2, \dots, E_k$  подадим все то, что подается на их входы. Заметим, что  $E_1$  теперь не может быть ненасыщенным, а новых ненасыщенных элементов не появилось. При этом новая схема реализует прежнюю функцию.

Будем проводить данное преобразование, пока не кончатся ненасыщенные элементы. Если после этого появятся «висячие» элементы, то есть элементы, выходы которых не подаются ни на один элемент и не являются выходом схемы, то их можно просто удалить из схемы.

Конъюнктор  $E$  назовем  $x_i$ -конъюнктом, если его вход соединен со входом схемы  $x_i$ .

**Теорема 2.** Для любого натурального  $n \geq 6$  выполнено неравенство

$$L_{1,0}^B(f_2^n) \geq 1 + L_{1,0}^B(f_2^{n - \lceil 2n/3 \rceil}).$$

**Теорема 3.** Для любого натурального  $n \geq 10$  выполнено неравенство

$$L_{1,0}^B(f_2^n) > \log_3 n - 1.$$

Выражаю признательность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [2] Редькин Н. П. Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.

**О конъюнкторной сложности  
самокорректирующихся схем для одной  
последовательности булевых функций**

*Т. И. Краснова*

kotovati@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет

Для монотонных симметрических булевых функций

$$f_2^n(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

при растущем  $n$  автором была установлена асимптотика

$$L_k^-(f_2^n) \sim n \cdot \min\{k + 1, p\},$$

где  $L_k^-(f_2^n)$  — инверсионная сложность реализации функции  $f_2^n$  в классе  $k$ -самокорректирующихся схем в базисе  $B = \{\&, -\}$  [1, 2]. Предполагалось, что каждый надежный инвертор имеет вес  $p \geq 1$ , вес каждого ненадежного инвертора равен 1, а все конъюнктуры надежны и имеют нулевые веса. При  $p \geq k + 2$  устанавливается асимптотика

$$L_k^{\&}(f_2^n) \sim (k + 2)n,$$

где  $L_k^{\&}(f_2^n)$  — конъюнкторная сложность реализации функции  $f_2^n$  в том же классе и базисе; здесь предполагается, что вес надежного конъюнктора равен  $p$ , ненадежного — единице, а инверторы — надежные и имеют нулевые веса.

Если принять во внимание полученные соотношения, то при  $p \geq k + 2$  получается нижняя оценка:

$$L_k(f_2^n) \geq L_k^-(f_2^n) + L_k^{\&}(f_2^n) \sim (k + 1)n + (k + 2)n = (2k + 3)n,$$

где  $L_k(f_2^n)$  — сложность реализации функции  $f_2^n$  в том же классе схем и в том же базисе при ненулевых весах элементов (вес каждого надежного элемента — как инвертора, так и конъюнктора — равен  $p$ , а вес каждого ненадежного равен единице).

Также доказывается асимптотическая верхняя оценка

$$L_k(f_2^n) \lesssim (2k + 4)n.$$

Таким образом, имеем  $(2k + 3)n \lesssim L_k(f_2^n) \lesssim (2k + 4)n$ .

В работе [3] была установлена асимптотика  $L(f_2^n) \sim 3n$  для сложности реализации функции  $f_2^n$  в классе обычных схем из функциональных элементов в базисе  $B = \{\&, -\}$ .

Рассматриваем схемы из функциональных элементов в базисе  $B = \{\&, -\}$ , реализующие булеву функцию  $f(\tilde{x})$  [1, 2].

Возьмем произвольную схему  $S$  в базисе  $B$ . Элемент  $E^-$  назовем  $x_i$ -блокиратором, если  $E^-$  — единственный инвертор в каком-то пути  $Z$  из входа  $x_i$  (т. е. входа схемы, отвечающего переменной  $x_i$ ) в  $E^-$ ; все остальные элементы из  $Z$  (т. е. конъюнкторы), отличные от  $E^-$ , будем считать  $x_i$ -предблокираторными.

**Лемма 1.** Если функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  не представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_m) = x_i \& g(x_1, \dots, x_m), \quad (1)$$

то любой путь из входа  $x_i$  в выход (т. е. в выходной элемент) схемы содержит  $x_i$ -блокиратор.

**Лемма 2.** Если функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  не представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_m) = \overline{x_i \& g(x_1, \dots, x_m)}, \quad (2)$$

то ни один  $x_i$ -блокиратор не может быть выходным элементом схемы.

### Блокираторы в самокорректирующихся схемах

Рассматриваем схемы из надежных и ненадежных функциональных элементов в базисе  $B = \{\&, -\}$ . Схема называется  $k$ -самокорректирующейся, если при переходе в неисправное состояние не более чем  $k$  произвольных ненадежных элементов она реализует ту же самую функцию, что и в исправном состоянии всех ее элементов [4]. Каждый надежный элемент имеет вес  $p$ , где  $p \geq k + 1$ , и всегда реализует одну и ту же приписанную ему функцию из базиса. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса, а в неисправном состоянии — булеву константу  $\delta$  (эта константа

предполагается фиксированной и заранее известной). Пусть  $L_k(f)$  — наименьшая из сложностей  $k$ -самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию  $f$ ; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы.

**Лемма 3.** *Если  $k$ -самокорректирующаяся схема  $S$  реализует функцию  $f(x_1, \dots, x_m)$ , существенно зависящую от переменной  $x_i$  и непредставимую в виде (1), то общий вес  $x_i$ -блокираторов в  $S$  не меньше, чем  $k + 1$ .*

**Лемма 4.** *Если  $k$ -самокорректирующаяся схема  $S$  реализует функцию  $f(x_1, \dots, x_m)$ , существенно зависящую от переменной  $x_i$  и непредставимую в виде (1) или (2), то сумма весов всех элементов, следующих за  $x_i$ -блокираторами в  $S$ , не меньше  $k + 1$ .*

### Нижняя оценка конъюнкторной сложности

Под конъюнкторной сложностью  $L_k^{\&}(S)$  схемы  $S$  понимается сумма весов всех конъюнкторов в  $S$  (при этом можно считать, что все инверторы имеют нулевые веса). Для любой схемы  $S$ , как нетрудно заметить, существует эквивалентная ей схема  $S'$ , которая содержит те же конъюнкторы, что и  $S$ , и в которой нет цепей из двух и более инверторов; именно такие схемы будем рассматривать ниже. Пусть  $p \geq k + 2$ , а  $L_k^{\&}(f)$  — наименьшая из конъюнкторных сложностей  $k$ -самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию  $f$ .

Рассмотрим реализацию монотонных симметрических булевых функций  $f_2^n(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$  (т. е. пороговых симметрических функций с порогом 2)  $k$ -самокорректирующимися схемами из функциональных элементов в базисе  $B$ . Заметим, что  $f_n^2$  существенно зависит от всех своих переменных и не представима в виде (1) или (2).

Нижние оценки будем доказывать в предположении, что на входы схем наряду с переменными подаются константы 0 и 1. Ясно, что получаемые оценки справедливы и для случая, когда на входы схем разрешается подавать только переменные. При этом предположении любая схема в рассматриваемом базисе обладает свойствами [5].

**Лемма 5.** *При  $n \geq 3$  справедливо неравенство*

$$L_k^{\&}(f_n^2) \geq L_k^{\&}(f_{n-1}^2) + k + 2.$$



**Верхняя оценка конъюнкторной сложности**

Для доказательства верхних оценок воспользуемся обобщенной конструкцией М. И. Гринчука [6] из работы Н. П. Редькина [5].

**Теорема 6.** При растущем  $n$  выполняется соотношение

$$L_k^{\&}(f_2^n) \sim (k + 2)n.$$

**Теорема 7.** При  $p \geq k + 2$  имеет место соотношение

$$L_k(f_2^n) \lesssim (2k + 4)n.$$

Выражаю признательность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.
- [3] *Краснова Т. И.* Асимптотически минимальные схемы для одной последовательности булевых функций // Вестник Московского университета. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика.— 2009. — № 3. — С. 53–56.
- [4] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем.— М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [5] *Редькин Н. П.* Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 62–79.
- [6] *Гринчук М. И.* О монотонной сложности пороговых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности: Сб. науч. тр. — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992. Вып. 52.— С. 41–48.

## Онлайновая упаковка прямоугольников в полосы

*Н. Н. Кузюрин*

`nnkuz@ispras.ru`

Институт системного программирования РАН, Москва

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос заключается в следующем. Входом является конечная последовательность открытых прямоугольников  $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ , где  $h(T_j)$  и  $w(T_j)$  — соответственно высота и ширина прямоугольника  $T_j$ ,  $C = \{C_1, \dots, C_m\}$  — множество полубесконечных вертикальных полос, где  $w_i$  — ширина  $i$ -й полосы.

Требуется найти ортогональное размещение последовательности прямоугольников  $T$  по этим полосам (без вращений и пересечений, стороны прямоугольников параллельны сторонам полос), минимизирующее полную высоту этого размещения, то есть максимум по всем прямоугольникам и по всем полосам расстояния от дна полосы до верхней границы прямоугольника.

Даже для случая одной полосы рассматриваемая задача является NP-трудной, поскольку ее частными случаями являются задача об упаковке в контейнеры (bin packing). Поэтому целесообразно изучать приближённые алгоритмы для этой задачи. Особый интерес представляют так называемые онлайновые алгоритмы (алгоритмы, работающие в режиме on-line). Это означает, что множество  $T$  рассматривается как последовательность, члены которой подаются на вход алгоритма один за другим, причем размещение очередного прямоугольника из  $T$  в полосах из  $C$  проводится без какой-либо информации о последующих членах последовательности.

Наиболее исследованы онлайновые алгоритмы для случая одной полосы (см. например [1, 2]). Задачу об упаковке прямоугольников в несколько полос начали исследовать сравнительно недавно. Первые эффективные  $s$ -приближенные алгоритмы для этой задачи (где  $s$  — конкретная константа) были получены в [3].

Один частный случай задачи, в котором все полосы имеют одинаковую ширину (можно считать, что она равна 1), недавно привлек внимание ряда исследователей и получил название Multiple Strip Packing (MSP) [4].

Именно эта задача рассматривается в данной заметке, причем для нее предлагается алгоритм, работающий в режиме on-line, и проводится его вероятностный анализ. Отметим, что вероятностному анализу различных эвристик одно- и двумерной упаковки посвящено много работ. Целевой функцией в таком анализе обычно является величина незаполненной площади от дна полос до верхней грани прямоугольников.

Опишем так называемую стандартную вероятностную модель для этого класса задач. Будем считать, что для каждого прямоугольника высота  $h_i$  и ширина  $w_i$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ . Будем предполагать, что все случайные величины  $w_i, h_i$  независимы в совокупности, и обозначать через  $\Sigma$  математическое ожидание площади, не заполненной прямоугольниками, между основанием полос и верхней границей самого верхнего шельфа. Будем предполагать, что число прямоугольников  $n$  — бесконечно большая величина ( $n \rightarrow \infty$ ).

Нами предложен некоторый полиномиальный алгоритм  $A$  для задачи MSP, работающий в режиме on-line, и проведен его вероятностный анализ для описанной выше вероятностной модели. Доказано, что для любого фиксированного  $t$  математическое ожидание незаполненной площади есть величина  $O(n^{2/3})$ . При этом предполагается, что алгоритм не знает числа прямоугольников  $n$  (так называемые open-end on-line алгоритмы).

Более формально, справедлива следующая

**Теорема.** *Существует полиномиальный алгоритм для задачи MSP, работающий в режиме on-line, для которого при  $n \rightarrow \infty$  справедлива оценка: в стандартной вероятностной модели для любого фиксированного  $t$*

$$\Sigma = O\left(n^{2/3}\right).$$

Для случая  $t = 1$  сходный результат был получен в [5], однако при условии, что алгоритм заранее знает число  $n$ . Таким образом, наш результат усиливает и обобщает аналогичный результат из [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00768.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Csirik J., Woeginger G. J. Shelf algorithms for on-line strip packing // Inf. Process. Lett. — 1997. — V. 63, № 4. — P. 171–175.

- [2] Кузюрин Н. Н., Поспелов А. И. Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 76–90.
- [3] Жук С. Н. Приближенные алгоритмы упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 91–105.
- [4] Ye D., Han X., Zhang G. Online multiple strip packing // Theor. Computer Science. — 2011. — V. 412, № 3. — P. 233–239.
- [5] Coffman E. G., Shor P. W. Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms // Algorithmica. — 1993. — V. 9. — P. 253–277.

## Сведение двух подклассов систем линейных неравенств к задачам распределения ресурсов

Е. А. Куликова

kate.kulikova@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе рассматриваются признаки сводимости двух подклассов систем линейных двусторонних неравенств транспортного типа к задачам распределения ресурсов в древовидной иерархической структуре или к задачам поиска допустимой циркуляции в транспортной сети.

Известны классические результаты линейной алгебры, позволяющие решать системы линейных неравенств: это, например, теорема Александрова – Фань Цзы или теорема Черникова [1]. В настоящее время развиваются алгоритмы решения систем линейных равенств и неравенств, основанные на теоремах об альтернативах, представленные в работах Голикова и Евтушенко [2]. Также к подобным системам применяется сведение к задачам линейного программирования и их решение, например, методом Кармаркара с оценкой вычислительной сложности  $O(n^{3,5}L)$ , где  $n$  — число неизвестных, а  $L$  — длина битового входа задачи, или модификацией метода Кармаркара [3] из класса алгоритмов внутренних точек с оценкой вычислительной сложности  $O(n^3L)$ .

Рассмотрим систему линейных двусторонних неравенств транспортного типа с  $n$  неизвестными и  $m$  ограничениями:

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{Ax} \leq \mathbf{c}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\mathbf{b} \in R^m, \quad \mathbf{c} \in R^m, \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}, \quad a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Поставим следующий вопрос: при каких условиях на форму матрицы  $A$  подобные системы неравенств могут быть сведены к задачам распределения ресурсов, для которых существуют сильнополиномиальные алгоритмы решения? В работе [4] изучается подкласс многоиндексных систем линейных неравенств, которые сводятся к задаче поиска допустимой циркуляции в транспортной сети. В данной работе для произвольной системы неравенств транспортного типа (1) разработан признак сводимости к задачам распределения ресурсов в древовидной иерархической структуре либо к задаче поиска допустимой циркуляции в транспортной сети.

Для различных вектор-строк  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  и  $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$  матрицы  $A$  строку  $\mathbf{a}_i$  будем называть *вложенной* в строку  $\mathbf{a}_j$ , если  $a_{ik} \leq a_{jk}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Также назовём вектор-строки  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  и  $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$  матрицы  $A$  *дополнительными*, если  $a_{ik} + a_{jk} \leq 1$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Будем говорить, что матрица  $A$  *удовлетворяет свойству 1*, если для любых двух строк этой матрицы одна из них либо вложена в другую, либо дополнительна с ней. Определим также, что матрица  $A$  *удовлетворяет свойству 2*, если множество её строк может быть разбито на два непересекающихся подмножества, каждое из которых удовлетворяет свойству 1.

**Теорема 1.** *Если матрица  $A$  системы неравенств (1) удовлетворяет свойству 1, то для неё можно построить эквивалентную древовидную иерархическую структуру, решение задачи распределения ресурсов в которой определяет допустимое решение системы (1).*

Задачи распределения ресурсов в древовидных иерархических структурах изучены в работе [5], где для их решения предложен метод приведённых границ, имеющий вычислительную сложность  $O(m)$ , где  $m$  — число элементов структуры. Значения количества ресурса на листовых элементах структуры в допустимом решении

задачи распределения ресурса будут определять значения переменных в решении исходной системы линейных неравенств.

**Теорема 2.** *Если матрица  $A$  системы (1) удовлетворяет свойству 2, то для неё может быть построена задача поиска допустимой циркуляции в транспортной сети, такая, что подмножество компонент её решения определяет допустимое решение исходной системы неравенств.*

В работе предложен конструктивный алгоритм построения транспортной сети с двусторонними пропускными способностями дуг, соответствующей системе неравенств транспортного типа (1), удовлетворяющей свойству 2. Для поиска допустимой циркуляции в транспортной сети можно применить алгоритм Карзанова [6], который при рассматриваемом сведении имеет вычислительную сложность  $O((n+m)^3)$ .

Таким образом, для систем неравенств, удовлетворяющих свойствам 1 или 2, в которых  $m = O(n)$ , рассматриваемое сведение позволяет значительно сократить время поиска допустимого решения, так как методы построения эквивалентных задач и алгоритмы их решения имеют эффективные полиномиальные оценки с вычислительной сложностью меньшей, чем для общих методов линейной алгебры. Для систем линейных двусторонних неравенств транспортного типа, удовлетворяющих свойству 1, поиск допустимого решения имеет вычислительную сложность  $O(nm^2)$ , а для систем, удовлетворяющих свойству 2, —  $O((n+m)^3)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
- [2] Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Докл. РАН. — 2001. — Т. 381, № 4. — С. 444–447.
- [3] Ye Y. An  $O(n^3L)$  potential reduction algorithm for linear programming // Mathematical Programming. — 1991. — P. 239–258.
- [4] Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 6. — С. 194–205.
- [5] Прилуцкий М. Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 2. — С. 149–156.

- [6] Карзанов А. В. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков // ДАН СССР. — 1974. — Т. 215, № 1. — С. 49–52.

## Связь вычислительных и динамических свойств коллективов автоматов в дискретной среде

*А. Н. Курганский*

topologia@mail.ru

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

### Введение

Рассматриваются коллективы автоматов с одним состоянием, взаимодействующих со средой, заданной в виде графа. Такой коллектив рассматривается как цельный динамический вычислительный автоматопоподобный объект, распределенный по среде. В отличие от конечных автоматов, где мера изменения состояния равна одному состоянию в единицу времени, для рассматриваемой модели возможны разные подходы к определению этой меры. Предлагаемый подход основывается на следующих рассуждениях. Во-первых, так как элементарной частью коллектива является автомат с одним состоянием, то состояние всего коллектива естественно определять его геометрией. Во-вторых, всякое вычисление некоторым объектом невозможно без изменений в этом объекте, поэтому вычисление коллективом автоматов должно быть связано с изменениями его геометрии. Проиллюстрируем сказанное на примере шахматной доски с несколькими пешками. Пусть пешки могут делать движение на одну клетку в любом из четырех направлений в один такт дискретного времени. Введем на доске естественным образом двумерную систему координат. Составим из пешек на доске какую-нибудь фигуру, например, букву «О», и посмотрим на эти пешки как один цельный объект. Для него определяем скорость перемещения по шахматной доске как среднюю скорость составляющих его пешек. Пусть теперь объект движется с максимальной скоростью «одна клетка в единицу времени» в одном направлении. Может ли объект при этом перестроиться из буквы «О», например, в букву «Т»? Очевидно, что нет. То есть при максимальной скорости в примере в объекте невозможны вычисления. Эта идея, взятая из [1], применяется к коллективам автоматов для

определения связи между скоростью  $w$  изменения состояния коллектива (вычислительное свойство) и скоростью  $v$  перемещения (динамическое свойство). Подчеркивая физические аналогии, в работе используется для краткости слово «тело» как синоним «коллектива автоматов».

### Основные результаты

Назовем  $D = \{1, 2, \dots, m\}$  множеством актуальных пространственных направлений. Среда — ориентированный граф. Каждой дуге графа приписано направление из  $D$ . Если различные дуги входят в одну вершину, то говорим, что они пересекаются. Считаем, что граф вложен в  $n$ -мерное аффинное метрическое пространство  $E$  так, что дуги среды являются отрезками прямых, имеют длину  $\frac{1}{n+1}$  и дуги одного направления лежат на параллельных прямых. Зафиксируем систему отсчета в  $E$ . Тогда каждая вершина и каждая точка дуг получают  $n$ -мерную координату в  $E$ . Пространство  $E$  назовем абсолютным, а координаты в нем абсолютными пространственными координатами.

Элементарным телом назовем автомат Мили с одним состоянием. Для удобства говорим, что изоморфные элементарные тела имеют одинаковые цвета, неизоморфные — разные. Предполагаем, что используются  $r$  различных цветов, пронумерованных целыми от 1 до  $r$ . В каждый целочисленный момент времени  $t$  элементарное тело  $b$  находится на какой-либо одной дуге  $b(t)$  среды. Входным сигналом тела  $b$ , находящегося на дуге  $e$ , входящей в вершину  $v$ , является упорядоченный набор чисел  $(p_{ij})_{1 \leq i \leq |D|, 1 \leq j \leq r}$ , где  $p_{ij}$  — число элементарных тел цвета  $j$ , находящихся на дуге направления  $i$  входящей в вершину  $v$ . Выходом тела  $b$  является направление из  $D$ . Если выходом тела  $b$ , находящегося в момент  $t$  на дуге, входящей в вершину  $v$ , является направление  $i$ , то в момент  $t + 1$  он находится на дуге направления  $i$ , исходящей из вершины  $v$ . Если направления дуг  $b(t)$  и  $b(t + 1)$  совпадают, то говорим, что *внешнее состояние* тела  $b$  не изменилось и оно движется прямолинейно. Иначе говорим, что внешнее состояние  $b$  изменилось. Полагаем, что элементарное тело движется прямолинейно, если все пересекающие дуги пусты.

Представим теперь дискретную динамику  $b$  на графе непрерывной динамикой в пространстве  $E$ . Координату  $b$  в момент  $t$  обозначим через  $x_b(t)$ . Пусть  $b(t) = (v_0, v_1)$ ,  $t \in Z$ , и  $n$ -мерные ко-



ординаты вершин  $v_0$  и  $v_1$  равны  $x_0$  и  $x_1$  соответственно, тогда  $x_b(t + \lambda) = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot \lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ .

Обозначим через  $\tau_b(t)$  меру изменений внешнего состояния  $b$ , состоявшихся к моменту времени  $t$ . По определению, если с  $t_1$  до  $t_2$   $b$  двигалось прямолинейно, то  $\tau_b(t_1) = \tau_b(t_2)$ . Величину  $\tau_b(t)$  назовем собственным временем, а  $w_b(t) = \tau_b(t+1) - \tau_b(t)$  скоростью собственного времени  $b$ . Величину  $v_b(t) = x_b(t+1) - x_b(t)$  назовем абсолютной скоростью перемещения  $b$ .

Пару  $(x, t)$  пространственных координат  $x \in E$  и времени  $t$  называем пространственно-временной координатой в абсолютной системе отсчета  $O$ .

Пусть  $D$  является множеством векторов  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{m}\}$  в пространстве  $E$ . Обозначим  $e_i = (\mathbf{i}, 1)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Назовем  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$  множеством *актуальных пространственно-временных* направлений, которые образуют абсолютную *актуальную систему отсчета*  $Q$ . В общем случае  $m \geq n$ .

**Определение 1.** *Тело — конечное множество элементарных тел.*

Пусть тело  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ . Тогда абсолютной (средней) координатой тела  $B$  в момент абсолютного времени  $t$  называется  $x_B(t) = (x_1(t) + \dots + x_k(t))/k$ . Назовем  $v_B(t) = x_B(t+1) - x_B(t)$  абсолютной скоростью перемещения тела  $B$ . Обозначим через  $\tau = \tau_B(t)$  меру изменения внешнего состояния тела  $B$  и назовем её собственным временем  $B$ . Величину  $w_B(t) = \tau_B(t+1) - \tau_B(t)$  назовем скоростью собственного времени тела  $B$ .

**Определение 2.** *Для любого тела  $B$   $w_B(t) = 0 \Leftrightarrow \forall b \in B w_b(t) = 0$ .*

**Следствие 1.** *Для любого тела  $B$ , если  $|v_B(t)| = 1$ , то  $w_B(t) = 0$ .*

Естественно ставить вопрос о структурной эквивалентности тел. Поскольку два тела с различной скоростью заведомо находятся в различных внешних состояниях, понятие внешнего состояния не позволяет сравнивать такие тела. Чтобы уметь это делать, введем понятие систем отсчета, связанных с телом так, что внешнее состояние тела будет представлено как скорость тела и его *внутреннее состояние*, независящее от скорости.

Обозначим через  $x_{AB}(\tau_B)$ ,  $v_{AB}(\tau_B)$ ,  $w_{AB}(\tau_B)$  и  $\tau_{AB}(\tau_B)$  соответственно координату, скорость перемещения, скорость собственного времени и собственное время тела  $A$  в момент времени  $\tau_B$  в системе

отсчета  $O_B$ , связанной с телом  $B$ . По определению:  $x_{BV}(\tau_B) \equiv 0$ ,  $v_{BV}(\tau_B) \equiv 0$  и  $w_{BV}(\tau_B) \equiv 1$ .

**Определение 3.** Тела  $A$  и  $B$  аффинно изоморфны (находятся в одном внутреннем состоянии) в моменты собственного времени  $\tau_A$  и  $\tau_B$  соответственно, если  $\{(b, x_{bA}(\tau_A)) \mid b \in A\} = \{(\varphi(b), x_{bB}(\tau_B)) \mid b \in B\}$  для некоторой биекции  $\varphi : A \rightarrow B$ , такой, что  $b \in A$  и  $\varphi(b) \in B$  изоморфны.

Тело  $B$  назовем инерциальным в системе отсчета  $O_A$  тела  $A$ , если  $v_{BA}(\tau_A)$  и  $w_{BA}(\tau_A)$  константы. Здесь рассматриваются только инерциальные тела. Система отсчета, связанная с инерциальным телом, называется инерциальной.

По определению пространственно-временные координаты одних и тех же событий в разных инерциальных системах отсчета связаны аффинным преобразованием. Обозначим через  $L_{BA} : O_B \rightarrow O_A$  аффинное преобразование такое, что всякое событие  $(x, \tau_B)$  в  $O_B$  совпадает с событием  $L_{BA}(x, \tau_B)$  в  $O_A$ .

Не ограничивая общности, полагаем  $x_{BA}(0) = 0$  и  $\tau_{BA}(0) = 0$ . Тогда  $L_{BA}$  является линейным преобразованием. Очевидно следующее утверждение.

**Лемма 1.**  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$  являются собственными векторами  $L_{BA}$ .

Выберем в  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$  линейно-независимое подмножество размерности  $n + 1$ . Тогда мы можем пользоваться наряду с координатами  $(x_1, \dots, x_n, t)$  в  $O_A$  также координатами  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$  в  $Q_A$ . Пусть  $M_A : Q_A \rightarrow O_A$  преобразование, связывающее координаты в  $Q_A$  и  $O_A$ . По определению  $M_A = M_B$  для всех тел  $A$  и  $B$ . Пусть  $\Lambda_{BA} : Q_B \rightarrow Q_A$  преобразование, связывающее координаты в системах отсчета  $Q_B$  и  $Q_A$ . Из определений следует

**Теорема 2.**  $L_{BA} = M \cdot \Lambda_{BA} \cdot M^{-1}$ .

$\Lambda_{BA}$  имеет диагональный вид, поэтому число собственных векторов  $L_{BA}$  равно  $n + 1$ . Отсюда получаем:

**Следствие 2.** Если  $|D| \neq n + 1$ , то в общем случае не существует  $L_{BA}$ .

Чтобы однозначно определить  $\tau_B$ , достаточно определить  $M$  и  $\Lambda_{BA}$ , т. е. задать масштаб и эталон. По определению, например, можно положить, что точка  $(x_1, \dots, x_n, \tau_A) = (0, \dots, 0, 1)$  в  $O_A$  совпадает с  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = (1, \dots, 1)$  в  $Q_A$ . Отсюда следует утверждение.

**Теорема 3.** Для 1-мерной среды

$$L_{BA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_{BA}} & \frac{v_{BA}}{w_{BA}} \\ \frac{v_{BA}}{w_{BA}} & \frac{1}{w_{BA}} \end{pmatrix}.$$

**Следствие 3.**  $v_{AB} = -v_{BA}$  и  $w_{AB} \cdot w_{BA} = 1 - v_{AB}^2 = 1 - v_{BA}^2$ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.
- [2] Kurgansky O. A state of a dynamic computational structure distributed in an environment: a model and its corollaries // e-Print arXiv: 1007.3836. — 2010.

### Построение квадрангуляций поверхностей с заданными свойствами

*С. А. Лавренченко*

lawrencenko@hotmail.com, <http://lawrencenko.ru>

Национальный исследовательский технологический университет  
«МИСиС», Москва

Строится класс так называемых позвоночных квадрангуляций замкнутых ориентируемых поверхностей. Свойства позвоночных квадрангуляций предопределены их позвоночниками; в частности, род  $g$  позвоночной квадрангуляции сферы  $\Sigma_g$  с  $g$  ручками равен 1-му числу Бетти ее позвоночника. Этот ключевой результат лежит в основе так называемого спинального метода генерирования квадрангуляций с предписанными свойствами путем манипуляций с позвоночником. Спинальный метод позволяет контролировать род, число вершин и хроматические числа строящейся квадрангуляции путем подходящего выбора графа в качестве ее позвоночника. Например, любое нетривиальное дерево является позвоночником некоторой бихроматической квадрангуляции сферы. Попутно получены простые доказательства одного результата Уайта [1], а также результатов Хартсфилд и Рингеля [2] о минимальных квадрангуляциях. Подход в [2] основан на довольно сложном и утомительном в применении методе графов токов. В противоположность тому методу спинальный

метод прост и позволяет генерировать много больше минимальных квадрангуляций.

Сначала сформулируем одну гомологическую лемму. Пусть  $P$  — топологический полиэдр (возможно, несвязный) в евклидовом пространстве  $E^3$ . Обозначим через  $N^3(P)$  3-мерную окрестность у  $P$  малого радиуса. Поскольку  $N^3(P)$  представляет собой 3-мерное тело, его граница  $\partial N^3(P)$  является объединением некоторого числа непересекающихся топологических сфер с ручками. Обозначим общее число тех сфер через  $\#\text{сфр } \partial N^3(P)$  и общее число ручек у них через  $\#\text{hand } \partial N^3(P)$ . Пусть  $\beta_k(P)$  обозначает  $k$ -е число Бетти у  $P$ .

**Лемма 1** [3]. Для любого топологического полиэдра  $P$  в  $E^3$  размерности 0, 1 или 2, возможно, состоящего из несвязных компонент, справедливы следующие равенства:  $\#\text{сфр } \partial N^3(P) = \beta_0(P) + \beta_2(P)$  и  $\#\text{hand } \partial N^3(P) = \beta_1(P)$ .

Рассматриваются только *простые* графы, т. е. без петель и без кратных ребер. Под *квадрангуляцией* сферы  $\Sigma_g$  с  $g$  ручками с графом  $G$  подразумевается *четырёхугольная укладка*  $G \hookrightarrow \Sigma_g$ , т. е. каждая грань ограничена (простым) циклом длины 4.

Заготовим две непересекающиеся копии  $G'$  и  $G''$  графа  $G$ . Вершина  $v'$  в  $G'$  и соответствующая вершина  $v''$  в  $G''$  называются *близнецами* друг друга. Каждую вершину в  $G'$  соединим ребрами со всеми соседями ее близнеца в  $G''$ , но не с самим близнецом. Получаемый таким образом граф известен как *композиция* графа  $G$  с графом  $\overline{K_2}$  — несвязным графом с двумя изолированными вершинами. Будем обозначать такую специальную композицию графов как  $G[:]$  и называть ее *плетённым удвоением* графа  $G$ .

**Лемма 2.** Для любого графа  $G$  без изолированных вершин его плетённое удвоение  $G[:]$  квадрангулирует поверхность  $\partial N^3(G)$ , т. е. можно уложить  $G[:]$  на эту поверхность так, что каждая грань будет четырёхугольной.

В случае когда в  $G$  нет циклов длины 3, граф  $G[:]$  не может быть уложен на поверхность с меньшим числом ручек, чем у квадрангуляции  $G[:]$   $\hookrightarrow \partial N^3(G)$ . Из комбинации лемм 1 и 2 попутно получаем известный результат Уайта [1]:

**Следствие 1.** Если граф  $G$  не содержит изолированных вершин и не содержит циклов длины 3, то род графа  $G[:]$  равен  $\beta_1(G)$ .

Далее будем предполагать, что  $G$  — связный граф, и поэтому  $\partial N^3(G) = \Sigma_g$  для некоторого  $g$ . *Позвоночная квадрангуляция с позвоночником*  $G$  обозначается  $Q = Q(G[:])$  и определяется как четырехугольная укладка  $G[:] \hookrightarrow \Sigma_g$ . Число ручек  $g$  называется *родом квадрангуляции*  $Q$ . Из комбинации лемм 1 и 2 следует ключевой результат:

**Теорема 3.** *Род позвоночной квадрангуляции равен 1-му числу Бетти ее позвоночника.*

*Вершинное* (соответственно, *граневое*) *хроматическое число* графа  $G$  (соответственно, квадрангуляции  $Q$ ) определяется как наименьшее число цветов, достаточное для раскраски вершин у  $G$  (соответственно, граней у  $Q$ ) так, чтобы никакие две смежные вершины (соответственно, грани) не были раскрашены в одинаковый цвет.

**Следствие 2.** *Для каждого целого  $n \geq 2$  плетенное удвоение  $K_n[:]$  полного графа  $K_n$  квадрангулирует  $\Sigma_g$  при  $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  с вершинным и граневым хроматическими числами, равными  $n$ .*

*Доказательство.* Спинальный метод работает так. Вычисляем

$$\beta_1(K_n) = \#\text{ребер} - \#\text{вершин} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} - n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

и видим, что утверждение теперь следует из теоремы 3. ■

Два следствия ниже также доказываются спинальным методом.

**Следствие 3.** *Пусть  $n$  — целое число,  $n \geq 3$ , и пусть  $K_n - e$  — граф, полученный из  $K_n$  удалением одного ребра (но не инцидентных с ним вершин). Тогда  $(K_n - e)[:]$  квадрангулирует  $\Sigma_g$  при  $g = \frac{1}{2}[(n-1)(n-2) - 2]$  с вершинным и граневым хроматическими числами, равными  $n - 1$ .*

Квадрангуляции из следствий 2 и 3 были ранее открыты Хартсфилд и Рингелем в [2], где также была установлена их минимальность (по отношению к числу граней или, что эквивалентно, к числу вершин) на сфере с соответствующим числом ручек. Применение спинального метода позволяет пойти дальше и обобщить результаты [2] путем генерирования много большего числа минимальных квадрангуляций.

**Следствие 4.** *Пусть  $n \geq 2$  и  $m \leq n - 1$  — положительные целые числа и пусть  $K_n - K_m$  — граф, полученный из  $K_n$  удалением ребер (но не вершин) некоторого подграфа  $K_m$ . Тогда*

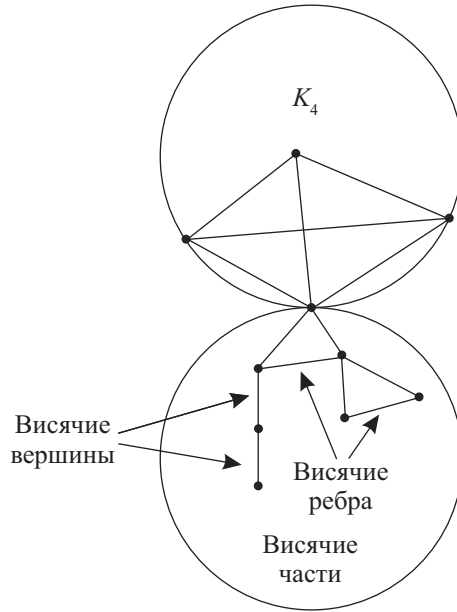


Рис. 1

плетенное удвоение  $(K_n - K_m)[:]$  квадрангулирует  $\Sigma_g$  при  $g = \frac{1}{2}[(n-1)(n-2) - m(m-1)]$  с вершинным и граневым хроматическими числами, равными  $n-m+1$ . Более того, если  $n > 4+2m(m-1)$ , то получающаяся квадрангуляция минимальна на  $\Sigma_g$ .

Следующая теорема обобщает результат Харари, Коржика и автора [4] со случая триангуляций на случай квадрангуляций.

**Теорема 4.** Для любых неотрицательных целых чисел  $g$ ,  $p$  и  $q$ , таких, что  $p$  четно,  $p \geq 2g+4$  и  $2 \leq q \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1+8g})$ , существует позвоночная квадрангуляция сферы  $\Sigma_g$  с  $g$  ручками, имеющая  $p$  вершин, у которой и вершинное, и граневое хроматические числа равны  $q$ .

*Доказательство.* По теореме 3, чтобы удовлетворить требованию на число ручек, достаточно взять в качестве позвоночника любой граф  $G$  с  $\beta_1(G) = g$ . Начнем построение позвоночника с полного графа  $K_q$ ; можно проверить, что тогда  $\beta_1(K_q) \leq g$ . Если  $\beta_1(K_q) = g$ ,

мы берем  $K_q$  в качестве позвоночника и получаем  $Q(K_q[:])$  в качестве квадрангуляции заданного рода, в силу следствия 2. Если же  $\beta_1(K_q) < g$ , последовательно подвешиваем к  $K_q$  ребра, чтобы всего стало  $g$  независимых циклов (длины 3), как требуется. Наконец, при необходимости мы последовательно подвешиваем вершины до тех пор, пока не достигнем требуемого общего числа  $p/2$  вершин в позвоночнике. Конструкция иллюстрируется на рис. 1, где показан возможный позвоночник для набора  $g = 5$ ,  $p = 20$ ,  $q = 4$ . ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *White A. T.* On the genus of the composition of two graphs // Pacific J. Math. — 1972. — V. 41, № 1. — P. 275–279.
- [2] *Hartsfield N., Ringel G.* Minimal quadrangulations of orientable surfaces // J. Combin. Theory. Series B. — 1989. — V. 46, № 1. — P. 84–95.
- [3] *Лавренченко С. А.* Об одной интересной поверхности, ассоциированной с данным полиэдром // Сборник тезисов Международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, 17–22 апреля 2011 г.). — Харьков: ХНУ, 2011.
- [4] *Harary F., Lawrencenko S., Korzhik V.* Realizing the chromatic numbers of triangulations of surfaces // Discrete Math. — 1993. — V. 122, № 1–3. — P. 197–204.

## О надструктуре некоторых классов функций $k$ -значной логики

*В. Б. Ларионов*

VitalyBLarionov@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Данная работа посвящена одной из известных проблем дискретной математики — описанию решетки замкнутых классов функций многозначной логики.

Обозначим через  $E_k$  множество  $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ .

**Определение.** Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *функцией  $k$ -значной логики* ( $k \geq 2$ ), если она определена на  $E_k^n$  и все ее значения принадлежат  $E_k$ .

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций  $k$ -значной логики обозначим  $P_k$ . Для любого подмножества  $A$  из  $P_k$  через  $[A]$  будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Яновым и Мучником в [3] было показано, что при  $k \geq 3$  множество всех замкнутых классов функций из  $P_k$  имеет мощность континуум. В связи с этим особенный интерес представляет изучение именно фрагментов решетки замкнутых классов функций из  $P_k$ .

**Определение.** Для данного класса  $A$  *надструктурой* будем называть множество классов, строго содержащих класс  $A$ .

Ранее автором была описана надструктура замкнутых классов самодвойственных функций [1], которые по своим свойствам близки к предполным классам [2]. Было показано, что произвольный замкнутый класс самодвойственных функций всегда обладает конечным множеством содержащих его замкнутых классов. В работе вводится новое семейство квазисамодвойственных функций и изучается надструктура классов из указанного семейства.

Одним из способов описания замкнутых классов являются предикаты.

**Определение.** Пусть  $p(x_1, \dots, x_m)$  — некоторый предикат, определенный на  $E_k^m$ ,  $f(y_1, \dots, y_n)$  — функция из множества  $P_k$ . Будем говорить, что функция  $f(y_1, \dots, y_n)$  *сохраняет предикат*  $p(x_1, \dots, x_m)$ , если для любых  $n$  наборов  $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), удовлетворяющих предикату  $p$ , набор  $f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})$  также удовлетворяет предикату  $p$ . По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Обозначим через  $Pol(p)$  множество функций, сохраняющих предикат  $p$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные непустые подмножества  $E_k$ , имеющие равную мощность. Обозначим через  $F_{AB}$  множество всех различных взаимно-однозначных отображений множества  $A$  в множество  $B$ , а через  $F_k$  — объединение множеств  $F_{AB}$  для всевозможных пар подмножеств  $A$  и  $B$  указанного вида. Область определения отображения  $f$  обозначим через  $D(f)$  (справедливо  $D(f) = A$  для всех  $f \in F_{AB}$ ).



Для произвольного отображения  $f \in F_k$  обозначим через  $R_f(x_1, x_2)$  предикат, истинный на всех парах  $(a, f(a))$ , где  $a \in D(f)$ , и только на них.

**Определение.** Замкнутые классы функций  $S_f = \text{Pol}(R_f)$ , где  $f \in F_k$ ,  $D(f) \subset E_k$ , и существует элемент  $a \in D(f)$ , такой, что  $f(a) \neq a$  ( $f$  не является тождественным отображением), будем называть классами квазисамодвойственных функций, а сами функции, входящие в указанные классы, — квазисамодвойственными функциями.

Отметим, что если в последнем определении положить  $D(f) = E_k$ , мы получим определение самодвойственных функций [2].

Рассмотрим строение отображений  $f \in F_{AB}$ . Сопоставим каждому такому отображению ориентированный граф  $G_f$  по следующему правилу. Множество вершин графа —  $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ . Будем говорить, что вершина  $v_i$  соответствует элементу  $i \in E_k$ . В графе  $G_f$  есть ориентированное ребро  $(v_i, v_j)$  тогда и только тогда, когда справедливо  $i \in D(f)$  и  $f(i) = j$ . Заметим, что граф  $G_f$  состоит из компонент связности, представляющих собой ориентированные циклы (в том числе циклы длины один — петли) или ориентированные пути (в том числе пути длины нуль — изолированные вершины, у которых отсутствуют инцидентные им ребра). Обозначим множество элементов  $E_k$ , соответствующих вершинам, входящим в компоненты связности первого типа (циклы), через  $L_1(f)$ , множество оставшихся элементов — через  $L_2(f)$ .

Если  $L_2(f) = \emptyset$ , то получаем обычные классы самодвойственных функций. При этом циклы графа  $G_f$  соответствуют циклам подстановки  $f$ .

Пусть теперь  $L_2(f) \neq \emptyset$  и отображение  $f_0$  таково, что в графе  $G_{f_0}$  все ориентированные пути имеют длину нуль. При этом получаем, что  $A = B$ , и  $f_0$  представляет собой подстановку на множестве  $A$ , строго содержащемся в множестве  $E_k$ . В работе [1] было показано, что классы  $S_{f_0}$  для указанных отображений  $f_0$  входят в надструктуру классов самодвойственных функций  $S_\sigma$ , где  $\sigma$  — подстановка на всем множестве  $E_k$ , получающаяся доопределением отображения  $f_0$ . Поэтому полное описание надрешетки классов  $S_{f_0}$  известно.

Образуем теперь всевозможные отображения  $f \in F_k$  из  $f_0$  составлением произвольных ориентированных цепей из элементов множества  $L_2(f_0)$ . Оказывается, что все такие классы  $S_f$  будут находиться

в решетке замкнутых классов под классом  $S_{f_0}$ . Таким образом, любой класс квазисамодвойственных функций  $S_f$  будет содержаться в некотором классе  $S_{f_0}$ , где  $f_0$  получается разрушением всех цепей в графе  $G_f$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема.** *Любой класс квазисамодвойственных функций имеет конечную надструктуру.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ларионов В. Б. О положении самодвойственных  $k$ -значных функций в решетке замкнутых классов // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. — 2009. — Вып. 6. — С. 90–105.
- [2] Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
- [3] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.

## Параметры Чоу

*В. К. Леонтьев*

vkleontiev@mtu-net.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Пусть  $B = \{0, 1\}$  и  $B^n = \{0, 1\}^n$ . Для произвольного множества  $A \subseteq B^n$  рассмотрим матрицу  $H_A$ , строками которой являются все элементы множества  $A$ . Если  $t_k$  — сумма элементов  $k$ -го столбца матрицы  $A$ , то вектор  $t_A = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  называется вектором параметров Чоу или просто *вектором Чоу* множества  $A$ . Таким образом, Ч-вектор (вектор Чоу) — это целочисленный вектор  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ , координаты которого удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq t_k \leq m, \quad k = \overline{1, n} \quad (1)$$

и  $m = |A|$ .

Ясно, однако, что не любой целочисленный вектор с условием (1) является вектором Чоу некоторого множества  $A \subseteq B^n$  с  $m = |A|$ .

Легко проверяются следующие свойства Ч-векторов.

**Лемма 1.**  $t(A \cup B) = t(A) + t(B) - t(A \cap B)$  для  $A, B \in B^n$ .

**Лемма 2.**  $t(A \times B) = t(A) \times t(B)$  для  $A \in B^p, B \in B^q$ .

**Определение 1.** Состав вектора  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  — это вектор  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , где  $\lambda_i$  — число координат вектора  $t$ , равных  $i$ . Этот вектор обозначим через  $\lambda_m(t)$ .

**Определение 2.** Вектор  $t$  называется Ч-реализуемым, если существует  $(0,1)$ -матрица  $H$  порядка  $n \times N$ , удовлетворяющая условиям:

- а) строки  $H$  различны;
- б) Ч-вектор  $H$  совпадает с  $t$ .

Ясно, что из Ч-реализуемости вектора  $t$  следует Ч-реализуемость вектора  $t_g = (t_{g(1)}, \dots, t_{g(n)})$ , где  $g$  — любая перестановка из симметрической группы  $S_n$ . Поэтому Ч-реализуемость вектора  $t$  определяется его *составом*.

Рассмотрим множество  $\mathbb{Z}_4^{m+1}$  всех Ч-реализуемых векторов, определяемых своим составом. Если  $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  — характеристическая функция множества  $\mathbb{Z}_4^{m+1}$ , то справедливо следующее утверждение. Рассмотрим частичный порядок на  $\mathbb{Z}_4^{m+1}$ , положив

$$\lambda \leq \nu \Leftrightarrow \lambda_k \leq \nu_k \text{ для } k = \overline{0, m}. \quad (2)$$

**Лемма 3.** Функция  $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  является монотонной по частичному порядку (2).

Отсюда следует, что для описания множества Ч-реализуемых векторов достаточно описать все нижние единицы монотонной функции  $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

**Определение 3.** Булева матрица  $A = \|\alpha_{ij}\|$  с разными строками называется *экстремальной*, если удаление из  $A$  любого столбца приводит к матрице, у которой есть одинаковые строки.

**Лемма 4.** Если  $A$  — экстремальная матрица, то ей соответствует нижняя единица функции  $\chi(\lambda)$ , и если  $\lambda_0$  — нижняя единица функции  $\chi(\lambda)$ , то ей соответствует хотя бы одна экстремальная матрица.

Пусть  $H_m$  — матрица размера  $m \times 2^m$ , столбцами которой служат все двоичные наборы длины  $n$ .

**Теорема.** Любая экстремальная матрица из  $m$  строк может быть получена из  $H_m$  удалением некоторого числа столбцов.

**Пример 1.** Для  $m = 2$  все нижние единицы функции  $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  — это точка (010).

**Пример 2.** Для  $m = 3$  все нижние единицы монотонной функции  $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — это точки  $a_1 = (0110)$ ,  $a_2 = (0200)$ ,  $a_3 = (0020)$ .

Теорема позволяет построить все Ч-реализуемые векторы из  $\mathbb{Z}_4^{m+1}$ , исходя из экстремальных подматриц матрицы  $H_m$ . При этом построение состоит в произвольном увеличении компонент экстремальных матриц.

В заключение отметим, что параметры Чоу играют существенную роль в целом ряде проблем, связанных с пороговыми функциями и корректирующими кодами [1].

Работа поддержана РФФИ, проект № 11-01-00398-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зуев Ю. А. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 5–61.

### Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости и их применения

*И. В. Лисаченко, В. И. Сумин*

*i\_lisach@mail.ru, v\_sumin@mail.ru*

Нижегородский государственный  
технический университет им. Р. Е. Алексеева;

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Управляемая задача Гурса–Дарбу — одна из тех управляемых систем, с обстоятельного изучения оптимизационных задач для которых начиналось в свое время создание математической теории оптимального управления распределенными системами (см., например, [1, с. 442–450], [2, с. 333–345, с. 449–450]). И вот уже более сорока лет эта задача занимает особое место в теории оптимизации распределенных систем, являясь ее своего рода «пробным камнем» (см.,

например, [3, с. 591–595], краткий обзор [4, с. 5–6]). Именно для задачи Гурса–Дарбу были в [5, 6] найдены первые достаточно общие условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) нелинейных распределенных систем; историю вопроса см. в [7]. Проблема УСГР неизбежно возникает при выводе любых необходимых условий оптимальности методами вариаций, при обосновании численных методов оптимизации типа методов возможных направлений, при изучении задач с приближенно известными данными и во многих других разделах теории оптимального управления (см., например, [6, 7], [8, с. 12–14]). В докладе дается обзор полученных авторами достаточных условий УСГР нелинейной управляемой задачи Гурса–Дарбу, их применений в теории оптимального управления.

В [5, 6] рассматривались абсолютно непрерывные решения задачи Гурса–Дарбу с ограниченными смешанной и первыми частными производными (более общие условия УСГР в этом случае были затем получены в [9], [8, с. 68–70]). В последние годы наблюдается устойчивый интерес (см., например, [10, 12, 11]) к задачам оптимизации систем типа Гурса–Дарбу, рассматриваемых в классах  $AC_p$  абсолютно непрерывных функций с суммируемыми в некоторой степени  $p$  смешанной и первыми производными; видимо, первые теоремы УСГР здесь получены в [13, 14] (их применение см., например, в [15]). Этот случай, в отличие от преимущественно изучавшегося до недавнего времени случая решений с ограниченными производными, многовариантен — он допускает различные естественные варианты условий на нелинейную управляемую систему, отличающиеся друг от друга используемой в них априорной информацией о предполагаемом решении. В [13, 14] рассматривались грубые варианты таких условий — в них учитывается лишь вытекающая непосредственно из определения класса  $AC_p$  принадлежность смешанной и первых производных решения этого класса пространству  $L_p$ . Однако первые производные такого решения принадлежат существенно более узким, чем  $L_p$ , «лебеговым пространствам со смешанной нормой» (см. ниже). В [16] с помощью техники вольтерровых функционально-операторных уравнений [17, 8, 18] (см. также [7]) вопрос об условиях УСГР управляемой задачи Гурса–Дарбу решается с учетом этой, в определенном смысле полной, априорной информации о решении

класса  $AC_p$ . Сформулируем, для примера, следствие общей теоремы УСГР из [16].

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1 t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1), \quad x(0, t^2) = \varphi_2(t^2), \quad t^1 \in [0, 1], \quad t^2 \in [0, 1], \quad (2)$$

где  $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v): \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $l = \{l_0, l_1, l_2\}$ ) и  $\varphi_i(t^i): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) заданы,  $u(t): \Pi \rightarrow \mathbf{R}^m$  — управление. Считаем:  $g$  дифференцируема по  $l$  при каждом  $v$  для почти всех  $t$ , а вместе с производной  $g'_l$  измерима по  $t$  при любых  $\{l, v\}$  и непрерывна по  $\{l, v\}$  для почти каждого  $t$ ;  $\varphi_i$  абсолютно непрерывна,  $\varphi'_i \in L_p^n[0, 1]$  при заданном  $p \in (1, \infty)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ ; допустимы управления из некоторого  $D \subset L_s^m \equiv L_s^m(\Pi)$ ,  $s \in [1, \infty]$ . Пусть:  $f(t, l, v) \equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_1 + \varphi'_1(t_1), l_2 + \varphi'_2(t_2), v)$ ;  $L_{q(j)}$  — пространство  $L_q[0, 1]$  функций переменной  $t_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,  $q \in [1, \infty]$ ;  $L_{q(j), r(i)}$  — пространство функций  $z(t)$ ,  $t \in \Pi$ , со смешанной нормой  $\|z\|_{q(j), r(i)} \equiv \|\|z(t_1, t_2)\|_{L_{q(j)}}\|_{L_{r(i)}}$  ( $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ ;  $q, r \in [1, \infty]$ ). Положим  $\mathfrak{M} \equiv L_\infty^n \times L_{\infty(2), p(1)}^n \times L_{\infty(1), p(2)}^n$ ,  $\mathfrak{N} \equiv L_p^{n \times n} \times L_{p(2), \infty(1)}^{n \times n} \times L_{p(1), \infty(2)}^{n \times n}$  ( $X^{n \times n}$  — пространство  $(n \times n)$ -матриц-функций, составленных из функций пространства  $X$ ).

Пусть  $g$  такова, что формулы  $F[y, u](t) \equiv f(t, y(t), u(t))$ ,  $\Phi[y, u](t) \equiv f'_l(t, y(t), u(t))$  определяют оператор  $F[\cdot, \cdot]: \mathfrak{M} \times D \rightarrow L_p^n$  и ограниченный оператор  $\Phi[\cdot, \cdot]: \mathfrak{M} \times D \rightarrow \mathfrak{N}$ . Тогда естественно рассматривать решения (1), (2) из класса  $AC_p^n$ . Каждому  $u \in D$  может отвечать не более одного такого решения. Пусть  $\Omega$  — множество тех  $u \in D$ , каждому из которых отвечает глобальное решение из  $AC_p^n$ . Введем обозначения:  $A_0[z](t) \equiv \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ ,  $A_1[z](t) \equiv \int_0^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi$ ,  $A_2[z](t) \equiv \int_0^{t_1} z(\xi, t_2) d\xi$ ,  $A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\}$ ,  $t \in \Pi$ ,  $z \in L_p^n$ ;  $J[x](t) \equiv \{x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t)\}$ ,  $t \in \Pi$ ,  $x \in AC_p^n$ . Для  $u \in D$ ,  $u_0 \in \Omega$  положим  $r(u, u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{\mathfrak{M}}$ , где  $\Delta_u g(\cdot) \equiv g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t^1}(\cdot), x'_{0t^2}(\cdot), u(\cdot)) - g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t^1}(\cdot), x'_{0t^2}(\cdot), u_0(\cdot))$ ,  $x_0 \in AC_p^n$  — глобальное решение, отвечающее  $u_0$ .

**Теорема.** Пусть фиксированы  $u_0 \in \Omega$ ,  $d_0 > 0$ . Тогда найдется  $\delta > 0$  такое, что если  $u \in D$ ,  $\|u - u_0\|_{L_s^m} < d_0$ ,  $r(u, u_0) < \delta$ , то  $u \in \Omega$ ;

для любого  $M_0 > 0$  существует  $C > 0$  такое, что если  $x \in AC_p^n$  — отвечающее  $u \in \Omega$  глобальное решение, причем  $\|u - u_0\|_{L_s^n} < d_0$ ,  $\|J[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leq M_0$ , то  $\|J[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leq Cr(u, u_0)$ ,  $\|(x - x_0)''_{t_1 t_2}\|_{L_p^n} \leq C\|\Delta_{u,g}\|_{L_p^n}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект НК-13П-13) и АЦВП «Развитие потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/3927).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Егоров А. И.* Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.
- [2] *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
- [3] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал, 2002.
- [4] *Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А.* Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1990.
- [5] *Плотников В. И., Сумин В. И.* Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 845–856.
- [6] *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61–77.
- [7] *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. — 2003. № 1. — С. 91–108.
- [8] *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
- [9] *Сумин В. И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 12. — С. 2097–2109.
- [10] *Толстоногов А. А.* Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 163–182.
- [11] *Погодаев Н. И.* О решениях системы Гурса–Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1116–1126.

- [12] *Idczak D., Majewski M., Walczak S.* Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat–Darboux problem // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* — 2003. — V. 13, № 1. — С. 29–44.
- [13] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Управляемая задача Гурса–Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. II // *Вестник ННГУ. Математика.* — 2006. — № 1. — С. 65–80.
- [14] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса–Дарбу // *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление.* — 2006. — № 2. — С. 64–81.
- [15] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // *Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* — 2011. — № 2.
- [16] *Лисаченко И. В.* Нелинейная задача Гурса–Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями // *Вестник ННГУ.* — 2008. — № 5. — С. 107–112.
- [17] *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // *ДАН СССР.* — 1989. — Т. 305, № 5. — С. 1056–1059.
- [18] *Сумин В. И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление.* — 1998. — № 2. — С. 138–151.

## $\rho$ -уравновешенные булевы функции и их свойства

*О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Яценко*

logol@iisi.msu.ru, smyshsv@gmail.com, iisi@iisi.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

### Введение

Одним из важнейших свойств кодирующих устройств, построенных с помощью регистров сдвига и булевых функций, является возможность получения на выходе произвольных двоичных последовательностей. Данное свойство, как было показано Сумароко-



вым [1], эквивалентно понятию совершенной уравновешенности булевых функций.

В настоящей работе вводится и исследуется свойство  $\rho$ -уравновешенности булевых функций для фиксированного  $\rho$ , обобщающее, в определенном смысле, свойство совершенной уравновешенности. Формулируется и доказывается критерий  $\rho$ -уравновешенности в терминах коэффициентов Уолша–Адамара, важный для получения соотношений между коэффициентами Уолша–Адамара совершенно уравновешенных булевых функций.

Доказывается утверждение о том, что множество  $\rho$ -уравновешенных булевых функций при определенном классе  $\rho$  строго вложено в множество совершенно уравновешенных функций. Данное утверждение опровергает полученный в работе [2] критерий совершенной уравновешенности, а также его ослабленный вариант.

### Определения и предварительные результаты

Для любого натурального  $n$  множество двоичных наборов длины  $n$  будем обозначать через  $V_n = \{0, 1\}^n$ ; множество булевых функций от  $n$  переменных — через  $\mathcal{F}_n$ .

**Определение 1.** Преобразованием Уолша–Адамара булевой функции  $f$  называется целочисленная функция на  $V_n$ , определяемая следующим равенством:  $W_f(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{x} \in V_n} (-1)^{f(\mathbf{x}) \oplus \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}$ .

Обозначим через  $\rho$  набор целых положительных чисел  $\rho = \{k; d_1, d_2, \dots, d_k\}$ , где  $d_1 = 1$ ,  $d_{i+1} > d_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, k-1$ .

Определим поднабор  $\mathbf{u}_\rho \in V_k$  двоичной последовательности  $\mathbf{u} \in V_\infty$ ,  $\mathbf{u} = (y_1, y_2, \dots)$ , равенством  $\mathbf{u}_\rho = (y_{d_1}, y_{d_2}, \dots, y_{d_k})$ .

Обозначим для функции  $f \in \mathcal{F}_n$  и  $\rho$  через  $f_\rho$  следующее отображение из  $V_{d_k+n-1}$  в  $V_k$ :  $f_\rho(x_1, x_2, \dots, x_{d_k+n-1}) = (f(x_1, x_2, \dots, x_n), f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_{d_2+n-1}), \dots, f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_k+n-1}))$ .

**Определение 2.** Функция  $f \in \mathcal{F}_n$  называется  $\rho$ -уравновешенной, если все поднаборы  $\mathbf{u}_\rho \in V_k$  имеют равное число прообразов относительно отображения  $f_\rho$ .

**Определение 3.** Булева функция  $f \in \mathcal{F}_n$  называется совершенно уравновешенной, если она является  $\rho$ -уравновешенной для любого  $\rho$ .

Нетрудно показать, что данное определение является эквивалентным традиционному определению совершенной уравновешенности булевой функции в том виде, в котором оно представлено в работах [1, 2, 3] и др.

### Основные результаты

**Критерий совершенной уравновешенности.** В работе [4] рассмотрено понятие сводимости свойств булевых отображений к свойствам координатных функций и показано, что свойство уравновешенности булевых отображений является сводимым. Из этого вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Функция  $f \in \mathcal{F}_n$  является  $\rho$ -уравновешенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого набора  $\gamma = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(k)}) \in V_k$  булева функция  $\sum_{\gamma} f_{\rho}(x_1, x_2, \dots, x_{d_k+n-1}) = \gamma^{(1)}f(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus \gamma^{(2)}f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_{d_2+n-1}) \oplus \dots \oplus \gamma^{(k)}f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_k+n-1})$  является уравновешенной.

Введем  $N$  множеств пар индексов по следующему правилу:

$$J_k = \{(i, s) \mid i \in \{1, 2, \dots, m\}, s \in \{0, 1, \dots, n-1\}, l_i + s = k\}.$$

**Теорема 2.** Булева функция  $\bigoplus_{i=1}^m f(x_{l_i}, x_{l_i+1}, \dots, x_{l_i+n-1})$  уравновешена тогда и только тогда, когда коэффициенты Уолша–Адамара функции  $f$  удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{i=1}^m \prod W_f(\alpha^{(p_i,0)}, \alpha^{(p_i,1)}, \dots, \alpha^{(p_i,n-1)}) = 0, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем наборам  $mn$  булевых переменных  $\alpha^{(p_i,s)}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , которые удовлетворяют следующим  $N$  линейным соотношениям:  $\bigoplus_{(i,s) \in J_k} \alpha^{(p_i,s)} = 0$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Пример 1.** Функция  $f \in \mathcal{F}_4$  является  $\rho(3; 1, 2, 3)$ -уравновешенной тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$W_f(0, 0, 0, 0) = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \in V_3} W_f(0, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \cdot W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, 0) &= 0; \\ \sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}) \in V_2} W_f(0, 0, a^{(1)}, a^{(2)}) \cdot W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, 0, 0) &= 0; \\ \sum_{(a^{(1)}, \dots, a^{(6)}) \in V_6} W_f(0, a^{(1)}, a^{(3)} \oplus a^{(4)}, a^{(5)} \oplus a^{(6)}) \times \\ \times W_f(a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(5)}, a^{(2)}) \cdot W_f(a^{(4)}, a^{(6)}, a^{(2)}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Справедлив следующий новый критерий совершенной уравновешенности.

**Теорема 3.** *Функция  $f \in \mathcal{F}_n$  является совершенно уравновешенной тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Уолша–Адамара удовлетворяют соотношению (1) для любого натурального  $m$  и любого набора номеров аргументов для суммы  $\bigoplus_{i=1}^m f(x_{l_i}, x_{l_i+1}, \dots, x_{l_i+n-1})$ , такого, что выполнены следующие соотношения:*

1.  $\bigcup_{i=1}^m \{l_i, l_i + 1, \dots, l_i + n - 1\} = \{1, 2, \dots, N\}$ ;
2.  $l_i \neq l_j$  для любых  $i \neq j$ ;
3. для любого  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  найдется по крайней мере одно  $j$  такое, что  $l_i \in \{l_j, l_j + 1, \dots, l_j + n - 1\}$ .

**Совершенная уравновешенность и  $\rho_M$ -уравновешенность.**

Введем для всякого  $M \in \mathbb{N}$  обозначение  $\rho_M = \{M; 1, 2, \dots, M\}$ . Очевидно, что  $\rho_1$ -уравновешенность булевых функций — это уравновешенность.

Для фиксированного  $n$  интересен вопрос о том, при каком наименьшем  $M$   $\rho_M$ -уравновешенность булевой функции означает ее совершенную уравновешенность. В работе [5] доказано, что в качестве обладающего таким свойством  $M$  можно выбрать  $M = 2^{n-2} \cdot (2^{n-1} - 1) + n$ .

В работе [2] Голичем было доказано утверждение о том, что в качестве  $M$  можно выбрать  $M = n$ . В доказательстве утверждения в [2] содержится существенный пробел, однако контрпримеров ранее получено не было.

**Лемма 4** [2]. Булева функция  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$  совершенно уравновешена тогда и только тогда, когда она является  $\rho_n$ -уравновешенной.

Из следующей леммы и теоремы вытекает, что ни для какого сколь угодно большого  $c \in \mathbb{N}$  ослабленный вариант леммы 4 с условием на  $\rho_{n+c}$ -уравновешенность (вместо  $\rho_n$ -уравновешенности) не является верным.

**Лемма 5.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_n$ . Функция

$$f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_{kn-k+1}) = f(x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{(n-1)k+1})$$

является  $\rho_{kM}$ -уравновешенной тогда и только тогда, когда функция  $f$  является  $\rho_M$ -уравновешенной.

**Теорема 6.** Для любого  $c \in \mathbb{N}$  существует  $n \in \mathbb{N}$  и функция  $f \in \mathcal{F}_n$ , которая является  $\rho_{n+c}$ -уравновешенной и не является совершенно уравновешенной.

Работа поддержана РФФИ, проекты № 09-01-00653-а, № 10-01-00475-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сумароков С. Н. Запреты двоичных функций и обратимость для одного класса кодирующих устройств // Вестник МГУ. Серия Математика. — 1997. — Т. 1, № 1. — С. 33–55.
- [2] Golic J. Dj. On the Security of Nonlinear Filter Generators // Proceedings of Fast Software Encryption, LNCS. V. 1039. — Heidelberg: Springer, 1996. — P. 173–188.
- [3] Логачев О. А., Смышляев С. В., Яценко В. В. Новые методы изучения совершенно уравновешенных булевых функций // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 51–74.
- [4] Яценко В. В. Свойства булевых отображений, сводимые к свойствам их координатных функций // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1994. — № 4. — С. 11–13.
- [5] Бабаи А. В. Запреты автоматов и двоичных функций // Труды по дискретной математике. — 2006. — Т. 9. — С. 7–20.

## Поведение функции Шеннона для задержки в одной модели схем из функциональных элементов

С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов

lozhkin@cs.msu.su, brdanilov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматриваются формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_b\}$ , где функциональный элемент (ФЭ)  $E_i$  ( $i = 1, \dots, b$ ) имеет  $k_i$  ( $k_i \geq 1$ ) входов и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ)  $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$ , которая в случае  $k_i \geq 2$  существенно зависит от всех своих булевых переменных (БП). При этом, как обычно, формулами считаются те одновыходные СФЭ, в которых выход любого ФЭ либо поступает на вход ровно одного (другого) ФЭ, либо является выходом схемы.

В статье [1] вводится модель задержки, которая обобщает ряд других, изучавшихся ранее, моделей (см., например, [2, 3]), рассматривая отдельно *глубины*  $\tilde{T}_i^j$  (где  $\tilde{T}_i^j$  — действительные положительные числа) ФЭ  $E_i$  по входам  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k_i$ ). Как обычно, *цепью*  $\omega$  назовём СФЭ, составленную из цепочки последовательно соединённых ФЭ  $E_{i_1}, \dots, E_{i_w}$ . Назовём цепь *инициальной*, если у этой цепи выделен один из входов её первого ФЭ  $E_{i_1}$ . Назовём *глубиной*  $\tilde{T}(\omega)$  *инициальной цепи*  $\omega$  сумму глубин ФЭ цепи по соединяющим их входам и выделенному входу первого ФЭ. Подсхему СФЭ  $\Sigma$ , являющуюся инициальной цепью, выделенный вход которой является входом  $\Sigma$  и которая оканчивается на одном из её выходных ФЭ (т. е. ФЭ, выход которых поступает на выход схемы), будем называть *главной цепью* СФЭ  $\Sigma$ . В такой модели *глубиной* *схемы* назовём наибольшую глубину её главных цепей.

Рассматриваемая в данной статье модель задержки СФЭ над  $B$  обобщает понятие глубины следующим образом. Будем считать, что для каждого ФЭ  $E_i$  ( $i = 1, \dots, b$ ), каждого  $j$  ( $j = 1, \dots, k_i$ ) и каждого булева набора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k)$ , такого, что  $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{k_i}) \neq \text{const}$ , определена положительная *задержка*  $T_i^{(j,\alpha)}$  ФЭ  $E_i$  по входу  $x_j$  на наборе  $\alpha$ , которая в случае

$k_i = 1$  имеет вид  $T_i^1 = \tilde{T}_i^1$ . При этом будем считать, что модель задержки обобщает предыдущую модель глубины таким образом, что глубиной  $\tilde{T}_i^j$  ФЭ  $E_i$  по входу  $x_j$  в случае  $k_i \geq 2$  является наименьшая из задержек  $T_i^{(j,\alpha)}$  по всевозможным указанным наборам  $\alpha$ . Далее, для СФЭ  $\Sigma$  и набора  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  значений её входных БП  $x_1, \dots, x_n$  *существенной на  $\alpha$  цепью*  $\Sigma$  назовём такую её инициальную цепь, что после подстановки набора  $\alpha$  в схему, отсоединения выделенной дуги цепи и подачи по этой дуге новой БП  $x_0$  на выходе каждого ФЭ цепи реализуется ФАЛ  $x_0$  или  $\bar{x}_0$ . При этом *задержкой* существенной цепи  $\omega$  на наборе  $\alpha$  назовём величину  $T^\alpha(\omega)$ , равную сумме задержек первого ФЭ цепи по выделенному входу и остальных ФЭ цепи по входам, соединяющим эти элементы между собой, при условии, когда на невыделенные входы цепи поступают значения, реализуемые схемой на наборе  $\alpha$ . Множество существенных на  $\alpha$  главных цепей СФЭ  $\Sigma$  обозначим через  $\Omega_\alpha(\Sigma)$ . Под *задержкой*  $T(\Sigma)$  *схемы*  $\Sigma$  в рассматриваемой модели понимается величина

$$T(\Sigma) = \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} \max_{\omega \in \Omega_\alpha(\Sigma) \neq \emptyset} T^\alpha(\omega),$$

которая считается неопределённой, если  $\Omega_\alpha(\Sigma)$  пусто для всех  $\alpha \in \{0, 1\}^n$ . *Задержка ФАЛ* и *функция Шеннона*  $T_B(n)$  для задержки ФАЛ от  $n$  БП в классе СФЭ над  $B$  определяются обычным образом.

Описанная модель задержки такова, что поднятие ветвлений выходов ФЭ к входам схемы не изменяет её задержки. Отсюда, аналогично [4], следует, что для каждой СФЭ найдётся формула (система формул) в том же базисе, задержка которой совпадёт с задержкой исходной СФЭ, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением формул в базисе  $B$ . Множество формул над  $B$  обозначим через  $\mathcal{U}_B^\Phi$ .

Рассмотрим не пустое (в силу полноты  $B$ ) множество  $B'$ , состоящее из ФЭ базиса  $B$ , имеющих не менее двух входов. Без ограничения общности предположим, что  $B' = \{E_1, \dots, E_{b'}\}$ . Для ФЭ  $E_i$  ( $i = 1, \dots, b'$ ) определим его *приведённую задержку*  $\tau_i'$  равенством  $\tau_i' = 1/\log_2 x_i$ , где  $x_i$  ( $x_i > 1$ ) — единственный корень характеристического уравнения

$$\sum_{j=1}^{k_i} x^{-\tilde{T}_i^j} = 1,$$

рассматриваемого на положительной полуоси. Определим *приведённую задержку базиса*  $\mathbb{B}$  равенством  $\tau'_\mathbb{B} = \min_{1 \leq i \leq b'} \tau'_i$ .

### Нижняя оценка функции Шеннона

Нижняя оценка функции Шеннона получается стандартным образом на основе следующих лемм.

**Лемма 1.** Для всякой формулы  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_\mathbb{B}^\Phi$ , в которой каждая главная цепь существенна, верно

$$R(\mathcal{F}) \leq 2^{T(\mathcal{F})/\tau'_\mathbb{B}}.$$

**Лемма 2.** Для любого  $T \geq 0$  и любого натурального  $n$  число попарно не эквивалентных формул над  $\mathbb{B}$ , которые зависят от  $n$  БП и задержка которых не больше  $T$ , не превосходит<sup>1</sup>  $(c_1 n)^{2^{T/\tau'_\mathbb{B}}}$ .

**Теорема 1.** Для всех натуральных  $n$  выполняется неравенство

$$T_\mathbb{B}(n) \geq \tau'_\mathbb{B}(n - \log \log n) - c_2.$$

### Верхняя оценка функции Шеннона

Следующая лемма является аналогом утверждения о существовании формулы в виде квазиполного дерева с минимальной глубиной при данном числе входов в модели [2].

**Лемма 3.** Если  $\tau'_\mathbb{B}$  достигается на ФЭ  $E_t$ , т. е.  $\tau'_t = \tau'_\mathbb{B}$ , то для всяких натуральных чисел  $p$  и  $r$ , связанных соотношением  $p = r(k_t - 1) + 1$ , существует неповторная формула  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_\mathbb{B}^\Phi$  с  $p$  входами, состоящая из  $r$  ФЭ  $E_t$ , для которой справедливо

$$\tilde{T}(\mathcal{F}) \leq \tau'_\mathbb{B} \log p + c_3.$$

Пусть  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$  — разбиение куба  $\{0, 1\}^n$  от БП  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Обобщённой мультиплексорной ФАЛ  $\mu_\Delta(x, y_1, \dots, y_p)$ , соответствующей разбиению  $\Delta$ , назовём ФАЛ, равную  $y_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ), когда  $x \in \delta_i$ . Мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  называется ФАЛ  $\mu_\Delta$ , соответствующая тривиальному разбиению.

<sup>1</sup>Буквой  $c$  с индексами обозначаются различные константы, зависящие от базиса  $\mathbb{B}$ .

**Лемма 4.** Для любой существенной ФАЛ  $\varphi(y_1, \dots, y_p)$  и любого разбиения  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ , куба  $\{0, 1\}^n$  от БП  $x = (x_1, \dots, x_n)$  существуют ФАЛ  $g_i(x, y_i)$  ( $i = 1, \dots, p$ ), которые монотонно или антимонотонно зависят от БП  $y_1, \dots, y_p$ , такие, что  $\varphi(g_1, \dots, g_p) = \mu_\Delta(x, y_1, \dots, y_p)$ .

Следующее утверждение доказывается применением леммы 4 и техники так называемых «врезок» к формуле  $\mathcal{F}$  из утверждения леммы 3.

**Лемма 5.** Для натурального  $n$  мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n$  можно реализовать бесповторной по информационным БП формулой  $\mathcal{M}_n \in \mathcal{U}_B^\Phi$ , такой, что

$$T(\mathcal{M}_n) \leq \tau'_B n + O(\log n).$$

**Теорема 2.** Для любой ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существует реализующая её формула  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$ , такая, что

$$T(\mathcal{F}) \leq \tau'_B n + O(\log n).$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая асимптотика функции Шеннона:

$$T(\mathcal{F}) \sim \tau'_B n.$$

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00817-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ложкин С. А. Поведение функции Шеннона для задержки схем из функциональных элементов в некоторых моделях // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XII Межд. конф. (Нижний Новгород, 17–22 мая 1999 г.). Часть II. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 139.
- [2] Луцанов О. Б. О схемах функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. — Вып. 23 — М.: Наука, 1970. — С. 43–82.
- [3] Ложкин С. А. О задержке мультиплексорной функции в произвольном базисе // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Межд. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). — Казань: Отечество, 2008. — С. 75.
- [4] Ложкин С. А. Основы кибернетики. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.