

Программа курса **Теория дискретных функций**

механико-математический ф-т МГУ, 1-й курс, 1-й поток, 2-й семестр, **2015–2016** уч. год

1. Функции алгебры логики (булевы функции). Число булевых функций от n фиксированных переменных. Существенные и несущественные (фиктивные) переменные. Операции удаления и введения несущественной переменной. Равенство булевых функций. Элементарные булевые функции и их свойства.
2. n -мерный единичный куб. Булева функция как подмножество вершин единичного куба.
3. Формулы над множеством булевых функций. Реализация булевых функций формулами. Операция суперпозиции. Эквивалентность формул. Замыкание множества функций. Свойства замыкания. Полные множества функций.
4. Разложение булевой функции по одной и нескольким переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Полнота системы $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$.
5. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).
6. Лемма о сводности полных систем булевых функций. Существование конечной полной подсистемы в полной системе булевых функций. Примеры полных систем.
7. Полином Жегалкина. Существование и единственность представления булевой функции в виде полинома Жегалкина.
8. Замкнутые классы булевых функций. Классы T_0 и T_1 функций, сохраняющих константы.
9. Монотонные функции. Замкнутость класса M . Лемма о немонотонной функции.
10. Двойственные и самодвойственные функции. Принцип двойственности. Замкнутость класса S . Лемма о несамодвойственной функции.
11. Линейные функции. Замкнутость класса L . Лемма о нелинейной функции.
12. Критерий Поста полноты множества функций в P_2 . Следствие о существовании в любом полном множестве полного подмножества из не более чем 4 функций. Пример базиса в P_2 , состоящего из четырех функций.
13. Предполные классы. Теорема о предполных классах в P_2 .
14. Графы. Связные графы. Деревья, характеристические свойства деревьев. Ориентированные графы. Лемма о правильной (монотонной) нумерации вершин в конечном ориентированном графе без циклов.
15. Вычисления. Неветвящиеся вычисления. Пример (возведение в степень). Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Схемы вычислений. Функционирование СФЭ. Примеры. Сложность схемы, сложность функции, сложность системы функций. Функция Шеннона.
16. Асимптотически оптимальная по сложности реализация системы всех элементарных конъюнкций длины n . Точное значение сложности реализации системы всех функций от n переменных (конструктивная верхняя оценка для системы $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$, неконструктивная — для произвольной полной системы).
17. Метод Шеннона. Верхняя оценка функции Шеннона.
18. Метод каскадов. Верхняя оценка функции Шеннона.
19. Реализация с линейной сложностью схемами в произвольном полном базисе оператора сложения двух двоичных чисел и оператора, подсчитывающего число единиц во входном наборе. Порядок роста сложности реализации симметрических булевых функций.
20. Лемма о различии всех таблиц, соответствующих разным нумерациям элементов одно приведенной схемы. Верхняя оценка числа приведенных СФЭ в системе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$, с входами x_1, x_2, \dots, x_n сложности не более l .

21. Нижняя оценка функции Шеннона. Эффект Шеннона. Уточненная нижняя оценка функции Шеннона. Порядок роста функции Шеннона для произвольного конечного полного базиса.
22. Теорема Лупанова. Асимптотически оптимальный метод Лупанова построения СФЭ в системе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$. Асимптотика роста функции Шеннона. Уточненная верхняя оценка функции Шеннона. Асимптотически оптимальный метод с заданным соотношением числа дизъюнкторов и конъюнкторов.
23. Асимптотика роста функции Шеннона для класса самодвойственных функций.
24. Детерминированные функции. Информационное дерево. Вес детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные функции. Состояния, диаграмма Мура и канонические уравнения для ограниченно-детерминированной функции.
25. Автомат. Инициальный автомат. Задание автомата с помощью таблицы, канонических уравнений и диаграммы Мура. Автомат задержки. Автоматные функции. Тождественность ограниченно-детерминированных и автоматных функций.
26. Канонические уравнения в скалярной записи для автомата. Реализация автомата схемами из функциональных элементов и элементов задержки.
27. Изоморфизм автоматов. Отличимость состояний автомата на входном слове и множестве входных слов. Неотличимость состояний и автоматов. Приведенный автомат. Теорема о существовании и единственности приведенного автомата.
28. Отличимость состояний автомата на входных словах заданной длины. 1-я и 2-я теоремы Мура. Примеры автоматов, для которых утверждения теорем Мура не могут быть усилены.
29. Периодические последовательности. Лемма о преобразовании автоматом периодических последовательностей.
30. Автоматные функции от нескольких переменных. Операция суперпозиции на автоматных функциях. Отсутствие конечной полной системы автоматных функций относительно операции суперпозиции.
31. Функции k -значной логики ($k \geq 3$). Число функций k -значной логики от n фиксированных переменных. Существенные и фиктивные переменные для функций k -значной логики. Элементарные функции k -значной логики, их свойства.
32. Две универсальные формы представления произвольной функции k -значной логики. Полнота систем функций в P_k для этих универсальных форм.
33. Полнота системы $\{\max(x, y), \bar{x}\}$ в P_k . Функция Вебба. Полнота системы, состоящей только из функции Вебба.
34. Алгоритм распознавания полноты системы функций k -значной логики.
35. Представление функций k -значной логики полиномами. Малая теорема Ферма. Условие представления всех функций k -значной логики полиномами.
36. Пример Янова замкнутого класса k -значной логики, не имеющего базиса.
37. Пример Мучника замкнутого класса k -значной логики со счетным базисом. Континуальность семейства замкнутых классов функций k -значной логики.
38. Классы сохранения множеств функций и их свойства. Теорема Кузнецова о функциональной полноте функций k -значной логики.