

Программа курса **Теория дискретных функций**

Механико-математический ф-т МГУ, 1-й курс, 1-й поток, 2-й семестр, **2025–2026** уч. год
лектор — проф. В. В. Кочергин

1. Функции алгебры логики (булевы функции). Число булевых функций от n фиксированных переменных. Существенные и несущественные (фиктивные) переменные. Операции удаления и добавления несущественной переменной. Равенство булевых функций. Элементарные булевы функции и их свойства.
2. Способы задания булевых функций. Булева функция как подмножество вершин n -мерного единичного куба.
3. Формулы над множеством булевых функций. Реализация булевых функций формулами. Операция суперпозиции. Эквивалентность формул.
4. Разложение булевой функции по одной и нескольким переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Полнота системы $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).
5. Лемма о сводимости полных систем булевых функций. Существование конечной полной подсистемы в полной системе булевых функций. Примеры полных систем.
6. Полином Жегалкина. Существование и единственность представления булевой функции в виде полинома Жегалкина.
7. Замыкание множества функций. Свойства замыкания. Замкнутые классы булевых функций. Классы T_0 и T_1 функций, сохраняющих константы.
8. Линейные функции. Замкнутость класса L . Лемма о нелинейной функции.
9. Двойственные и самодвойственные функции. Замкнутость класса S . Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции.
10. Моногонные функции. Замкнутость класса M . Лемма о немоногонной функции.
11. Критерий Поста полноты множества функций в P_2 . Следствие о существовании в любом полном множестве полного подмножества из не более чем 4 функций. Пример базиса в P_2 , состоящего из четырех функций.
12. Предполные классы. Теорема о предполных классах в P_2 .
13. Функции k -значной логики ($k \geq 3$). Число функций k -значной логики от n фиксированных переменных. Существенные и фиктивные переменные для функций k -значной логики, отличие от случая булевых функций. Элементарные функции k -значной логики, их свойства.
14. Две универсальные формы представления произвольной функции k -значной логики. Полнота систем функций из этих универсальных форм.
15. Полнота системы $\{\max(x, y), \bar{x}\}$ в P_k . Функция Вебба. Полнота системы, состоящей только из функции Вебба.
16. Алгоритм распознавания полноты системы функций k -значной логики. Исследование полноты систем функций k -значной логики на практике.
17. Классы сохранения множеств функций и их свойства. Теорема Кузнецова о функциональной полноте функций k -значной логики.
18. Представление функций k -значной логики полиномами. Малая теорема Ферма. Условие представления всех функций k -значной логики полиномами.
19. Пример Янова замкнутого класса k -значной логики, не имеющего базиса.
20. Пример Мучника замкнутого класса k -значной логики со счетным базисом. Континуальность семейства замкнутых классов функций k -значной логики.
21. Возведение в n -ю степень с использованием $\log_2 n + o(\log_2 n)$ операций умножения.

22. Граф (ориентированный и неориентированный). Основные понятия для графа. Геометрическая реализация графа. Изоморфизм графов. Подграф. Подграф, индуцированный множеством вершин. Пути, цепи, циклы на графе. Компоненты связности графа. Связные графы.
23. Деревья, характеристические свойства деревьев.
24. Ориентированные графы без ориентированных циклов. Лемма о правильной (монотонной) нумерации вершин в конечном ориентированном графе без циклов.
25. Схемы из функциональных элементов в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$. Определение функций, реализуемых в вершинах схемы. Независимость функций, реализуемых в вершинах схемы, от выбора монотонной нумерации вершин. Формулы как схемы. Схемы вычислений.
26. Сложность реализации функции (множества функций) схемами из функциональных элементов. Функция Шеннона. Простые верхняя и нижняя оценки функции Шеннона.
27. Асимптотически оптимальная по сложности реализация системы всех элементарных конъюнкций длины n .
28. Метод Шеннона получения верхней оценки функции Шеннона.
29. Метод каскадов получения верхней оценки функции Шеннона.
30. Точное значение сложности реализации системы всех функций от n переменных в произвольном полном базисе.
31. Реализация симметрических булевых функций.
32. Метод Карацубы умножения двух чисел. Верхняя оценка битовой сложности.
33. Мощностной метод получения нижних оценок функции Шеннона. Эффект Шеннона. Усиленная мощностная нижняя оценка функции Шеннона в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$.
34. Порядок роста функции Шеннона в произвольном полном конечном базисе.
35. Асимптотически наилучший метод (метод Лупанова) построения схем в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$. Асимптотика роста функции Шеннона в этом базисе.
36. Асимптотика роста функции Шеннона в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$ для класса самодвойственных функций.
37. Теорема Храпченко. Квадратичная нижняя оценка сложности реализации линейной функции схемами без ветвления выходов элементов (формулами) в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$.
38. Минимальное число инверторов, достаточное для реализации системы функций $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$.
39. Детерминированные функции. Информационное дерево. Вес детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные функции. Состояния, диаграмма переходов (диаграмма Мура), таблица переходов и канонические уравнения ограниченно-детерминированной функции.
40. Автомат. Инициальный автомат. Задание автомата с помощью таблицы, канонических уравнений и диаграммы Мура. Автомат «счетчик четности». Автомат задержки. Автоматные функции. Тождественность ограниченно-детерминированных и автоматных функций.
41. Периодические последовательности. Лемма о преобразовании автоматом периодических последовательностей.
42. Автоматные функции от нескольких переменных. Операция суперпозиции на автоматных функциях. Отсутствие конечной полной системы автоматных функций относительно операции суперпозиции.
43. Канонические уравнения автомата в скалярном (булевом) виде. Операция обратной связи. Конечные полные системы автоматных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Реализация автомата схемами из функциональных элементов и элементов задержки.
44. Изоморфизм автоматов. Отличимость состояний автомата на входном слове и множестве входных слов. Неотличимость состояний и автоматов. Приведенный автомат. Теорема о существовании и единственности приведенного автомата.
45. Отличимость состояний автомата на входных словах заданной длины. 1-я и 2-я теоремы Мура. Примеры автоматов, для которых утверждения теорем Мура не могут быть усилены.